

计算应力强度因子的奇异等参单元

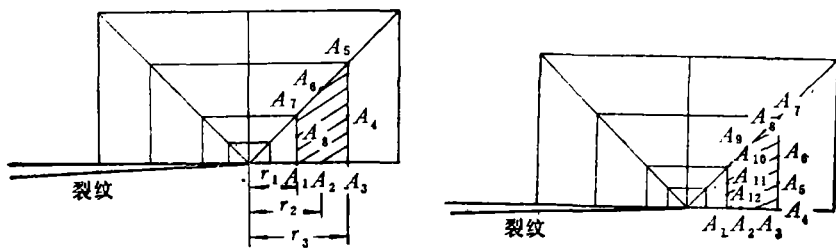
徐纪林 吴永礼

(中国科学院力学研究所)

用有限单元法计算裂纹顶端应力强度因子, 来反映顶端应力的奇异性, 导致于裂纹顶端特殊单元的应用发展很快. 当反映裂纹顶端应力奇异性的奇异元与外围普通元混合运用时, 奇异元有一最佳尺寸^[1]. 对于不同的问题, 最佳的单元尺寸也不同, 这就是说, 裂纹顶端单元的尺寸对计算结果有明显影响. 如果裂纹顶端单元太大则计算误差大; 如果顶端单元太小则不能反应裂纹顶端应力的奇异性, 所以裂纹顶端奇异元与外围普通元之间有一过渡问题.

文献〔2〕对于八节点和十二节点的放射型等参单元(如图1所示), 给出了能反映裂纹顶端应力奇异性的边中节点位置的普遍公式. 本文采用具有过渡元的等参单元, 进一步计算了中心裂纹均匀拉伸试件和对称三点弯曲试件的应力强度因子的 K_I 值, 以及偏裂纹三点弯曲试件和四点弯曲试件的 K_I 、 K_{II} 值; 并与无过渡元的计算结果进行了比较和讨论.

1. 应力强度因子的求法



(a) 八节点单元

(b) 十二节点单元

图 1

裂纹体弹性力学平面问题的位移解具有以下形式:

本文于1981年3月27日收到。

$$\begin{aligned}
 u(r, \theta) &= \frac{1}{2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left\{ A_n^{(1)} \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right. \\
 &\quad \left. - A_n^{(2)} \left[\left(\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n\theta}{2} - \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right\} \quad (1) \\
 v(r, \theta) &= \frac{1}{2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left\{ A_n^{(1)} \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2} \sin \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right. \\
 &\quad \left. + A_n^{(2)} \left[\left(\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n\theta}{2} + \frac{n}{2} \cos \left(\frac{n}{2} - 2 \right) \theta \right] \right\}
 \end{aligned}$$

其中 $u(r, \theta)$ 、 $v(r, \theta)$ 分别为 x 、 y 方向的位移，坐标系如图 2 所示。

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{平面应变} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{平面应力} \end{cases}$$

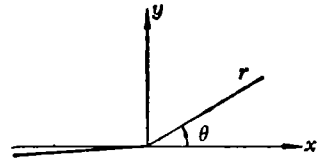


图 2

$$A_1^{(1)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}, \quad A_1^{(2)} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}}$$

对于裂纹顶端附近的位移场，可以忽略 r 的高次项，这里只取 $n < 4$ 的项，利用裂纹上表面 ($\theta = \pi$) 及下表面 ($\theta = -\pi$) 上的位移可推导出

$$\frac{2\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v(r, \pi) - v(r, -\pi)}{\sqrt{r}} + \sqrt{2\pi} A_3^{(1)} r = K_I \quad (2)$$

$$\frac{2\mu}{(\kappa + 1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{u(r, \pi) - u(r, -\pi)}{\sqrt{r}} - \sqrt{2\pi} A_3^{(2)} r = K_{II} \quad (3)$$

把式 (2)、(3) 的第一项分别记作 y_I 、 y_{II} ，则式 (2)、(3) 分别是以 y_I 、 y_{II} 作纵坐标， r 作横坐标的直线方程；直线对纵坐标的截距即分别为所求的 I 型和 II 型的应力强度因子 K_I 和 K_{II} 。因此用有限单元法求出的裂纹面上下的位移来作图， $y_I \sim r$ 和 $y_{II} \sim r$ 应呈线性关系。

2. 裂纹顶端特殊等参单元及过渡单元边中节点位置的公式 普通等参单元形函数是 ξ 、 η 的多项式，一般所给出的位移模式不包含 \sqrt{r} 项，所以不能反映裂纹顶端应力的 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 奇异性。对于图 1 (a) 阴影部份所示的放射型八节点等参单元，对等参数坐标 $\eta = -1$ 的射线，可以推导出，当

$$r_2 = \frac{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3})^2}{4} \quad (4)$$

时，等参数坐标 $\xi = -\frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3}}{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}} + \frac{2}{\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1}} \sqrt{r}$ ，位移模式包含 \sqrt{r} 项，由此得到的应力具有 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 奇异性；同时，对于裂纹顶端单元 $r_1 = 0$ ，由式 (4) 可以得到 $r_2 = \frac{r_3}{4}$ ，这与 $\frac{1}{4}$ 边中点的顶端奇异等参元^[3] 结果一致。对于离顶端很远的单元， r_1 很大，由式

(4) 可证明 $r_2 - r_1 \approx \frac{r_3 - r_1}{2}$ ，即给出普通八节点等参单元边中节点取 $\frac{1}{2}$ 边长的一般结

果. 对于 $\eta = +1$ 的射线, r_7 , r_6 和 r_5 有类似于式(4)中 r_1 , r_2 和 r_3 的关系.

同样, 对于十二节点等参数单元, 可以推导出, 当射线上边中节点 A_2 , A_3 位置满足以下关系

$$r_2 = \frac{(\sqrt{r_4} + 2\sqrt{r_1})^2}{9}, \quad r_3 = \frac{(\sqrt{r_1} + 2\sqrt{r_4})^2}{9} \quad (5)$$

时, $\xi = -\frac{\sqrt{r_4} + \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_4} - \sqrt{r_1}} + \frac{2}{\sqrt{r_4} - \sqrt{r_1}} \sqrt{r}$, 位移模式包括 \sqrt{r} , $r\sqrt{r}$ 项, 由它得到的应力具有 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 奇异性. 对于裂纹顶端的单元, $r_1 = 0$, 由式(5)可以得到 $r_2 = \frac{r_4}{9}$, $r_3 = \frac{4}{9}r_4$, 与文献[2,4]十二节点等参奇异元结果一致. 对于离顶端较远的单元, r_1 很大, 由式(5)可以证明 $r_2 - r_1 \approx \frac{r_4 - r_1}{3}$, $r_3 - r_1 \approx \frac{2(r_4 - r_1)}{3}$ 它给出普通十二节点等参单元的结果.

综上所述, 由式(4), (5)决定的射线边中点位置的特殊等参单元, 位移模式在较大范围内包括 \sqrt{r} 项, 在裂纹顶端, 它能反映应力的奇异性, 而在远处它又退化为普通的等参单元, 因此裂纹顶端附近单元的尺寸对计算结果不会有显著的影响.

3. 算例分析 本文采用裂纹顶端收缩等参单元(对八节点单元, 在顶端由 $\xi = -1$ 三个节点合为一点, 对于十二节点单元, 在顶端由 $\xi = -1$ 四个节点合为一点), 分别用有过渡元与无过渡元两种方法, 计算了中心裂纹均匀拉伸试件和对称三点弯曲试件(图2)的 K_I 值, 以及偏裂纹三点弯曲试件(图4、图5)和四点弯曲试件(图6)的 K_I 、 K_{II} 值.

表 I 给出采用式(4) 决定过渡元边中点位置的八节点等参单元的中心裂纹均匀拉伸

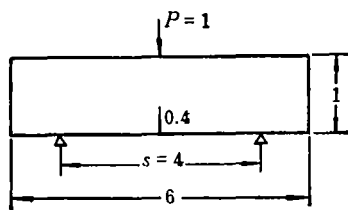


图 3

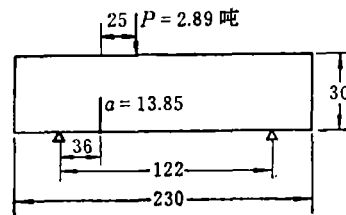


图 4 (长度单位 mm, 厚度 $B = 20\text{mm}$)

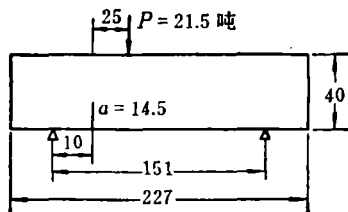


图 5

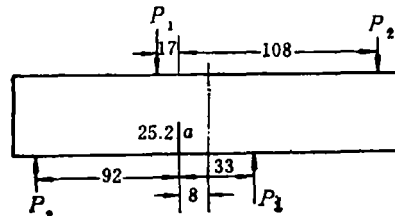


图 6 ($P = 30$ 吨)

试件的计算结果, 与文献[5]的结果符合很好. 从图7看虽然算例1)、2)取的单元、节点数不多, 而计算点外推线性仍很好.

表 I

算 例	单 元 数	节 点 总 数	L/W	a/W	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}^{[5]}$
(1)	48	171	2.0	0.6	1.292	1.303
(2)	48	171	2.0	0.4	1.102	1.109
(3)	50	187	3.0	0.4	1.105	1.109
(4)	34	123	1.0	0.6	1.475	1.481
(5)	34	123	1.0	0.4	1.222	1.216

图3所示对称三点弯曲试件, 由于试件的对称性, 只需考虑图形的一半, 共取50个单元, 187个节点. 图8给出了无量纲化的计算结果, 并与文献[6]边界配置法的计算结果($K_I \frac{BW^{3/2}}{M} = 7.71$)进行比较, 两者符合很好.

图4所示偏裂纹三点弯曲试件, 共取72个单元, 259个节点. 图9给出了计算结果, 与文献[6]的计算结果($K_I = 159.56$, $K_{II} = 21.27$)符合很好.

图10给出采用有过渡元的十二节点等参单元计算图5所示偏裂纹三点弯曲试件的结果, 虽然所取单元数不多(共取32个单元, 200个节点), 计算点外推线性关系仍很好.

图6所示四点弯曲试件, 计算中取52个八节点等参单元, 193个节点, 由图11给出计算结果. 但最后这两个计算均无其他计算值作比较.

由图8、9、11可以看出, 采用过渡元时, $y_I \sim r$, $y_{II} \sim r$ 在裂纹顶端附近呈较好的线性关系, 而无过渡元时, 则 $y_I \sim r$ 和 $y_{II} \sim r$ 线性关系在裂纹顶端附近不太好, 计算值波动较大.

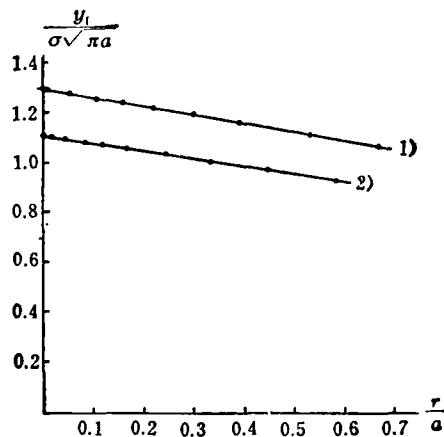


图 7

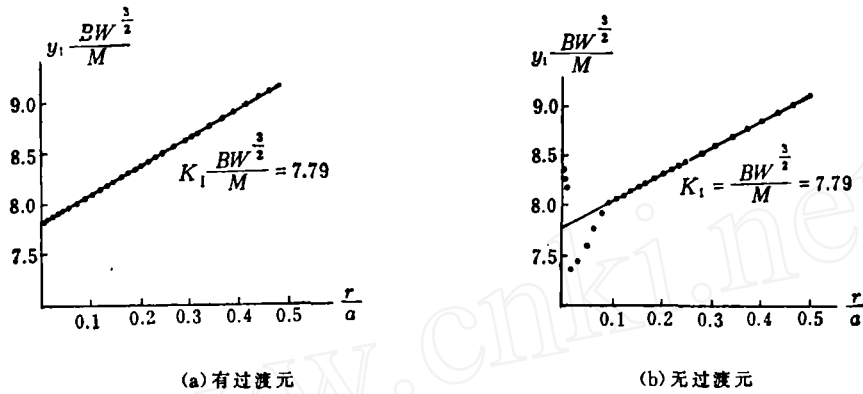


图 8

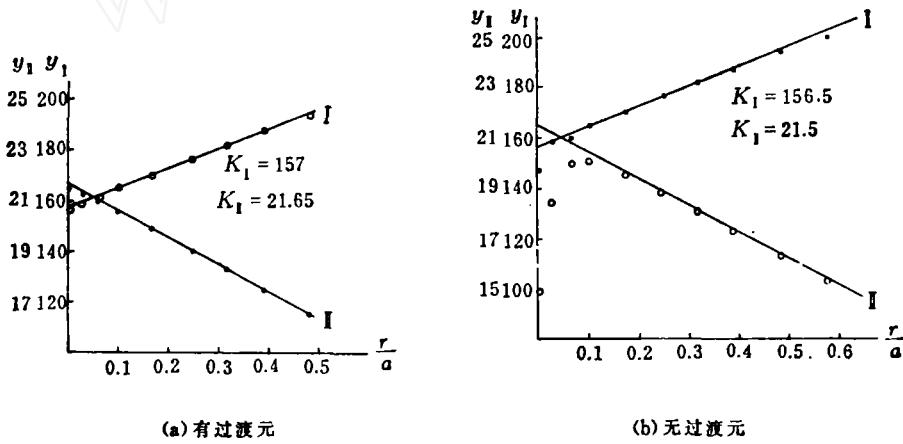


图 9

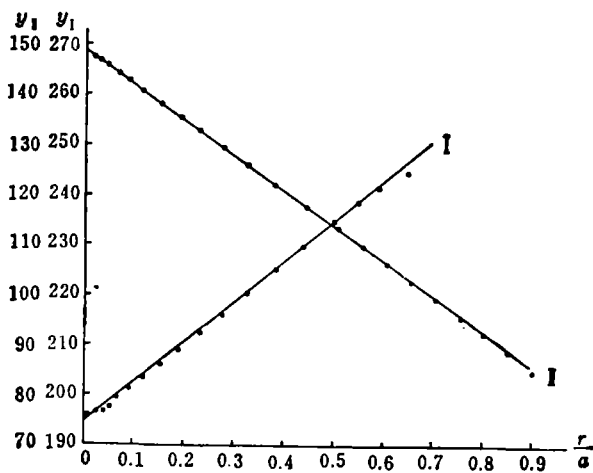


图 10 十二节点单元

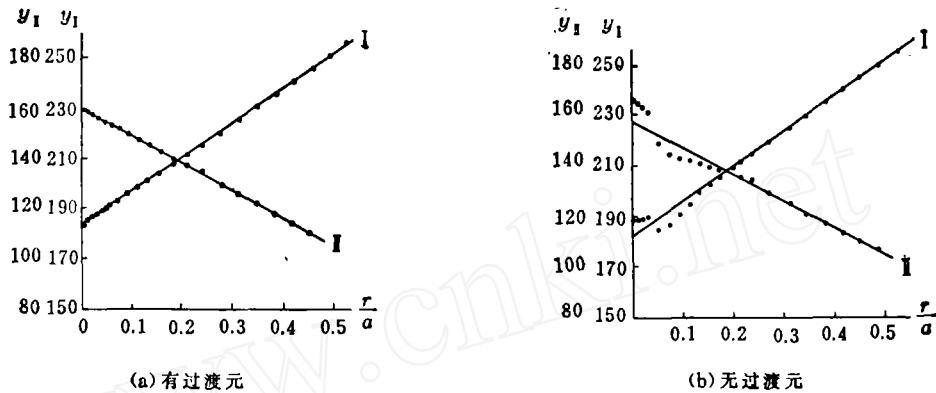


图 11

参 考 文 献

- [1] Atluri S. N., Kobayashi A. S. and Nakagaki M., AIAA/ASME/SAE 15th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference.
- [2] 王克仁, 徐纪林, 高桦, 《Fracture》ICF 4(1977), 123—134.
- [3] Roshdy S. Barsoum, Int. J. for Num. Math. in Engin. 10 (1976), 25—37.
- [4] Pu S. L. Hussain M. A. and Loressen W. E., Int. J. for Num. Math. in Engin. 12 (1978), 1727—1742.
- [5] Isida M., Int. J. of Fracture Mechanics, 7, 3, 9(1971), 301—316.
- [6] 中国科学院力学所12室断裂组, K_I , K_{II} 复合型三点弯曲试件应力强度因子的计算, 力学, 3(1976).

**THE SINGULAR ISOPARAMETRIC ELEMENTS FOR
THE CALCULATION OF ELASTIC STRESS
INTENSITY FACTORS**

Xu Ji-lin and Wu Yong-li

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)