

水平环状日珥的静力学平衡

王正志 林元章

(中国科学院北京天文台)

胡文瑞

(中国科学院力学研究所, 北京)

摘 要

北京天文台曾于 1980 年观测到了罕见的环平面与太阳表面平行的完全闭合的环状日珥, 其特征寿命约 1—2 天. 本文讨论了这种水平等离子体环在磁力、重力和压力同时作用下的静力学平衡问题. 在轴对称矩形截面假定下建立方程组, 采用闭合磁场边值, 得到零阶磁场(无力场)和密度(压力)解, 进一步求得了零阶磁场和密度以及一阶磁场的一个本征解, 从而给出水平闭合环状日珥中的一种可能的磁场和密度分布. 本文得到的环状日珥的闭合式磁场结构与外界日冕磁场的力线不连通, 有助于说明日珥与日冕之间的巨大温度差别.

一、前 言

太阳上经常可以观测到环平面垂直于太阳表面的环状日珥(通常认为这种日珥是垂直于太阳表面的磁流环的表征), 然而环平面与太阳表面平行的闭合环状日珥则相当罕见. 北京天文台曾于 1980 年观测到三个环平面与太阳表面平行的完全闭合的环状日珥, 它们的情况如表 1 和图 1 所示. 这些日珥是通过 H_{α} 谱线线心观测的. 由于曝光量不足以及日珥物质分布不均和日珥物质运动产生的 Doppler 位移等影响, 照片中日珥环的某些段落未能清晰显示. 然



图 1 水平环状日珥照片

(a) 1980 年 6 月 7 日 05^h21^mUT (b) 1980 年 8 月 21 日 08^h46^mUT (c) 1980 年 9 月 6 日 00^h24^mUT

本文 1981 年 11 月 10 日收到, 1982 年 8 月 15 日收到修改稿.

而观测表明,这三个日珥均以这样的环状形式稳定地存在几十小时以上,可以设想这些环状物质有过连结,亦即闭合.实际上,其他作者也曾观测到此类水平闭合的环状日珥^[1].这种现象在太阳上是确实存在的,这类日珥模型的讨论有其观测根据和实际意义.由于这些日珥可以持续 1—2 天,远大于观测时间分辨率,因而可以认为它们基本上处于静力学平衡态.

表 1 三个水平环状日珥的情况

日期	北台黑子群号	日面坐标		环半径 (10 ⁹ 厘米)	环宽 (10 ⁹ 厘米)	闭合环持续时间 (日)
		$L^{(0)}$	$\varphi^{(0)}$			
6 月 7 日	No. 77	47	-11	5.6	0.5	1
8 月 20—21 日	No. 181	164	+8	5.2	0.5	2
9 月 5—6 日	No. 220	249	+17	4.8	0.5	2

许多作者对于地面受控聚变装置中磁场约束环形等离子体的静力学平衡问题,曾做过广泛的研究^[2-4],这些研究中通常考虑的是忽略重力场时的高温高密度(与周围环境相较)等离子体环在磁力和压力作用下的力平衡问题.但是太阳上的环形等离子体(日珥)与托卡马克中的问题在如下两点上有所不同:

(i) 虽然日珥的密度也比周围环境大,然而温度却远小于其周围的日冕温度;

(ii) 在日珥的力平衡中,除了磁力和压力之外,还必须考虑重力的作用.例如,若取日珥温度 $T \sim 7000\text{K}$,磁场 $B \sim 20$ 高斯,粒子数密度 $n \sim 10^{11}/\text{厘米}^3$,典型长度 $H \sim 10^9$ 厘米,则磁力、重力和压力的比率为 $\frac{B^2}{4\pi} : \rho g H : \frac{\rho K T}{m} \approx 320:50:1$.

本文主要探讨太阳条件下的日珥等离子体环的静力学平衡问题.我们将从基本方程组出发,最终求得这种水平环状日珥中的磁场、密度和压力的可能的分布.

二、水平环状日珥静力学平衡的基本方程

假定宁静水平环状日珥系统内部处于热平衡稳定状态,则静力学平衡方程为:

$$\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$p = \rho K T / m, \quad (2.3)$$

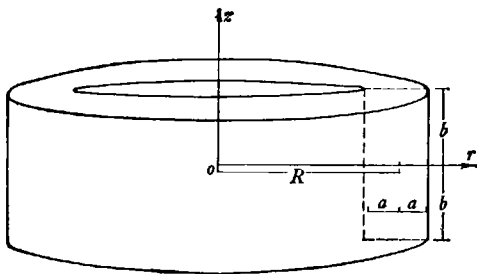


图 2 水平环状日珥的简化模型

其中 \mathbf{B} 为日珥内磁场, ρ 为密度, p 为压力, m 为日珥物质的粒子质量, \mathbf{g} 为太阳表面重力加速度, T 为温度, K 为玻尔兹曼常数.

为简单计,把水平环状日珥近似为图 2 所示的具有矩形截面的轴对称瘦水平环模型.选取柱坐标系如图 2, z 轴与环平面垂直.图 2 中 R 为环半径, a 与 b 分别为截面的宽与高.轴对称即有各量均为 (r, z) 的函数,瘦环即有

$$\frac{R}{a} \gg 1,$$

在轴对称的情况下,柱坐标系中的磁场可以用两个标量函数 ψ 和 G 表为:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{1}{r} G, -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

其中 ψ 为磁面函数^[5]. 引入无量纲参数

$$\begin{cases} \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad G^* = \frac{G}{G_0}, \quad \psi^* = \frac{\psi}{\psi_0}, \\ r^* = \frac{r}{a}, \quad R^* = \frac{R}{a}, \quad z^* = \frac{z}{b}, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{4\pi\rho_0KT}{mB_0^2}, \quad (2.6)$$

$$h_0 = \frac{KT}{mgb}, \quad (2.7)$$

其中下标“0”表示相应物理量的典型值,“*”表示无量纲量.

将(2.4)式代入(2.1)式,将(2.1)–(2.3)式无量纲化,并略去无量纲量的上标“*”,可得无量纲方程组:

$$\frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left[-\mathcal{L}(\psi) - G \frac{dG}{d\psi} \right] = \beta \frac{\partial \rho}{\partial r}, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left[-\mathcal{L}(\psi) - G \frac{dG}{d\psi} \right] = \beta \left[\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\rho}{h_0} \right], \quad (2.10)$$

其中
$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.11)$$

(2.8)式表明 G 是 ψ 的函数,即 $G = G(\psi)$.

由瘦环假定应有

$$R \gg 1, \quad r \gg 1. \quad (2.12)$$

而水平环状日珥物质的空间范围为:

$$|r - R| \leq 1, \quad |z| \leq 1. \quad (2.13)$$

这里考虑 $\beta \ll 1$

的情况. 将(2.9),(2.10)式中各量对 β 作小参数展开,得零阶方程为:

$$\mathcal{L}(\psi^{(0)}) + \left(G \frac{dG}{d\psi} \right)^{(0)} = 0; \quad (2.14)$$

一阶方程为:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r} \left[-\mathcal{L}(\psi^{(1)}) - \left(G \frac{dG}{d\psi} \right)^{(1)} \right] = \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial r}, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} \left[-\mathcal{L}(\psi^{(1)}) - \left(G \frac{dG}{d\psi} \right)^{(1)} \right] = \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} + \frac{\rho^{(0)}}{h_0}. \quad (2.16)$$

(2.14)–(2.16)式即为低 β 条件下的水平环状日珥静力学平衡的基本方程.

三、水平环状日珥内的基态解

(2.14)式为轴对称无力磁场的方程. 考虑常 α 线性无力场问题, 则有^[5]

$$G^{(0)} = \alpha\psi^{(0)}, \quad (3.1)$$

$$G^{(0)} \frac{dG^{(0)}}{d\psi} = \alpha^2\psi^{(0)}, \quad \alpha = \text{常数}. \quad (3.2)$$

将(3.1),(3.2)式代入(2.14)式得线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi^{(0)}}{\partial r} + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial^2\psi^{(0)}}{\partial z^2} + \alpha^2\psi^{(0)} = 0, \quad (3.3)$$

设在水平日珥环的外表面处的边界条件为:

$$\psi^{(0)}(r, \pm 1) = 0, \quad (3.4)$$

$$\psi^{(0)}(R \pm 1, z) = 0. \quad (3.5)$$

关于边界条件取法的讨论见本文最后一节. 用分离变量法解(3.3)式, 令

$$\psi^{(0)}(r, z) = \sum_n r Q_n(r) Z_n(z), \quad (3.6)$$

则可得到

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} \mp \left(\frac{b}{a} \lambda_n\right)^2 Z_n = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2 Q_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ_n}{dr} + \left[(\alpha^2 \pm \lambda_n^2) - \frac{1}{r^2}\right] Q_n = 0. \quad (3.8)$$

边界条件(3.4)式排除(3.7),(3.8)式中取上边一个符号的可能. 故有

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \left(\frac{b}{a} \lambda_n\right)^2 Z_n = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2 Q_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ_n}{dr} + \left[(\alpha^2 - \lambda_n^2) - \frac{1}{r^2}\right] Q_n = 0. \quad (3.10)$$

解(3.9)式, 由边界条件(3.4)式可得

$$Z_n = A_n \cos\left(\frac{b}{a} \lambda_n z\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.11)$$

其中
$$\frac{b}{a} \lambda_n = \frac{\pi}{2} (2n - 1) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \quad (3.12)$$

$$\lambda_n = \frac{a}{b} \left(\frac{2n - 1}{2}\right) \pi = \frac{a}{b} \frac{\pi}{2}, \frac{a}{b} \frac{3\pi}{2}, \frac{a}{b} \frac{5\pi}{2}, \dots \quad (3.13)$$

(3.10)式是以 $\sqrt{\alpha^2 - \lambda_n^2}r$ 为宗量的一阶 Bessel 方程. 由于虚宗量 Bessel 函数不能满足边界条件(3.5)式, 故必须有

$$\alpha^2 > \lambda_n^2. \quad (3.14)$$

对 $Q_n(r)$ 作有限 Hankel 变换

$$Q_n^*(\beta_m) = \mathbf{H}[Q_n(r)] = \int_{R-1}^{R+1} r Q_n(r) T_1(\beta_m, r) dr. \quad (3.15)$$

则有

$$Q_n(r) = \sum_m B_m T_1(\beta_m, r), \quad (3.16)$$

其中本征函数

$$T_1(\beta_m, r) = G_1[\beta_m(R+1)]J_1(\beta_m r) - J_1[\beta_m(R+1)]G_1(\beta_m r), \quad (3.17)$$

而 $J_1(x)$ 为第一类 Bessel 函数, $G_1(x)$ 为第二类 Bessel 函数

$$G_1(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}(\pi) [J_{-1}(x) - e^{-i\pi} J_1(x)], \quad (3.18)$$

β_m 是超越方程

$$T_1(\beta_m, R-1) = 0 \quad (3.19)$$

的一个正根.

由瘦环条件 (2.12) 式, 并利用 J_1 、 G_1 的渐近表达式可得

$$T_1(\beta_m, r) \approx \frac{2}{\pi\beta_m} \sqrt{\frac{1}{(R+1)r}} \sin[\beta_m(R+1-r)]. \quad (3.20)$$

将(3.20)式代入(3.19)式可得

$$\sin(2\beta_m) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.21)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots. \quad (3.22)$$

对(3.8)式做 Hankel 变换, 得

$$-\beta_m^2 Q_n^*(\beta_m) = -(\alpha^2 - \lambda_n^2) Q_n^*(\beta_m).$$

所以

$$\beta_m^2 = \alpha^2 - \lambda_n^2. \quad (3.23)$$

由于考虑的是 $\alpha = \text{常数}$ 的情况, 一般讲, 给定一对 β_m, λ_n , (3.23) 式就限定了相应的常数无力因子 α_{mn} . 所以当 α 选定后, 对于其他不满足 (3.23) 式的 $m'n'$ 脚标, (3.11) 与 (3.16) 式中相应的本征函数展开式的系数 A'_n, B'_m 均应为零. 即轴对称的日珥环的零阶常 α 磁场解只可能存在与一定 α 值对应的分离的本征态, 故对应于每一对正整数 m, n 都有一个满足 (3.18) 式的确定的 α 值, 以及一个由 (3.6), (3.11), (3.16) 和 (3.20) 式推出的相应的常 α 无力场本征解

$$\psi^{(0)}(r, z) = A'_{mn} r T_1(\beta_m r) \cos\left(\frac{b}{a} \lambda_n z\right), \quad (3.24)$$

其中 β_m, λ_n 的值分别由 (3.19) 和 (3.13) 式决定. 由此可求出基态磁场分布:

$$B_r^{(0)} = -A'_{mn} \left(\frac{b}{a} \lambda_n\right) T_1(\beta_m r) \sin\left[\frac{b}{a} \lambda_n z\right], \quad (3.25)$$

$$B_\theta^{(0)} = \alpha A'_{mn} T_1(\beta_m r) \cos\left(\frac{b}{a} \lambda_n z\right), \quad (3.26)$$

$$B_z^{(0)} = -A'_{mn} \beta_m \{G_1[\beta_m(R+1)]J_0(\beta_m r) - J_1[\beta_m(R+1)]G_0(\beta_m r)\} \cdot \cos\left(\frac{b}{a} \lambda_n z\right). \quad (3.27)$$

考虑瘦环条件 $R \gg 1, r \gg 1$ 的情况, 有基态 $\psi^{(0)}(r, z)$ 的渐近解

$$\psi^{(0)}(r, z) \approx A_{mn} \sqrt{\frac{r}{R+1}} \sin[\beta_m(R+1-r)] \cos\left(\frac{b \lambda_n}{a} z\right), \quad (3.28)$$

其中

$$A_{mn} = A'_{mn} \frac{2}{\pi \beta_m}, \quad (3.29)$$

β_m, λ_n 的值分别由(3.22)和(3.13)式决定. 由此可求出基态磁场的渐近分布:

$$B_r^{(0)} = -A_{mn} \left(\frac{b \lambda_n}{a} \right) \sqrt{\frac{1}{(R+1)r}} \sin [\beta_m(R+1-r)] \sin \left(\frac{b \lambda_n}{a} z \right), \quad (3.30)$$

$$B_\theta^{(0)} = \alpha A_{mn} \sqrt{\frac{1}{(R+1)r}} \sin [\beta_m(R+1-r)] \cos \left(\frac{b \lambda_n}{a} z \right), \quad (3.31)$$

$$B_z^{(0)} = \beta_m A_{mn} \sqrt{\frac{1}{(R+1)r}} \cos [\beta_m(R+1-r)] \cos \left(\frac{b \lambda_n}{a} z \right). \quad (3.32)$$

由(2.14)和(2.15)式得

$$\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial r} = \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r} \left(\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} + \frac{\rho^{(0)}}{h_0} \right). \quad (3.33)$$

将 $\psi^{(0)}$ 的解(3.24)式代入(3.33)式, 并分离变量解方程, 再利用 Bessel 函数的渐近展开式, 可求得基态密度分布的渐近解:

$$\rho^{(0)}(r', z) = D_2 \left\{ \sin [\beta_m(1-r')] \cos \left(\frac{b \lambda_n}{a} z \right) \right\}^{\frac{D_1 a}{b \lambda_n}} e^{-\frac{z}{h_0}}, \quad (3.34)$$

其中

$$r' = r - R. \quad (3.35)$$

因而所讨论的日珥物质区域限于 $|r'| \leq 1, |z| \leq 1$.

由(3.24)式可见, 基态磁场分布是关于 $z=0$ 平面为对称的(上下对称). 由于重力的影响不可忽略, (3.34)式中出现 $e^{-\frac{z}{h_0}}$, 密度(从而压力)的分布显然不再具有上下对称性.

四、一个本征解

$$\text{取 } m = n = 1, D_1 = \frac{b \lambda_n}{a}, \quad (4.1)$$

可得水平环状日珥静力学平衡的一个本征解.

1. 基态磁面位形

由(4.1)式及(3.22), (3.13)式得

$$\beta_m = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{b \lambda_n}{a} = \frac{\pi}{2}, \quad D_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (4.2)$$

将(4.2)与(3.35)式代入(3.28)式得

$$\psi^{(0)}(r', z) = \psi_{\max} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{R+r'}{R+1}}. \quad (4.3)$$

若取 ψ_{\max} 为 ψ 的典型值 ϕ_0 , 则无量纲化的 $\psi_{\max} = 1$.

$$\text{即 } \psi^{(0)}(r', z) = \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\frac{R+r'}{R+1}}$$

$$\approx \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.4)$$

相应的基态磁场的渐近分布为:

$$\left\{ \begin{aligned} B_r^{(0)} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(R+1)(R+r')}} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \sin \left(z \frac{\pi}{2} \right), \\ B_\theta^{(0)} &= \pm \frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(R+1)(R+r')}} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right), \\ B_z^{(0)} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(R+1)(R+r')}} \cos \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_r^{(0)} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(R+1)(R+r')}} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \sin \left(z \frac{\pi}{2} \right), \\ B_\theta^{(0)} &= \pm \frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(R+1)(R+r')}} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right), \\ B_z^{(0)} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(R+1)(R+r')}} \cos \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_r^{(0)} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(R+1)(R+r')}} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \sin \left(z \frac{\pi}{2} \right), \\ B_\theta^{(0)} &= \pm \frac{\pi}{2b} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(R+1)(R+r')}} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right), \\ B_z^{(0)} &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{(R+1)(R+r')}} \cos \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right. \quad (4.7)$$

图 3 给出由 (4.4) 式决定的基态磁面位形——等 $\psi^{(0)}$ 图。其中的七条等 $\psi^{(0)}$ 线自外向内分别对应于 $\psi^{(0)}(r', z) = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0$ 。

图 3 具有上下对称性; 又由于 (4.4) 式中略去了 $\sqrt{\frac{R+r'}{R+1}}$ 因子, 故图 3 还呈左右对称性。如果考虑 $\sqrt{\frac{R+r'}{R+1}}$ 因子, 最大值 $\psi = 1$ 的位置及整个等 ψ 线要向右 (r' 增大的方向) 移动, 不再具有以 $r = R$ 为中心的左右对称。不过由于 $R \gg 1, |r'| < 1, |\Delta r'| \leq 2$, 所以 $\Delta \sqrt{\frac{R+r'}{R+1}} \leq \frac{1}{R-1} \ll 1$, 即 $\sqrt{\frac{R+r'}{R+1}}$ 的效应可以忽略。

2. 基态密度(压力)分布

将(4.1), (4.2)及(3.35)式代入(3.34)式得

$$\rho^{(0)}(r', z) = \frac{\rho_{\max}}{\cos \left(z_0 \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{z_0}{h_0}}} \times \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{z}{h_0}}. \quad (4.8)$$

若取 ρ_{\max} 为 ρ 的典型值 ρ_0 , 则无量纲化的 $\rho_{\max} = 1$. 故有

$$\rho^{(0)}(r', z) = \frac{\exp \left(\frac{z_0}{h_0} \right)}{\cos \left(z_0 \frac{\pi}{2} \right)} \sin \left[(1-r') \frac{\pi}{2} \right] \cos \left(z \frac{\pi}{2} \right) \exp \left(-\frac{z}{h_0} \right), \quad (4.9)$$

其中 $(r', z) = (0, z_0)$ 对应密度最大值点, 而

$$z_0 = -\frac{\operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{1}{h_0 \frac{\pi}{2}} \right]}{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.10)$$

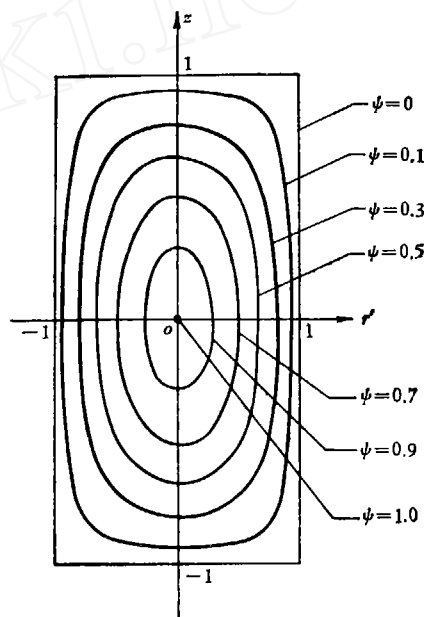


图 3 基态磁面位形

表 2

h_0	∞	1	0.2	0.1	0.02	0.01
z_0	0	-0.36	-0.81	-0.90	-0.98	-0.99
$\cos\left(z_0 \frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{z_0}{h_0}\right)$	1	1.433	17.20	1267	5.989×10^{19}	1.553×10^{41}

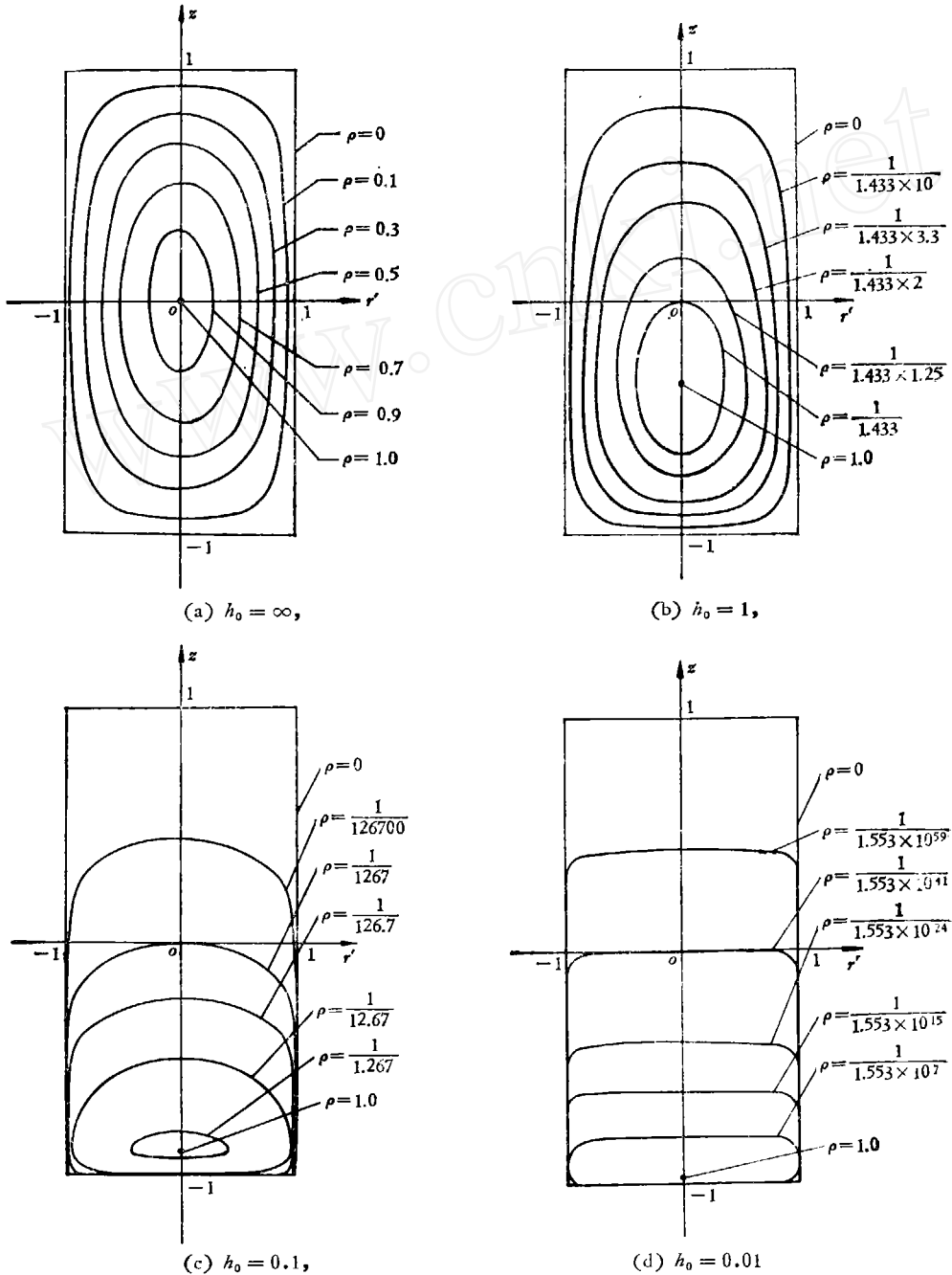


图 4 基态密度(压力)分布——等 $\rho^{(0)}$ 图

当 h_0 取不同值时, 相应的 z_0 值列于表 2. 图 4 给出由(4.6)式决定的 $h_0 = \infty, 1, 0.1, 0.01$ 时的基态等 $\rho^{(0)}$ 图.

参量 $h_0 = \frac{KT}{mgb}$ 相当于日珥环内无量纲化的密度标高, 其大小反映了压力项与重力项的

相对大小. h_0 越小, 重力效应越显著. 由于考虑重力效应, 基态密度分布也不再具有上下对称性. 由图 4 可见, h_0 越小, 基态密度分布的上下不对称性越显著, 并且密度最大值点的纵坐标 z_0 越“下沉”, 同时加大了 z_0 以下处的密度梯度.

3. 一阶磁场

考虑了重力和压力效应, 一阶磁场不再是无力场. 将(4.3)和(4.6)式代入(21.5)或(2.16)式, 则有

$$-\mathcal{L}(\phi^{(1)}) - \left(G \frac{dG}{d\phi}\right)^{(1)} = M^2 r^{3/2} \exp\left[-\frac{z}{h_0}\right], \quad (4.11)$$

其中

$$M^2 = \frac{\sqrt{R+1} \exp\left(\frac{z_0}{h_0}\right)}{\cos\left(z_0 \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (4.12)$$

考虑一阶量中 G 与 ϕ 为线性关系的简单情况, δ 为比例常数, 则有

$$(\mathcal{L} + \delta^2)\phi^{(1)} = -M^2 r^{3/2} \exp\left(-\frac{z}{h_0}\right). \quad (4.13)$$

$$\text{令 } \phi^{(1)} = \sqrt{r} p(r) \exp\left(-\frac{z}{h_0}\right). \quad (4.14)$$

将(4.14)式代入(4.13)式, 可得关于 $p(r)$ 的方程

$$\frac{d^2 p(r)}{dr^2} + \left[N^2 - \frac{3}{4r^2}\right] p(r) = -M^2 r, \quad (4.15)$$

其中

$$N = \sqrt{\frac{a^2}{b^2 h_0^2} + \delta^2}. \quad (4.16)$$

可以求出(4.15)的幂级数形式的解

$$p(Nr) = (Nr)^3 \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (Nr)^{2n}, \quad (4.17)$$

其中系数 C_{2n} 满足递推关系

$$C_{2n+2} = -\frac{C_{2n}}{(2n+5)(2n+4) - \frac{3}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.18)$$

$$C_0 = -\frac{4}{21} \frac{M^2}{N^3}. \quad (4.19)$$

为了更清楚地看出 $p(r)$ 的变化特点, 由 $r \gg 1$ 的瘦环条件, 可以求出(4.15)式的渐近解

$$p(r) = C \sin(Nr + \varphi) - \frac{M^2}{N^2} r, \quad (4.20)$$

其中常数 C 与 φ 由边界条件决定. 故

$$\psi^{(1)} = \sqrt{r} \left[C \sin(Nr + \varphi) - \frac{M^2}{N^2} r \right] \exp\left(-\frac{z}{h_0}\right), \quad (4.21)$$

此即磁面函数的一阶量.

适当规定 $\psi^{(1)}$ 的边界条件及 δ 值, 可使 $C \sin(Nr + \varphi)$ 关于 $r = R$ 为对称. 此时磁面函数一阶量的左右不对称性主要体现在 (4.21) 式中的一 $\frac{M^2}{N^2} r$ 项上. 同时, 由于 (4.21) 式中出现 $\exp\left(-\frac{z}{h_0}\right)$ 因子, 也使 $\psi^{(1)}$ 上下不对称, 增大下半部的 $\psi^{(1)}$ 的梯度. 总之一阶效应的加入改变了磁面函数 $\psi = \psi^{(0)} + \beta\psi^{(1)}$ 的对称性, 使下半部的磁场较强.

五、讨 论

本文以一个最简单的解析解, 来说明考虑了重力后冷的水平环状日珥系统如何维持磁流体静力学平衡.

通常的宁静日珥的理论模型具有如图 5 所示的磁场位形^[6], 日珥由向下的重力与向上的 Lorentz 力相平衡来支持, 日珥磁力线与外界日冕磁场连通. 考虑到太阳等离子体中热传导基本上沿磁力线进行, 这种模型无助于解释日珥与日冕之间的巨大温度差别这一重要观测事实, 所以本文采取了日珥磁场的闭场模型. Kuperus 和 Tandberg-Hanssen^[7] 在讨论宁静日珥的形成时, 也给出过如图 6 中 A 所示的由撕裂不稳定性带来的一种可能的磁场闭结构, 边界条件(3.4), (3.5)式反映了这种结构.

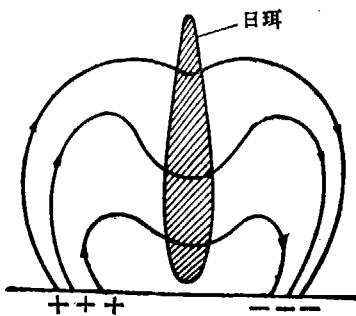


图 5 传统的日珥磁场位形

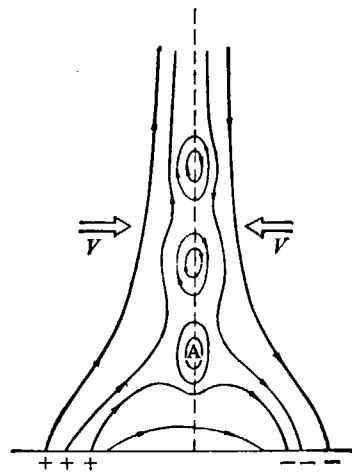


图 6 Kuperus 和 Tandberg-Hanssen 的日珥磁场位形

(3.4), (3.5) 式将边界磁面的截面取为矩形环, 而不是光滑曲线环, 因而在 $(r', z) = (\pm 1, \pm 1)$ 处出现尖点. 这样取边界条件是为了便于计算求解, 另一方面, 椭圆型方程的边值存在几个尖点不影响解的整体特征. 由图 3 可见, 边界以内的 $\psi = \text{常数}$ 磁面截面位形为光滑曲线, 所以磁场位形还是合理的.

一般情况下, $B_{\theta}^{(0)} \approx 0$ (见(4.6)式). 再由图 3 磁面形态可知, 水平日珥环的内部基态磁场(无力场)结构为: 磁力线在轮胎状的磁面上螺旋缠绕, 磁面是闭合曲面. 由于考虑重力效应,

磁场(见(4.4)和(4.21)式)不再是无力场, 磁面函数也不再具有左右对称和上下对称性. 但是在 β 不太大的情况下, 仍可以保证大多数磁面为闭合曲面, 只是磁轴(诸闭合磁面共同围绕的中心)位置相对于基态解有所偏移. 本文得到的磁场位形与观测到的水平环状日珥磁场为如图 7 所示的喷泉状结构^[1]并不矛盾. 本文的磁场位形与日冕外场喷泉状结构的关系如图 8 所示(图中视线方向与日珥环平面平行). 有关考虑一阶效应后磁场形态的更细致的内容以及日珥外部磁场的定量表示将留待以后讨论.

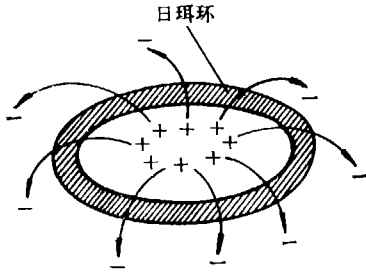


图 7 观测的水平环状日珥的磁场分布

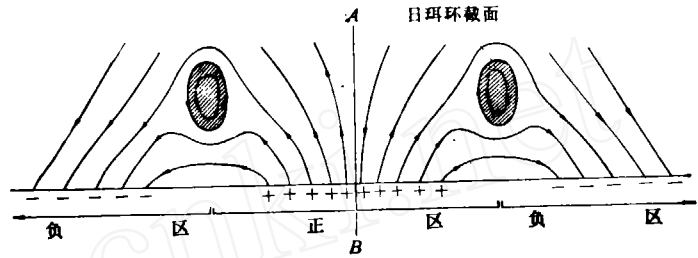


图 8 本文的日珥磁场与外场的关系

由于考虑了重力效应, 密度的零阶量就已经不具有上下对称性. 随着参量 h_0 (密度标高) 由 ∞ 逐渐减小, 密度极大值的位置逐渐“下沉”. 当参量 h_0 较小时(例如图 4(d) 的情况), 日珥内物质的密度分布与一般重力场中的粒子密度分布相似.

本文讨论的是 $m = 1, n = 1$ 时的最简单的解. 此时所得等 ϕ 图, 等 ρ (或等 p) 图都只有一个轴. 当 (3.13) 及 (3.22) 式中的 n, m 取 $n > 1, m > 1$ 的值时, 解变得更复杂一些, 等 ϕ 图及等 ρ 图的轴的个数要增加.

参 考 文 献

- [1] Sheeley, N. R. Jr. & Harvey, J. W., *Solar Physics*, 45(1975), 275.
- [2] Mercier, C., *Lectures in Plasma Physics*, 1974.
- [3] Suzuki, Y., *Nuclear Fusion*, 14(1974), 345.
- [4] De Menna, L., *ibid.*, 17(1977), 455.
- [5] 胡文瑞, 中国科学, 1977, 69.
- [6] Tandberg-Hanssen, E., *Solar Prominences*, D. Reidel, Dordrecht-Holland/Boston-U. S. A., 1974.
- [7] Kuperus, M. & Tandberg-Hanssen, E., *Solar Physics*, 2(1967), 39.