中国科学

1983 年 7 月　　A 辑　　第 7 期

有涨落效应的磁流体静力学关系

胡 文 瑞

(中国科学院力学研究所，北京)

摘　要

观测表明，在许多天体物理环境中，涨落场具有不可忽略的重要作用．本文在一阶光滑近似条件下，推导了普通湍流和随机波动两种条件下的磁流体静力学方程组，以及这些方程所要求的自洽性条件.在静力学问题中，涨落的洛伦茨力$(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}$会对大尺度磁场位形有影响．具体研究这种影响对于解释观测的特征是十分必要的，特别是许多天体物理环境中，磁场（包括涨落磁场$\delta\boldsymbol{B}$）是决定能量和动量平衡的重要因素.

一、引　言

磁流体静力学平衡位形是太阳物理和天体物理中的重要研究课题，其方程可以表示为：

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\nabla p+\rho\boldsymbol{g},\tag{1.1}$$

其中$\boldsymbol{B}$是磁场强度，$\boldsymbol{g}$是外加重力场，p和ρ分别是等离子体的压力和密度．在太阳物理的情况下，方程(1.1)已被广泛地研究了．Low[1,2]（1975，1980）和 Osherovich[3]（1981）讨论了一些特解的性质；作者[4]（1981）采用小的几何参数展开方法，分析了方程(1.1)的一般特性.

但是，方程(1.1)描述的是一种平均位形．在许多天体物理环境中，等离子体都处于湍流的状态　这时，磁场和热力学参数的涨落分量会影响大尺度结构的平均位形．特别是，如果希望用理论结果去解释观测现象的话，就更应该讨论这些涨落场对平均位形的影响.

人们经常讨论无作用力磁场(无力场)，它是磁流体静力学的一种特殊情况，常常被表示为：

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\alpha\boldsymbol{B},\tag{1.2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\tag{1.3}$$

其中α是t和$\boldsymbol{r}$的函数，被称为无力因子．α沿磁力线为常数

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\alpha=0.\tag{1.4}$$

Lerche[5]（1970）曾经讨论过随机无力场，他假设定常的无力因子可分为：

$$\alpha(\boldsymbol{r})=\alpha_0+\delta\alpha(\boldsymbol{r}).\tag{1.5}$$

本文 1982 年 4 月 24 日收到.

如果将 $\boldsymbol{B}$ 也分为平均项与涨落项之和，即有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{B}. \tag{1.6}$$

将(1.5)和(1.6)式代入(1.2)式，就可导出一个线性方程，如果忽略二阶涨落项的话．适当地假设关联函数 $\langle\alpha(\boldsymbol{r})\alpha(\boldsymbol{r}')\rangle$，就可以讨论无力场的湍流谱．事实上，无力场位形往往是非线性的，并且涨落速度场和涨落磁场耦合在一起了．作者[6]（1982）最近讨论了湍流无力场位形的一般特性．本文将该结果推广到磁流体静力学的情况．

最近，人们开始研究动力学发电机问题，或者也叫做磁流体力学发电机问题（有关评论可见 Moffatt[7]，1978，Busse[8]，1978）．这时，平均感应电场 $\langle\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}\rangle$ 包含在磁感应方程中，但是，平均的洛伦茨力 $\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle$ 仍未计入动量守恒关系之中，在天体物理的平衡位形中，作用力是重要的因素．本文将一般讨论扰动场对平衡位形的影响，特别分析平均洛伦茨的作用．

二、基 本 方 程

磁流体力学方程组可以写为：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{2.1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=-\nabla p+\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}-\rho\boldsymbol{g}, \tag{2.2}$$

$$p=p(\rho), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\eta\Delta\boldsymbol{B}, \tag{2.4}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{2.5}$$

其中 η 是磁扩散系数．当惯性项可忽略不计时，方程(2.2)退化为(1.1)式．

将所有的量表示为平均量与涨落量之和：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\delta\boldsymbol{v},$$
$$p=p_0+\delta p,\quad \rho=\rho_0+\delta\rho, \tag{2.6}$$

其中〈　〉表示平均值，它给出关系

$$\boldsymbol{B}_0=\langle\boldsymbol{B}\rangle;\quad \boldsymbol{v}_0=\langle\boldsymbol{v}\rangle,\quad p_0=\langle p\rangle,\quad \rho_0=\langle\rho\rangle, \tag{2.7}$$

以及

$$\langle\delta\boldsymbol{B}\rangle=\langle\delta\boldsymbol{v}\rangle=\langle\delta p\rangle=\langle\delta\rho\rangle=0. \tag{2.8}$$

将(2.6)式代入方程(1.1)，(2.1)，(2.3)—(2.5)式，则平均量方程为：

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{v}_0+\langle\delta\rho\delta\boldsymbol{v}\rangle)=0, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{4\pi}[(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0+\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle]=\nabla p_0+\rho_0\boldsymbol{g}, \tag{2.10}$$

$$p_0=p(\rho_0), \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}_0}{\partial t}=\nabla\times[\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_0+\langle\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}\rangle]+\eta\Delta\boldsymbol{B}_0, \tag{2.12}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0=0; \tag{2.13}$$

而涨落量的方程为:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t}+\nabla\cdot[\rho_0\delta\boldsymbol{v}+\delta\rho\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{H}]=0, \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{4\pi}[(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\delta\boldsymbol{B}+(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{F}]=\nabla\delta p+\delta\rho\boldsymbol{g}, \tag{2.15}$$

$$\delta p=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_0\delta\rho, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\delta\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_0\times\delta\boldsymbol{v})+\nabla\times\boldsymbol{I}+\eta\Delta\delta\boldsymbol{B}, \tag{2.17}$$

$$\nabla\cdot\delta\boldsymbol{B}=0, \tag{2.18}$$

其中的关联项为:

$$\boldsymbol{H}=\delta\rho\delta\boldsymbol{v}-\langle\delta\rho\delta\boldsymbol{v}\rangle, \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{E}=\langle\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}\rangle, \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{F}=(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}-\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle, \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{I}=\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}-\langle\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}\rangle. \tag{2.22}$$

这些关联项给出了涨落场的影响. 一般而言,平均和涨落的速度场和磁场彼此耦合在一起.

在发电机理论中,经常采用一阶光滑近似(参见 Moffatt[7], 1977, p. 156). 估计方程(2.17)中五项的数量级,随机波动近似要求

$$\left|\delta v\Big/\left(\frac{l_0}{t_0}\right)\right|\ll 1. \tag{2.23}$$

这时,涨落的磁感应方程(2.17)退化为:

$$\frac{\partial\delta\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\delta\boldsymbol{B}+\delta\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0)+\eta\Delta\delta\boldsymbol{B}. \tag{2.24}$$

另一种情况是湍流近似,它要求

$$\left|\delta v\Big/\left(\frac{l_0}{t_0}\right)\right|=O(1), \tag{2.25}$$

以及磁雷诺数

$$R_m=\frac{l_0\delta v}{\eta}=O\left(\frac{l_0^2}{\eta t_0}\right)\ll 1. \tag{2.26}$$

这时,方程(2.17)退化为:

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\delta\boldsymbol{B}+\delta\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0-\eta\nabla\times\delta\boldsymbol{B})=0. \tag{2.27}$$

湍流近似意味着要求

$$|\delta B/B_0|\ll 1.$$

在上面的讨论中, l_0 和 t_0 代表典型的小尺度和时间值. 我们将分别讨论这两种近似情况.

三、湍 流 近 似

在通常湍流的情况下,涨落的磁感应方程(2.27)可以重新写为:

$$\nabla\times\delta\boldsymbol{B}=\frac{1}{\eta}(\delta\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{v}_0\times\delta\boldsymbol{B}-\nabla\chi), \tag{3.1}$$

其中电势 $\chi(\boldsymbol{r})$ 为一任意标量函数．根据条件(2.18)，引入磁势函数 $\delta\boldsymbol{A}$，其定义为：

$$\delta\boldsymbol{B}=\nabla\times\delta\boldsymbol{A}. \tag{3.2}$$

可以要求

$$\nabla\cdot\delta\boldsymbol{A}=-\chi/\eta, \tag{3.3}$$

则方程(3.1)化为：

$$\nabla^2\delta\boldsymbol{A}+\frac{1}{\eta}\boldsymbol{v}_0\times(\nabla\times\delta\boldsymbol{A})=-\frac{1}{\eta}\delta\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_0, \tag{3.4}$$

或者表示为分量形式为：

$$\nabla^2\delta A_i+\frac{1}{\eta}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}v_{0j}\frac{\partial\delta A_m}{\partial x_l}=-\frac{1}{\eta}\varepsilon_{ijk}\delta v_jB_{0k}. \tag{3.5}$$

方程(3.5)给出了涨落磁场和涨落速度场之间的联系．

方程(3.4)的解可以一般地表示为：

$$\delta\boldsymbol{A}=-\frac{1}{\eta}\int\mathbf{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})\cdot[\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})]d\boldsymbol{\xi}, \tag{3.6}$$

张量 $\mathbf{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})$ 是对应于方程(3.4)的格林函数．在某种各向同性的近似下，(3.6)可简化为：

$$\delta\boldsymbol{A}=-\frac{1}{\eta}\int G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})[\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})]d\boldsymbol{\xi}. \tag{3.7}$$

这样，涨落磁场就简化为：

$$\delta\boldsymbol{B}=-\frac{1}{\eta}\int\nabla_rG(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})\times[\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})]d\boldsymbol{\xi}. \tag{3.8}$$

利用上述关系，方程(2.10)中的相关项可表示为：

$$\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle_i=\frac{1}{\eta^2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jkl}\int_\xi\int_{\xi'}B_{0l}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})}{\partial x_j\partial x_m}\Big[\langle\delta v_n(\boldsymbol{\xi})\delta v_k(\boldsymbol{\xi}')\rangle$$

$$\cdot\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi}')}{\partial\boldsymbol{r}}\boldsymbol{B}_0'(\boldsymbol{\xi}')-B_{0n}(\boldsymbol{\xi}')\sum_{q=1}^{3}\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi}')}{\partial x_q}\langle\delta v_q(\boldsymbol{\xi}')\delta v_k(\boldsymbol{\xi})\rangle\Big]d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\xi}'. \tag{3.9}$$

方程(3.9)含有速度关联函数 $\langle\delta v_i\delta v_j\rangle$．具体给出这些关联项，就可以计算涨落的洛伦茨力的平均值．一般地，(3.9)式可形式地表示为：

$$\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle_i=L_{ijk}B_{0j}B_{0k}, \tag{3.10}$$

其中 L_{ijk} 为积分-微分算符．这表明，关联项(3.10)是平均磁场的二阶矩的函数，它将影响大尺度的磁场位形．

在直角坐标系中，无限静止空间中的格林函数为：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}|}=\frac{1}{[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2]^{1/2}}, \tag{3.11}$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，并且取

$$\boldsymbol{v}_0=0. \tag{3.12}$$

应该指出，将格林函数表示为(3.11)式是有条件的[6]．如果将(3.11)式代入(3.9)式，则

$$\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle_i=\frac{1}{\eta^2}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ikl}\iint B_{0l}(\boldsymbol{\xi})\left[\frac{3(x_m-\xi_m)(x_j-\xi_j)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}|^5}-\frac{\delta_{mj}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\xi}|^3}\right]$$

$$\times \sum_{q=1}^{3}\left\{ \frac{x_q - \xi'_q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}'|^3} [B_{0n}(\boldsymbol{\xi}')\langle \delta v_q(\boldsymbol{\xi}') \delta v_k(\boldsymbol{\xi})\rangle - B_{0q}(\boldsymbol{\xi}')\langle \delta v_k(\boldsymbol{\xi}) \delta v_n(\boldsymbol{\xi}')\rangle] \right\} d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\xi}'. \tag{3.13}$$

若典型的关联长度非常短,我们可记

$$\langle \delta v_i(\boldsymbol{\xi}) \delta v_j(\boldsymbol{\xi}')\rangle = u_{ij}(\boldsymbol{\xi}) l_0^3 \delta(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|). \tag{3.14}$$

这时,(3.13)式化为:

$$\langle (\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \delta \boldsymbol{B}\rangle_i = \frac{l_0^3}{\eta^2} \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jkl} \int_\xi \frac{3(x_m - \xi_m)(x_j - \xi_j) - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi})^2 \delta_{mj}}{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi})^8} \cdot \left[B_{0l}(\boldsymbol{\xi}) B_{0n}(\boldsymbol{\xi}) \sum_{q=1}^{3} (x_q - \xi_q) u_{qk}(\boldsymbol{\xi}) - u_{kn}(\boldsymbol{\xi}) \sum_{q=1}^{3} (x_q - \xi_q) B_{0q}(\boldsymbol{\xi}) B_{0l}(\boldsymbol{\xi}) \right] d\xi. \tag{3.15}$$

因此,平均的静力学平衡方程应为:

$$\frac{1}{4\pi} [(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B}_0 - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{B}_0] = \nabla p_0 + \rho_0 \boldsymbol{g}, \tag{3.16}$$

或者写成分量的形式为:

$$\frac{1}{4\pi} \left[\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial B_{0m}}{\partial x_l} B_{0k} - L_{ijk} B_{0j} B_{0k} \right] = \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \rho_0 g \delta_{3i}, \tag{3.17}$$

其中取 x_3 为重力方向. 如果压力梯度和重力项小得可忽略不计. 就得到平均无力场方程

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial B_{0m}}{\partial x_l} B_{0k} = L_{ijk} B_{0j} B_{0k}. \tag{3.18}$$

方程(3.18)在形式上与作者[6]的结果一致. 事实上,无力场时的格林函数比这里讨论的简单情况要复杂得多.

再讨论涨落的动量方程(2.15). 原则上讲,(2.15)可给出 $\delta \boldsymbol{B}$ 的解,这个解应该与结果(3.8)一致,否则问题将不自洽. 利用关系式(3.2)和(3.3)式. 方程(2.15)可以写为:

$$(\Delta \delta \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B}_0 + (\nabla \times \delta \boldsymbol{A}) \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_0) - \boldsymbol{F} + \frac{1}{\eta} \nabla \chi \times \boldsymbol{B}_0 = -4\pi(\nabla \delta p + \delta \rho \boldsymbol{g}), \tag{3.19}$$

其中的涨落压力梯度可写为:

$$\nabla \delta p = a_0^2 \nabla \delta \rho, \tag{3.20}$$

而 $a_0 = (\partial p_0 / \partial \rho_0)^{1/2}$ 为局部声速. 另外一方面,涨落的连续方程(2.14)给出涨落密度 $\delta\rho$ 和涨落速度 $\delta \boldsymbol{v}$ 之间的关系

$$\delta \rho = \int G_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} [\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi})] d\boldsymbol{\xi} \tag{3.21}$$

将(3.6),(3.20)和(3.21)式代入涨落的动量方程(3.19),就得到关联函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi})$ 与 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ 之间的一个条件. 像通常湍流理论中一样,矩项需要做截断处理,自洽条件就给出截断高价矩的一个条件.

再考虑连续方程(2.9). 根据湍流近似(2.25)式,我们有

$$O(|\langle \delta \rho \delta \boldsymbol{v}\rangle|) \ll O\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right). \tag{3.22}$$

因此，方程(2.9)化为：

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}_0) = 0. \tag{3.23}$$

这与通常的连续方程一致.

最后，讨论平均的感应方程(2.12). 这个方程中的关联函数 $\boldsymbol{E} = \langle \delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B} \rangle$ 在发电机理论中已广为研究(参见文献[7]). 利用方程(3.8). 我们有

$$\delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\eta} \int \delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \{\nabla_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) \times [\delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}) \times \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})]\} d\boldsymbol{\xi}. \tag{3.24}$$

因此，关联函数 $\boldsymbol{E}$ 可得到为：

$$E_i = \langle \delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B} \rangle_i = -\frac{1}{\eta} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mnp} \int \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_l} B_{0p}(\boldsymbol{\xi}) \langle \delta v_j(\boldsymbol{r}) \delta v_n(\boldsymbol{\xi}) \rangle d\xi. \tag{3.25}$$

若采用近似(3.14)式，则上式化为：

$$E_i = -\frac{l_0^2}{\eta} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mnp} u_{ij}(\boldsymbol{r}) B_{0p}(\boldsymbol{r}) \left. \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_l} \right|_{\xi = r}. \tag{3.26}$$

与发电机问题类似. 我们可记

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{B}_0), \tag{3.27}$$

则平均的磁感应方程为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{B}_0) + \nabla \times (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}_0) + \eta \Delta \boldsymbol{B}_0 \tag{3.28}$$

对于静力学平衡问题，(3.23)式已自动满足，而(3.28)式退化为：

$$\nabla \times (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{B}_0 - \eta \nabla \times \boldsymbol{B}_0) = 0. \tag{3.29}$$

或者，又可将上式表示为：

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{B}_0 - \eta \nabla \times \boldsymbol{B}_0 = \nabla \chi_1(\boldsymbol{r}). \tag{3.30}$$

其中 $\chi_1(\boldsymbol{r})$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的任意函数. 而静力学平衡问题就归结为求解方程(2.11)，(2.13)，(3.16)和(3.30).

四、随机波动近似

在随机波动近似下，磁感应方程简化为(2.24)式. 为了简单. 考虑无限介质. 如果无穷远处的速度. 磁场以及热力学参数皆趋于零，则(2.24)式的解可写为：

$$\delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \iint \mathbf{G}_*(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) \cdot \nabla \times [\delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \times \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi}, \tau)] d\boldsymbol{\xi} d\tau, \tag{4.1}$$

其中 $\mathbf{G}_*(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)$ 是感应方程(2.24)的格林函数. 如果介质是有限的，则(2.24)的解式还应包含相应的边值项[6]. 对于某些边值分布，张量的格林函数可以退化为标量的格林函数，解(4.1)式可写为：

$$\delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \iint G_*(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) \nabla \times [\delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \times \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi}, \tau)] d\boldsymbol{\xi} d\tau, \tag{4.2}$$

或者写成分量的形式为.

$$\delta B_i(\boldsymbol{r}, t) = \iint G_*(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_l} [\varepsilon_{klm} \delta v_l(\boldsymbol{\xi}, \tau) B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)] d\boldsymbol{\xi} d\tau. \tag{4.3}$$

利用分部积分关系，上式可记为:

$$\delta \boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{r}, t) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\iint \frac{\partial}{\partial \xi_j}[G_*(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)]\delta v_l(\boldsymbol{\xi}, \tau)B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau, \tag{4.4}$$

或者一般地表示为:

$$\delta B_i(\boldsymbol{r}, t) = \iint A_{ilm}\delta v_l(\boldsymbol{\xi}, \tau)B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau, \tag{4.5}$$

其中我们定义

$$A_{ilm}(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial \xi_j}G_*(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau). \tag{4.6}$$

由(4.5)式，我们可以计算关联函数．例如，涨落的电流为:

$$(\nabla \times \delta \boldsymbol{B})_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\delta B_k = \varepsilon_{ijk}\iint \frac{\partial A_{klm}}{\partial x_j}\delta v_l(\boldsymbol{\xi}, \tau)B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau, \tag{4.7}$$

涨落的洛伦茨力为:

$$[(\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \delta \boldsymbol{B}]_a = \left[\varepsilon_{abc}\varepsilon_{bjk}\iint \frac{\partial A_{klm}}{\partial x_j}\delta v_l(\boldsymbol{\xi}, \tau)B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau\right] \cdot \left[\iint A_{ciq}\delta v_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)B_{0q}(\boldsymbol{\xi}, \tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau\right]. \tag{4.8}$$

因此，涨落的洛伦茨力的平均值为:

$$\langle(\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \delta \boldsymbol{B}\rangle_a = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{bjk}\iint d\boldsymbol{\xi}d\tau\iint d\boldsymbol{\xi}'d\tau' \cdot \left[\frac{\partial A_{klm}(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)}{\partial x_j}A_{ciq}(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{\xi}', \tau')R_{li}(\boldsymbol{\xi}, \tau; \boldsymbol{\xi}', \tau')B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)B_{0q}(\boldsymbol{\xi}', \tau')\right], \tag{4.9}$$

其中我们定义涨落速度的关联函数为:

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \tau; \boldsymbol{\xi}', \tau') = \langle\delta v_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)\delta v_j(\boldsymbol{\xi}', \tau')\rangle. \tag{4.10}$$

可以引入一个积分-微分算符 $\mathbf{L}_*$，将(4.9)式形式地表示为:

$$\langle(\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \delta \boldsymbol{B}\rangle = \mathbf{L}_* \cdot (\boldsymbol{BB}), \tag{4.11}$$

其分量形式则为:

$$\langle(\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \delta \boldsymbol{B}\rangle_i = L_{*ijk}B_{0j}B_{0k}. \tag{4.12}$$

表达式(4.12)与表达式(3.10)在形式上是相似的，当然，算符 L_{*ijk} 不同于算符 L_{ijk}．将表达式(4.12)代入方程(2.10)，我们得到

$$\frac{1}{4\pi}[(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \boldsymbol{B}_0 - \mathbf{L}_* \cdot (\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_0)] = \nabla p_0 + \rho_0\boldsymbol{g}. \tag{4.13}$$

或者，其分量形式为:

$$\frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\frac{\partial B_{0m}}{\partial x_l}B_{0k} - L_{*ijk}B_{0j}B_{0k}\right] = \frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \rho_0 g\delta_{3i}, \tag{4.14}$$

其中重力方向取为沿 $\boldsymbol{e}_3$ 的方向．

类似地，经过一些运算，涨落电场可表示为:

$$\langle\delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B}\rangle_i = \varepsilon_{ijk}\iint A_{klm}R_{jl}B_{0m}(\boldsymbol{\xi}, \tau)d\boldsymbol{\xi}d\tau. \tag{4.15}$$

上式可以形式地表示为:

$$\langle\delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B}\rangle = \mathbf{M}_* \cdot \boldsymbol{B}_0, \tag{4.16}$$

或者，其分量形式为：

$$\langle \delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B} \rangle_i = M_{*ij} B_{0j}. \tag{4.17}$$

这个结果与(3.27)式类似．这样，平均的感应方程则可表示为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{M}_* \cdot \boldsymbol{B}_0) + \nabla \times (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}_0) + \eta \Delta \boldsymbol{B}_0. \tag{4.18}$$

对于静力学问题，(4 18)式要求

$$\nabla \times (\mathbf{M}_* \cdot \boldsymbol{B}_0) + \eta \Delta \boldsymbol{B}_0 = 0. \tag{4.19}$$

或者

$$\mathbf{M}_* \cdot \boldsymbol{B}_0 - \eta \nabla \times \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{\chi}_2(\boldsymbol{r}, t), \tag{4.20}$$

其中 $\boldsymbol{\chi}_2(\boldsymbol{r}, t)$ 为任意函数．在静力学条件下，连续方程(2.9)式要求

$$\langle \nabla \cdot (\delta \rho \delta \boldsymbol{v}) \rangle = 0. \tag{4.21}$$

这样，在随机波动近似下，磁流体静力学问题就化为求解(2.11)，(2.13)，(4.13)和(4.19)式．

类似地，我们可以讨论自洽性的条件．原则上讲，自洽性条件相当于要求关联函数$\langle \delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}', \tau') \rangle$以及$\langle \delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\xi}', \tau') \rangle$之间有一定的联系．在磁流体力学发电机问题中，关联项(3.27)和(4.17)被考虑了，但是关联项(3.13)和(4.11)式被忽略了．这种简化便于讨论和具体计算磁场的变化．当然，原则上讲，这是一种非自洽的方法．我们如果主要关心动量平衡，可通过某些物理考虑给出平均的涨落洛伦茨力与平均磁场的关系，进而讨论平均场的位形．这也是一种非自洽的途径，但它能给出某些物理上有用的启发．

应该指出，这里讨论的无限介质情况，不能应用到无力场的问题中，因为无力场不能维持于无限空间中．但是，考虑有限空间问题时，我们可以得到类似的关系和结果．

五、讨　论

我们导出了磁流体静力学的一般关系，其中计入了涨落场的影响．在这些讨论中，采用了一阶光滑近似，从而具体讨论了普通湍流与随机波动两种情况．在这种近似情况下，导出了平均的洛伦茨力 $\langle (\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \delta \boldsymbol{B} \rangle$ 以及平均的电场 $\langle \delta \boldsymbol{v} \times \delta \boldsymbol{B} \rangle$ 与平均磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 之间的关系．可以看出，在平均的动量守恒关系中，我们忽略了雷诺应力的作用．这意味着，尽管涨落磁场与涨落速度场互相耦合在一起，但动力学粘性的作用既使在小尺度 l_0 上也仍然并不重要，可以忽略不计．这样，涨落场对平均动量的影响就主要是平均的洛伦茨力的作用，如方程(3.16)和(4.13)所示．

如果把关联项当做平均场的已知函数的话，平均和涨落的动量守恒关系可用来决定平均磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 和涨落磁场 $\delta \boldsymbol{B}$，平均和涨落的磁感应方程可用来确定平均速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和涨落速度 $\delta \boldsymbol{v}$．在静力学问题中要求 $\boldsymbol{v}_0 = 0$，这似乎使整个问题变成过定的了．事实上，这里的关联项一般为张量，比如关联函数(4.10)有九个分量．这样，即使对静力学问题也不是过定的，原则上还会有多余的自由度．特别是，这里讨论的湍流既非均匀，也不各向同性．与发电机理论中对湍流的要求有些类似．在自洽的问题中，关联项的方程与流体力学湍流类似，在低阶关联项的方程中包含有高阶的关联项．因此，在求解关联项时也必须做某种截断处理．在湍流场的磁流体静力学问题中，如何表述相关项是进一步要解决的问题．一旦相关项表示为平均量的具体函数，我们就可以求解平均场的位形，并具体讨论湍流场对平均位形的影响．但是，从上述一般

讨论中可以看出，涨落场将会对平均位形有很大的影响. 特别是如果我们要将理论分析的结果去与观测比较的话，更不能忽略这种影响.

作为一种非自洽的处理方法，我们可以着重地讨论平均的动量守恒方程. 方程中的平均涨落洛伦茨力则由某种物理简化近似表示成某种平均磁场的函数. 这样，具体的平均场位形就可以求解出来，从而也就看出来涨落场对于平均场的影响. 这些问题将需要做进一步的讨论.

参 考 文 献

[1] Low, B. C., *Astrophysical J.*, **197** (1975), 251.
[2] ——————, *Solar physics*, **67** (1980), 57.
[3] Osherovich, V., *ibid.*, **69** (1982), 63.
[4] 胡文瑞, *Scientia Sinca* **24** (1981), 168.
[5] Lerche, I., *Astrophysical J.*, **162** (1970), 675.
[6] 胡文瑞, *Astrophys. Space Sci.*, **85** (1982), 351.
[7] Moffatt, H. K., *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluid*, Cambridge, England, 1976.
[8] Busse, F. H., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **10** (1978), 435.