运动无力场中的等离子体状况

李中元　　　　胡文瑞
（中国科学技术大学，合肥）（中国科学院力学研究所，北京）

在太阳活动区以及磁层和某些等离子体彗星中的磁场位形大多是无力场．无力场在太阳物理和空间物理中是常遇到的．我们经常通过无力场模型对客体进行理论分析和处理，然后与观测的结果进行比较．Gold 和 Hoyle 最早提出太阳黑子磁场中的磁力线的扭绞特性[1]．以后，人们用静力学的关系定量地计算了磁场与扭转过程的关系[2,3]；开始是势场的磁场位形通过等离子体的旋转运动而逐渐扭转为电流很强的无力场．Svetska 指出过，耀斑的储能机制需要寻求使活动区无力场能量逐渐增加的机制[4]．最近，我们也根据这条思路分析了太阳耀斑的储能过程[5]．

以往，小磁雷诺数（$R_m \ll 1$）无力场的某些运动学特征，人们已进行了详细讨论[6]．但是，我们在太阳大气的实际问题中，碰到的磁雷诺数都是很大的，一般

$$R_m = VL/\eta_m \cong 10^3 \gg 1,$$

我们在此对太阳大气中等离子体在无力场中的运动状况，专门作些分析讨论．

对于大磁雷诺数的活动区，磁场应满足冻结场条件

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}). \tag{1}$$

磁场的无源条件为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{2}$$

再将无力条件 $\frac{1}{C}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) = 0$ 具体表示为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha(t, \boldsymbol{r})\boldsymbol{B}, \tag{3}$$

其中 $\alpha(t, \boldsymbol{r})$ 是无力因子，它是时间和空间的函数．对轴对称无力场，在柱坐标(r, θ, Z)中可由磁场无源条件引入磁势 ϕ，即

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial Z}, \quad B_Z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r}. \tag{4}$$

将(4)式代入无力场条件(3)，即可导出

$$rB_\theta = G(\phi, t), \quad \alpha = -\frac{\partial G(\phi, t)}{\partial \phi}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -G(\phi, t)\frac{\partial G(\phi, t)}{\partial \phi}. \tag{6}$$

将这些方程代入(1)式，可以导出

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial r} + w\frac{\partial \phi}{\partial Z} = 0, \tag{7}$$

本文 1983 年 5 月 23 日收到．

$$\frac{\partial G(\psi,t)}{\partial t}+\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial Z}\right)G(\psi,t)=-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r}+\left(\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{U}{r}\right)\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{8}$$

一般而言,(7)式右端可含一时间的任意函数 $f_1(t)$,它可以取为零[7]. 而(8)式 $\frac{\partial G(\psi,t)}{\partial t}$ 是对 (ψ,t) 的偏导数.

由运动学守恒关系还要求满足条件

$$\boldsymbol{B}\cdot\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}\nabla p\right]=0. \tag{9}$$

总之,运动学无力场演化就是要在合理的流场下,考虑磁场的变化规律. 这也就归结为讨论以上方程的解所描述的特征.

太阳活动区中,等离子体的旋转运动扭绞磁力线使无电流的势场逐渐转化为电流不断增强的无力场. 这就要讨论角速度随时间变化时磁场位形的演化. 轴对称纯旋转运动的流场分布可写为

$$u=0,\quad v=v(r,Z,t),\quad w=0. \tag{10}$$

将上述的分布代人(7)式,能导出

$$\partial\psi/\partial t=0. \tag{11}$$

将上式对 r 或对 Z 进行微商,利用(4)式,即有

$$\frac{\partial B_r}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial B_Z}{\partial t}=0. \tag{12}$$

(12)式表明,轴对称无力场旋转运动不改变子午场的分量,尽管角速度 Ω 可以是时间 t 的函数. 利用安培定律,即可知环向电流也不随时间变化,即

$$\frac{\partial j_\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{C}{4\pi}\left(\frac{\partial B_r}{\partial Z}-\frac{\partial B_Z}{\partial r}\right)\right]=0. \tag{13}$$

所以,子午磁场和环向电流都不随时间变化.

再考虑磁场环向分量的变化. 将速度场(10)式代入(8)式之中,可得如下关系式:

$$\frac{\partial G(\psi,t)}{\partial t}=-r\left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)\right]. \tag{14}$$

而无力场方程(6)式,左端与时间无关,所以右端项应满足条件

$$\frac{\partial^2 G^2(\psi,t)}{\partial\psi\partial t}=0. \tag{15}$$

由此可以得出一种典型的分布:

$$G^2(\psi,t)=f^2(t)+G_1^2(\psi), \tag{16}$$

当然,(16)式也可写为二项和,其中一项为负,但总可以加减同一常数使两项皆正. 物理上相当于讨论相对环向磁场分量. (16)式代入(5)式,便有

$$B_\theta(r,Z,t)=\frac{1}{r}[f^2(t)+G_1^2(\psi)]^{1/2}, \tag{17}$$

$$\alpha(r,Z,t)=-G_1(\psi)G_1'(\psi)[f^2(t)+G_1^2(\psi)]^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

将上述关系代人无力场方程,就有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right)\psi=-G_1(\psi)\frac{dG_1(\psi)}{d\psi}, \tag{19}$$

方程(19)式表明,当角速度随时间 t 变化时,子午磁场并不随时间变化. 若定义相应的定常量

$$\alpha_1 = -\frac{dG_1}{d\psi}, \quad rB_{\theta 1} = G_1(\psi), \tag{20}$$

则子午场的无力条件就相当于满足(20)式的定常场．真正的环向场随时间变化的关系由(17)式给出，它比相应定常场(20)式的强度要大．另一方面，真正的无力因子(18)式的绝对值比定常时小，即 $|\alpha| < |\alpha_1|$．这表明扭转场的强度相对地增大了，而其梯度则相对地减小了．这样，给定(20)式中相应的定常无力因子 α_1，就可求出(19)式中的边值问题，从而完全确定了子午场．然后，再由(17)式得到环向场随时间的变化关系．

将(16)式代入到(14)式中，就得到环向场的变化与角速度的变化的联系方程式，为

$$\frac{f(t)f'(t)}{\sqrt{f^2(t)+G_1^2(\psi)}} = -\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial Z} + \left(r\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial r}. \tag{21}$$

如果把 $G_1(\psi)$ 和 $\Omega(r, Z)$ 都看作是给定的并不依赖于时间 t，并由(19)求出 $\psi(r, Z)$，则(21)式对时间积分就可导出

$$f^2(t) = f^2(0) + [f^2(0) + G^2(\psi)]^{\frac{1}{2}}\left[r\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z} - r\frac{\partial\psi}{\partial Z}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]t + r^2\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial Z} - \frac{\partial\psi}{\partial Z}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]^2 t^2. \tag{22}$$

如果合理地选择时间变化函数 $f(t)$，则即可由(21)式求出 $\Omega(r, Z, t)$ 的分布，其特征方程为

$$\frac{dr}{r(\partial\psi/\partial Z)} = \frac{dZ}{-r(\partial\psi/\partial r)} = \frac{d\Omega}{f(t)f'(t)[f^2(t)+G_1^2(\psi)]^{-\frac{1}{2}}}, \tag{23}$$

求解特征方程(23)式，可得 Ω 和时间 t 的关系式来，其一般表达式为

$$\Omega(r, Z, t) = \chi_1[t, r, \psi(r, Z)] + \chi_2[\psi(r, Z)], \tag{24}$$

其中 χ_1 和 χ_2 的函数关系由初值来决定．(24)式右端第二项对应于等旋转定理的结果；而第一项则对应于时间变化引起的修正项，当 $f'(t) = 0$ 时，此项为常数．具体给出 Ω 和 $f(t)$ 的关系，就可以分析横向场的扭转效应．

为了更好地说明问题，作为一个例子，我们取 α_1 为常数的情况来讨论分析一下．这时(19)式便化为线性无力场方程，它的通解为[7]

$$\psi(r, Z) = r\sum_{n=0}^{\infty}\{[C_{1n}e^{-\lambda_n Z} + C_{2n}e^{\lambda_n Z}][C_{3n}J_1(\beta_n r) + C_{4n}Y_1(\beta_n r)]\},$$

其中系数 C_{in} 由轴向边值确定，J_1 和 Y_1 为一阶的 Bessel 函数．通过归算简化后，可合理化成下列形式

$$\psi(r, Z) \cong C_0 r e^{-\lambda_0 Z}J_1(\beta_0 r). \tag{25}$$

将(25)代入到(24)式中去，就可求出

$$v(r, Z, t) = r\Omega(r, Z, t) = \frac{-f(t)f'(t)\cdot r\cdot \ln r}{\alpha\psi\sqrt{f^2(t)+\alpha^2\psi(r, Z)}} + r\cdot\chi_2[\psi(r, Z)], \tag{26}$$

其中 ψ 由(25)式给出．由(17)式可得到环向磁场能量的变化规律，具体为

$$\frac{B_\theta^2}{8\pi} = \frac{1}{r^2}[f^2(t) + C_0^2 r^2 e^{-2\lambda_0 Z}J_1^2(\beta_0 r)], \tag{27}$$

(27)式显示，磁能可以随时间 t 而变化；而且，有扭转 $f(t)$ 时的总磁能总是比相应的无力场磁能要有所增加．

但是(17)式和(27)式都表示，如果 $f(t) \neq 0$ 的话，$B_\theta(r, Z, t)$ 在 $r = 0$ 处会出现奇异性． 所以上述讨论的适用区域必须排除 $r = 0$ 附近的范围． 如果讨论包括 $r = 0$ 在内的区域，就只能要求

$$f(t) = 0. \tag{28}$$

这时不仅子午磁场不可能随时间变化，环向磁场也不能随时间变化．

所以，如果不包括对称轴在内(例如，活动区中心有一条日珥，日珥应该是有力场)，则旋转运动可以扭绞磁力线，使环向磁场分量增强．在物理上，这相当于对称轴中心区域为非无力场(如压力较大等)，而外部区域为无力场．求解时需在两个区域分别求解，然后由共同的边界条件彼此衔接．如果考虑包括对称轴在内的区域中，那时子午场、环向场都不能随时间变化．上述的讨论，可以归结为如下的定理性结论：包含对称轴在内的区域中，理想等离子体中的轴对称连续磁场位形不能被随时间变化的纯粹的旋转运动所维持． 这意味着，要维持这种场还需要子午面内的速度场，而不仅仅是环向的等离子体转动．所以，在讨论纯旋涡运动对活动区储能的作用中，还必须同时考虑子午流场和磁场的耦合作用，以及不定常的时间变化过程．这样，才能了解冻结型无力场中磁场位形的变化特征，以及活动区中能量的转换过程；然后才有可能来进一步分析活动区中的一系列特性．

参　考　文　献

[1] Gold, T. and Hoyle, F., *Monthly Notices RAS*, **120**(1960), 89.
[2] 马云丽等，黄山天体物理学术会议论文集，科学出版社，1981，222.
[3] Barnes, C. W. & Sturrock, P. A., *Astrophys. J.*, **174**(1972), 659.
[4] Svetska, Z., *Solar Flare*, D. Reidel Pub. Co., 1977, 300, 310.
[5] 李中元、胡文瑞，空间科学学报，**2**(1982)，137.
[6] Bostrom, R., *Astrophys. Space. Sci.*, **22**(1973), 353.
[7] 胡文瑞，中国科学，1977，1：69.