中 国 科 学

1984 年 10 月 A 辑 第 10 期

# 磁化非均匀等离子体的圆柱波导中的横电波

康 寿 万

（中国科学院力学研究所，北京）

摘 要

本文研究了有外加纵向磁场时，非均匀等离子体圆柱波导中的横电波，得到了把超几何级数进行截断而形成多项式所表出的横电波的解析解，并求出了横电波的本征频率。

## 一、前 言

关于等离子体波导中的电磁波已有很多人作过研究，对于平行板波导、矩形波导及圆柱波导都如此。

对于圆柱波导，已经在下列这些情况中得到过解析解[1]：(1) 无外加磁场时的均匀等离子体；(2) 无外加磁场时的非均匀等离子体，密度分布为 $N = N_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$；(3) 有外加纵向磁场时的均匀等离子体。然而，一种最重要的情况，即在外加纵向磁场时的非均匀等离子体，至今尚未得到过解析解。而上述三种情形，都是本情况的特例。

## 二、基 本 方 程

现在考虑一圆柱波导，其轴沿 $z$ 方向，半径 $a$，管内充满等离子体。等离子体的电子密度分布为 $N = N_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$，$N_0$ 为 $r = 0$ 处的电子密度。波导管内加上纵向均匀磁场：$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z B_0$，波导管壁为理想导体。

由 Maxwell 方程，得到

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{1}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为介电张量，为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

其中

本文 1983 年 4 月 14 日收到，1984 年 3 月 28 日收到修改稿。

$$\varepsilon_1=(1-h)+h\frac{r^2}{a^2},\ \varepsilon_2=-g+g\frac{r^2}{a^2},\ h=\frac{\omega_{p_0}^2}{\omega^2-\omega_{ce}^2},$$

$$g=h\frac{\omega_{ce}}{\omega},\ \omega_{p0}^2=\frac{4\pi N_0e^2}{m_e},\ \omega_{ce}=\frac{eB_0}{m_ec}.$$

设电场为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}$. 由于物理量为单值,故$m$为整数,选$m$为负整数,这一点在最后再作讨论. 采用圆柱坐标,(1)式的 $r$, $\varphi$, $z$ 分量为

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{m^2}{r^2}E_r+k^2E_r+\frac{im}{r}\frac{dE_\varphi}{dr}+\frac{im}{r^2}E_\varphi-\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_1E_r+i\varepsilon_2E_\varphi)=0, &(2)\\&k^2E_\varphi-\frac{d^2E_\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dE_\varphi}{dr}+\frac{E_\varphi}{r^2}-\frac{im}{r^2}E_r+\frac{im}{r}\frac{dE_r}{dr} &(3)\\&\qquad-\frac{\omega^2}{c^2}(-i\varepsilon_2E_r+\varepsilon_1E_\varphi)=0,\\&ik\frac{dE_r}{dr}-\frac{mk}{r}E_\varphi+\frac{ik}{r}E_r=0. &(4)\end{aligned}\right.$$

因为我们限于讨论横电波,故在(2)—(4)式中,已取 $E_z=0$.

由于 $k\neq0$(否则波不沿波导管传播),故由(4)式可得到

$$E_\varphi=\frac{i}{m}\left(E_r+r\frac{dE_r}{dr}\right). \tag{5}$$

另外,由 $\nabla\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E})=0$, 有

$$\varepsilon_1\frac{dE_r}{dr}+i\varepsilon_2\frac{dE_\varphi}{dr}+\left(2h\frac{r}{a^2}+\frac{\varepsilon_1}{r}+\frac{m\varepsilon_2}{r}\right)E_r$$

$$+i\left(2g\frac{r}{a^2}+\frac{\varepsilon_2}{r}+\frac{m\varepsilon_1}{r}\right)E_\varphi=0.$$

将(5)式代入上式,消去$E_\varphi$, 有关系

$$\frac{d^2E_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\left(3+2\frac{r^2}{r^2-a^2}\right)\frac{dE_r}{dr}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{2}{r^2-a^2}\left(1-\frac{\omega}{\omega_{ce}}m\right)r^2-(m^2-1)\right]E_r=0.$$

令 $x=\frac{r}{a}$, $\eta=\frac{\omega}{\omega_{ce}}m$, 则上式可化为

$$x^2(x^2-1)\frac{d^2E_r}{dx^2}+x(5x^2-3)\frac{dE_r}{dx}+[(3-2\eta-m^2)x^2+m^2-1]E_r=0. \tag{6}$$

令: $p=5$, $q=-3$, $t=3-2\eta-m^2$, $s=m^2-1$, 则上式成为

$$x^2(x^2-1)\frac{d^2E_r}{dx^2}+x(px^2+q)\frac{dE_r}{dx}+(tx^2+s)E_r=0. \tag{7}$$

设 $A_{1,2}$ 及 $B_{1,2}$ 分别是下列两方程的根[2]

$$A^2-(q+1)A-s=0,$$

$$B^2-(p-1)B+t=0,$$

得到: $A_1=-m-1$, $A_2=m-1$, $B_1=2+\sqrt{m^2+1+2\eta}$, $B_2=2-\sqrt{m^2+1+2\eta}$.
于是有关系

$$\begin{cases} c = A_1 = -m-1, \\ \gamma = \frac{1}{2}(A_1 - A_2) + 1 = 1 - m, \\ \alpha = \frac{1}{2}(A_1 + B_1) = \frac{1}{2}(-m + 1 + \sqrt{m^2 + 1 + 2\eta}), \\ \beta = \frac{1}{2}(A_1 + B_2) = \frac{1}{2}(-m + 1 - \sqrt{m^2 + 1 + 2\eta}). \end{cases} \tag{8}$$

作变换

$$E_r = x^c y(x^2) = x^{-m-1} y(x^2). \tag{9}$$

并令 $\xi = x^2$，则 (6) 式化为

$$\xi(\xi - 1)y'' + [(2-m)\xi + (m-1)]y' - \frac{(m+\eta)}{2} y = 0, \tag{10}$$

其中 $y' = \frac{dy}{d\xi}$，$y'' = \frac{d^2y}{d\xi^2}$. 上式也就是

$$\xi(\xi - 1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)\xi - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0. \tag{11}$$

这是高斯方程，即超几何方程. 它的三个奇点：$\xi = 0, 1, \infty$ 都是正则奇点，故它是 Fucks 型的线性微分方程.

因此，现在的问题是求解 (11) 式，并通过 (9) 式及 (5) 式求出 $E_r$ 和 $E_\varphi$. 一旦求出 $\boldsymbol{E}$，就可通过 Maxwell 方程求出 $\boldsymbol{B}$. $B_r$ 和 $E_\varphi$ 的边界条件是

$$x = 0:\ E_\varphi = 0, \tag{12}$$

$$x = 1:\ E_\varphi = 0,\ B_r = 0. \tag{13}$$

## 三、解 析 解

由 (8) 式可见，由于 $m$ 为负整数，故 $\gamma$ 为正整数，$\alpha$ 为正数，$\beta$ 有可能为负整数. 因此，(11) 式在 $\xi = 0$ 的邻域内的一对基本解，可用超几何级数表出[3]

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi), \tag{14}$$

$$y_2 = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)\ln\xi + \frac{(\gamma-1)!}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{l=1}^{\gamma-1} (-)^{l-1}(l-1)!\frac{\Gamma(\alpha - l)\Gamma(\beta - l)}{(\gamma - l - 1)!}\xi^{-l}$$
$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_l(\beta)_l}{l!(\gamma)_l}\xi^l\{\psi(\alpha + l) + \psi(\beta + l) - \psi(\gamma + l) - \psi(1 + l)\}. \tag{15}$$

(15) 式当 $\beta$ 不是负整数时才适用. 当 $\beta$ 是负整数时，例如 $\beta = -n$，则第二解 $y_2$ 是

$$y_2 = F(\alpha, -n, \gamma, \xi)\ln\xi - \frac{(\gamma-1)!}{\Gamma(\alpha)} \sum_{l=1}^{\gamma-1} \frac{(l-1)!\Gamma(\alpha - l)}{(\gamma - l - 1)!(n+1)_l}\xi^{-l}$$
$$+ \sum_{l=0}^{n} \frac{(-n)_l(\alpha)_l}{l!(\gamma)_l}\xi^l\{\psi(\alpha + l) + \psi(1 + n - l) - \psi(\gamma + l) - \psi(1 + l)\}, \tag{15'}$$

其中 $(\lambda)_l = \lambda(\lambda + 1)\cdots(\lambda + l - 1) = \frac{\Gamma(\lambda + l)}{\Gamma(\lambda)}$，$\psi(t) = \frac{d}{dt}\ln\Gamma(t)$. 而 $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ 的表达式为：

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}\xi + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}\xi^2 + \cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\xi^n+\cdots.$$

相应的 $E_r$ 的表达式就是

$$E_r=c_1x^{-m-1}F(\alpha,\beta,\gamma,x^2)+c_2x^{-m-1}y_2|_{\xi=x^2}. \tag{16}$$

由于 $y_2$ 中含有 $\xi^{-l}|_{l=\gamma-1}$ 项，而 $x^{-m-1}\xi^{-(\gamma-1)}=x^{m-1}$，因此当 $x=0$ 时此项发散．为了得到有界的解，取 $c_2=0$，于是有：

$$E_r=c_1x^{-m-1}F(\alpha,\beta,\gamma,x^2). \tag{17}$$

为了得到在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 满足有界的边界条件的非零解，必须对 $E_r$ 的无穷级数进行截断．这种做法类似 Legendre 方程的求解过程，我们将在本文最后一节中作些必要的讨论．

令 $\beta=-n$，$n$ 为正整数，则 $F(\alpha,-n,\gamma,x^2)$ 就被截断，成为多项式．这样，$E_r$ 的表达式就成为

$$\begin{aligned}E_r&=c_1x^{-m-1}F(\alpha,-n,\gamma,x^2)\\&=c_1x^{-m-1}\left\{1+\frac{(-)\alpha n}{1!\gamma}x^2+\frac{(-)^2\alpha(\alpha+1)n(n-1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^4\right.\\&\left.\quad+\cdots+\frac{(-)^n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)n(n-1)\cdots1}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^{2n}\right\}.\end{aligned} \tag{18}$$

由 $\beta=-n$，得到

$$\eta=2n^2+2n+2|m|n+|m|.$$

故本征频率为：

$$\omega_{m,n}=\frac{1}{|m|}(2n^2+2n+2|m|n+|m|)|\omega_{ce}|. \tag{19}$$

$E_\varphi$ 由 (5) 式给出

$$E_\varphi=\frac{i}{m}\left(E_r+x\frac{d}{dx}E_r\right),$$

即

$$\begin{aligned}E_\varphi=\frac{ic_1}{m}x^{-m-1}&\left\{-m+\frac{(-)\alpha n}{1!\gamma}(-m+2)x^2\right.\\&+\frac{(-)^2\alpha(\alpha+1)n(n-1)}{2!\gamma(\gamma+1)}(-m+4)x^4+\cdots\\&\left.+\frac{(-)^n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)n(n-1)\cdots1}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}(-m+2n)x^{2n}\right\}.\end{aligned} \tag{20}$$

为了满足 (12) 式，(20) 式只在 $|m|\geqslant 2$ 时成立，相应地，(18) 式也只当 $|m|\geqslant 2$ 时成立．

为了满足 (13) 式，要求

$$\begin{aligned}-m+\frac{(-)\alpha n}{1!\gamma}(-m+2)+\cdots+\frac{(-)^n\alpha\cdots(\alpha+n-1)n\cdots1}{n!\gamma\cdots(\gamma+n-1)}\\\times(-m+2n)=0.\end{aligned} \tag{21}$$

因此，本征频率 $\omega_{m,n}$ 的 $m$ 与 $n$ 值不是任意的，$m$ 与 $n$ 必须满足 (21) 式．在 $m=-2$ 到 $-20$，$n=1$ 到 10 的范围内，在 Nova 计算机上计算，求出 $m=-5$，$n=10$，满足 (21) 式．故 $\omega_{-5,10}$ 是一个本征频率，$\omega_{-5,10}=65|\omega_{ce}|$，这是一个相当高的频率．当 $B_0=1\text{kG}$ 时，它位于毫米波段．

现在来讨论 $m=0$ 及 $m=-1$ 这两种情况.

当 $m=0$ 时，(4) 式成为：

$$\frac{dE_r}{dr}+\frac{1}{r}E_r=0.$$

上式的解是：$E_r=\frac{c_1'}{r}$，$c_1'$ 为积分常数．由于这个解在 $r=0$ 处发散，故只能取 $c_1'=0$．因而对于 $m=0$，无横电波.

当 $m=-1$ 时，由 (8) 式得到：

$$c=0,\ \gamma=2,\ \alpha=1+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\eta)},\ \beta=1-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\eta)}.$$

于是，对应 (9) 式的变换是：$E_r=y(x^2)$.

(10) 式现在成为

$$\xi(\xi-1)y''+(3\xi-2)y'+\frac{1}{2}(1-\eta)y=0, \tag{22}$$

其一解为：$y_1=F(\alpha,\beta,\gamma,x^2)$，另一解 $y_2$ 是 $m=-1$ 时的 (15) 或 (15)′ 式．根据前面对 (16) 式中的 $y_2$ 的讨论，可见 $y_2$ 含有 $x^{-2}$ 的项，在 $x=0$ 时发散，为得到有界解，$y_2$ 须弃去，故 $E_r=c_1'F(\alpha,\beta,\gamma,x^2)$．再由 (5) 式得到 $E_\varphi$，计及边界条件 $E_\varphi|_{x=0}=0$，要求常数 $c_1'=0$，故对于 $m=-1$，也无横电波.

横电波的磁场，在 $E_z=0$ 的条件下，由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}$，有关系

$$\begin{cases} B_r=\frac{ic}{\omega}\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}=-\frac{kc}{\omega}E_\varphi, \\ B_\varphi=-i\frac{c}{\omega}\frac{\partial E_r}{\partial z}=\frac{kc}{\omega}E_r, \\ B_z=-\frac{ic}{\omega}\left(\frac{\partial E_\varphi}{\partial r}+\frac{E_\varphi}{r}-\frac{im}{r}E_r\right). \end{cases} \tag{23}$$

把 $E_r$ 和 $E_\varphi$ 的表达式 (18) 和 (20) 代入上式，就得到 $B_r$, $B_\varphi$, $B_z$．显然，$B_r$ 是满足边界条件 (13) 式的.

$E$ 和 $B$ 的表达式都含有一待定常数 $c_1$，$c_1$ 确定了电磁量的振幅大小．通过能量守恒可定出 $c_1$，也就是，由馈送进波导管的横电波的能量来确定 $c_1$.

## 四、讨　论

在上述求解过程中，我们把超几何级数截断成为多项式，现在对这种数学处理方法作些讨论.

(11) 式在 $|\xi|<1$ 区的有界解，是 (14) 式的 $y_1$．(11) 式在 $|\xi-1|<1$ 区的两个基本解(由于 $\gamma-\alpha-\beta=0$ 及 $\beta=-n$) 是[3]：

$$y_3=F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma,1-\xi)=F(\alpha,\beta,1,1-\xi), \tag{24}$$

$$y_4=F(\alpha,\beta,1,1-\xi)\ln(1-\xi)$$
$$+\sum_{s=0}^{n}\frac{(\alpha)_s(-n)_s}{(s!)^2}\{\psi(\alpha+s)+\psi(1+n-s)$$

$$-2\phi(1+s)\}(1-\xi)^s. \tag{25}$$

在 $|\xi-1|<1$ 区，(11) 式的解是 $y_3$ 与 $y_4$ 的线性组合 $y=c_3y_3+c_4y_4$.

根据微分方程的解的解析延拓原理，在 $|\xi|<1$ 和 $|\xi-1|<1$ 的公共区，应有($A$，$B$ 为常数)

$$y_1=Ay_3+By_4.$$

由此得到在 $|\xi-1|<1$ 区的解的表达式是[3]:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)=\frac{-\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(m!)^2}(1-\xi)^m\{\phi(\alpha+m)$$
$$+\phi(\beta+m)-2\phi(1+m)+\ln(1-\xi)\}, \tag{26}$$

当 $\xi=1$ 时，上式右方只剩下 $m=0$ 项，其他项都是零. 因而在 $\xi=1$ 时，(26) 式右方成为:

$$\frac{-\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\{\phi(\alpha)+\phi(\beta)-2\phi(1)+\ln(1-\xi)\}_{\xi=1}.$$

由于 $\ln(1-\xi)$ 在 $\xi=1$ 处发散，所以，只有当 $\beta$ 是 $\Gamma$ 函数的极点时，上式才可能有界(因为 $\alpha>0$，故 $\alpha$ 不可能是 $\Gamma$ 函数的极点). 因此，$\beta=-n$，$n$ 为正整数，于是 $F$ 被截断成为多项式了.

这种数学方法类似于求 Legendre 方程的解. 为了使 Legendre 方程的解在 $x\to\pm1$ 时有界，必须把级数截断成多项式[4].

当级数截断成多项式后，(17) 式变为 (18) 式，就可适用于 $x=1$[3].

最后来讨论一下取 $m$ 为负整数的问题. 如果取 $m$ 为正整数，而 $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ 不变，则 $c$，$\gamma$，$\alpha$，$\beta$ 的形式仍为 (8) 式，只是 $m$ 现在是正整数. $E_r$ 的解仍为 (16) 式，由于 $m>0$，因此这个解在 $x=0$ 处发散，得不到有界解.

如果当 $m$ 为正整数时，$A_1$ 改为 $A_1=m-1$，$A_2=-m-1$，$B_1$，$B_2$ 不变，此时 $c=m-1$，$\gamma=1+m$，$\alpha=\frac{1}{2}(m+1+\sqrt{m^2+1+2\eta})$，

$$\beta=\frac{1}{2}(m+1-\sqrt{m^2+1+2\eta}),$$

因为 $\omega_{cr}<0$，故当 $m>0$ 时，$\eta<0$，于是 $\beta>0$.

作变换 $E_r=x^cy(x^2)$，$\xi=x^2$，仍然可得 (11) 式. 其第一解 $y_1$ 是 (14) 式. 由于 $\alpha$ 和 $\beta$ 都不是负整数，因此第二解 $y_2$ 是 (15) 式，于是

$$E_r=c_1x^{m-1}y_1+c_2x^{m-1}y_2,$$

$y_2$ 中含有 $\xi^{-l}|_{l=\gamma-1}$ 的项，而 $x^{m-1}\xi^{-(\gamma-1)}=x^{-m-1}$，所以在 $x=0$ 处，$x^{m-1}y_2$ 发散. 取 $c_2=0$，得

$$E_r=c_1x^{m-1}y_1,$$

此解适用于 $x=0$ 的邻域. 在 $x=1$ 的邻域，解的形式是对应的 (26) 式. 重复上文中对 (26) 式的讨论，可见为了使解在 $x=1$ 处有界，必须要求 $\alpha$ 或 $\beta$ 是 $\Gamma$ 函数的极点，但现在 $\alpha$ 和 $\beta$ 都大于零，因此 $\Gamma(\alpha)$ 和 $\Gamma(\beta)$ 都无极点，于是得不到有界解.

由此可见，$m$ 不能是正整数，只能取负整数.

本文虽然只讨论了密度分布为 $N=N_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$ 时的解，但分析表明，对于 $N=N_0\Big(1-$

$\left.\frac{r^2}{2a^2}\right)$等的分布，也可按照本文的方法求出解析解.

作者在写作过程中，就方程的求解问题，和北京大学郭敦仁教授作了多次十分有益的讨论，谨致以衷心的感激.

## 参考文献

[1] Allis, W. P. et al., *Waves in Anisotropic Plasmas*, M. I. T. Press, Cambridge, 1963.
[2] E. 卡姆克著，张鸿林译，常微分方程手册，科学出版社，1977年，606.
[3] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社，1965年.
[4] 郭敦仁编，数学物理方法，人民教育出版社，1978年.