

含灰气体绕半无限平板流动的层流边界层

赵国英

(中国科学院力学研究所)

提要 本文直接把正则扰动理论应用于含灰气体边界层方程,得到了平板前缘和下游的级数解。所得的级数解的系数满足一系列常微分方程,文章分析了这些方程的耦合性质以及求解上的困难,并对一些情况以图表形式给出了级数解;利用这些图表能方便地求出含灰气体在平板表面产生的摩擦和热流。由于选择了合理的松弛长度和粘性系数规律,本文克服了前人求解上的缺陷,应用范围更为广泛。同时,本文在数学上给出了求解两重耦合常微分方程组两点边值问题的一种数值方法。

主要符号表

c_p^* 气体定压比热	μ 气体粘性系数
Ma Mach 数	c 浓度
R_p 灰尘微粒半径	r 气体的比热比
T 温度	上标 * 无量纲量
u x 方向速度	下标 p 与灰尘有关的量
v y 方向速度	∞ 来流参数
x 从前缘算起的平板横向座标	w 平板壁面参数
y 垂直于平板的纵向座标	

一、引言

人们对含灰气体流动现象的分析,始于六十年代^[1]。含灰气体流动与纯气体流动间有着本质的差别,在本文所研究的情况下,气体在平板壁面上满足无滑移条件,但灰尘在平板前缘附近仍以来流速度运动,其滞止由微粒与气体间相对运动产生的摩擦引起;这一松弛过程比较缓慢,只是到了平板下游,灰尘微粒才在壁面附近逐渐降低到大致与气体具有相同的速度。本文旨在分析平板边界层中灰尘对气流速度、温度分布的影响,并求出含灰气体在平板上产生的摩擦和热流。

很早有人把 Navier-Stokes 方程推广到含灰气体的情况^[2-4]。气体在边界层外缘的压力已知,浓度与温度间有单一的函数关系(参见[13]),而灰尘的浓度与温度间没有这种关系,因而作为固相的灰尘有四个应变变量(u_p, v_p, σ_p, T_p),在边界层中描述它的方程除连续方程、切向动量方程和能量方程外尚需补充一个关系或假定。文献[5]把微粒浓度取作常数,文献[2]假定微粒的法向速度与气体的相等。文献[6]认为这些假定并不合理,补充了微粒在边界层中的法向动量方程,这一点后来得到了承认^[4]。但是在气体粘性系数

本文于1983年7月8日收到,曾在1984年第二届全国计算流体力学会议上宣读。

的计算和松弛长度的选择上,文献[6]有严重的缺陷,大大限制了其应用范围.文献[6]还用 $Pr = 1$ 下气体温度边界层所满足的 Crocco 关系代替含灰气体气相的温度分析,这不仅在许多情况下影响结果的正确性,而且就含灰气体边界层的数学问题而言,回避了温度方程与速度方程耦合的基本困难.

本文直接把正则扰动理论应用于含灰气体边界层方程,得到了平板前缘和下游的级数解.这些级数解的系数满足一系列常微分方程,文章分析了这些方程的耦合性质以及求解上的困难,并就一些重要情况给出了数值解.由于本文选择了合理的松弛长度和粘性系数规律,克服了文献[6]解法上的缺陷,有广泛的应用范围.同时,本文在数学上给出了求解两重耦合常微分方程组两点边值问题的一种数值方法.

二、基本假设和边界层方程

为了便于分析,我们假定灰尘都是具有相同直径的圆球微粒组成,它们的数密度较大,而所占的体积很小,灰尘间不发生碰撞,于是我们可把灰尘和气体这两相都当作连续介质来处理.

对于含灰气体动力学来说,最重要的是模拟好两相间的作用力和热传导.作用在灰尘粒子上的力与粒子的加速过程,粒子间或粒子与壁面间的接近程度,粒子的 Reynolds 数、Knudsen 数以及流场的局部加速度、压力梯度、剪切梯度有关.对于边界层,考虑到以上假设,一般可以忽略与粒子加速度有关的 Basset 力、“携带质量力”^[9].但由于粒子处于剪切流场之中,当粒子的 Reynolds 数不太大时,作用在粒子上的有 Stokes 阻力 D 和升力.根据文献[8],升力由剪切流场使粒子转动引起的 Magnus 力 F_L 和由剪切滑移引起的横向力 F_T 组成.一般情况下, Magnus 力比横向力小一个量级,分析时可忽略.为了不给分析带来困难,我们把流动限制在粒子半径很小的情况,这样,在边界层的大部分区域 F_T/D 是小量.当然,灰尘粒子也不能过小,以免引起布朗运动,使问题复杂化.

我们把作用在单位体积内两相间的作用力写作

$$\mathbf{F}_p^* = \frac{\sigma_p^*(\mathbf{V}_p^* - \mathbf{V}^*)}{\tau_m^*} \quad (1)$$

其中动量松弛时间 $\tau_m^* = 2\rho_s^*R_p^{*2}/9\mu^*$, ρ_s^* 为灰尘物质的密度.

关于两相间相对运动引起的对流换热,假定 Nusselt 数为 2,并得到单位体积内两相间的热交换率为

$$Q_p^* = \sigma_p^*c_s^*(T_p^* - T^*)/\tau_T^* \quad (2)$$

其中温度松弛时间 $\tau_T^* = (3/2)Pr(c_s^*/c_p^*)\tau_m^*$, c_s^* 为灰尘物质的比热.

在以上假设下,含灰气体边界层方程为^[6]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma u) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma v) = 0 \quad (3)$$

$$\sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(CT \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sigma_p CTS(u_p - u) \quad (4)$$

$$\sigma u \frac{\partial T}{\partial x} + \sigma v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(CT \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\gamma - 1)Ma_\infty^2 \left\{ CT \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right.$$

$$+ \sigma_p C T S (u_p - u)^2 \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial x}} \right\} + \frac{2}{3Pr} \sigma_p C T S (T_p - T) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_p u_p) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_p v_p) = 0 \quad (6)$$

$$\sigma_p u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + \sigma_p v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} = -\sigma_p C T (u_p - u) \quad (7)$$

$$\sigma_p u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + \sigma_p v_p \frac{\partial v_p}{\partial y} = -\sigma_p C T (v_p - v) \quad (8)$$

$$\sigma_p u_p \frac{\partial T_p}{\partial x} + \sigma_p v_p \frac{\partial T_p}{\partial y} = -\frac{2}{3Pr} \left(\frac{c_p^*}{c_s^*} \right) \sigma_p C T (T_p - T) \quad (9)$$

$$\sigma T = 1 \quad (10)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{壁面: } v(x, 0) = v_p(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_w, \quad u(x, 0) = 0 \\ \text{边界层外缘: } u(x, \infty) = u_p(x, \infty) = T_p(x, \infty) = T(x, \infty) = \sigma_p \\ (x, \infty) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上述各式都是在无量纲座标下用无量纲量写出的,所作的无量纲化为

$$\left. \begin{aligned} x = x^*/\lambda_{m\infty}^*, \quad y = y^*/\sqrt{\tau_{m\infty}^* v_\infty^*}, \quad u = u^*/u_\infty^* \\ v = v^*\sqrt{\tau_{m\infty}^*/v_\infty^*}, \quad T = T^*/T_\infty^*, \quad \sigma = \sigma^*/\sigma_\infty^* \\ u_p = v_p^*/u_\infty^*, \quad v_p = v_p^*\sqrt{\tau_{m\infty}^*/v_\infty^*}, \quad T_p = T_p^*/T_p\infty^* \\ \sigma_p = (\sigma_p^*/\sigma_p\infty^*)S, \quad C = \sigma^*\mu^*/\sigma_\infty^*\mu_\infty^*, \quad T_w = T_w^*/T_\infty^* \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{m\infty}^* = u_\infty^* \tau_{m\infty}^*, \quad \tau_{m\infty}^* = 2\rho_s^* R_p^{*2} / 9\mu_\infty^*, \\ S = \sigma_p\infty^* / \sigma_\infty^*, \quad v_\infty^* = \mu_\infty^* / \sigma_\infty^* \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

以上各式中, T_w^* 、 σ_∞^* 、 T_∞^* 、 S 和 u_∞^* 为常数。

关于粘性系数 μ^* , 我们采用幂次律

$$\mu^*/\mu_\infty^* = (T^*/T_\infty^*)^\omega \quad (14)$$

其中指数 ω 为常数, 对于气体, 它介于 0.666 到 1 之间^[7]。同时假定空气的比热 c_p^* 和 Pr 为常数, 便有

$$k^*/\mu^* = k_\infty^*/\mu_\infty^* \quad (15)$$

按照文献 [2], 我们就 $\lambda_{m\infty}^*/x^* \gg 1$ 和 $\lambda_{m\infty}^*/x^* \ll 1$ 两个区域来求解上述方程组。

三、前缘解

在平板前缘, $x \ll 1$, 我们引进流函数 ϕ 和 ϕ_p 如下,

$$\left. \begin{aligned} \sigma u = \partial\phi/\partial y, \quad \sigma v = -\partial\phi/\partial x \\ \sigma_p u_p = \partial\phi_p/\partial y, \quad \sigma_p v_p = -\partial\phi_p/\partial x \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

并作座标变换

$$\xi = x, \quad \eta = y/\sqrt{x} \quad (17)$$

再假定 ϕ 、 ϕ_p 、 T 、 σ_p 、 T_p 和 C 可作如下的正则扰动展开

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sqrt{\xi} \{f_0(\eta) + \xi f_1(\eta) + \dots\}, \quad \psi_p = \sqrt{\xi} \{g_0(\eta) + \xi g_1(\eta) + \dots\} \\ T &= \theta_0(\eta) + \xi \theta_1(\eta) + \dots, \quad \sigma_p = h_0(\eta) + \xi h_1(\eta) + \dots \\ T_p &= t_0(\eta) + \xi t_1(\eta) + \dots, \quad C(T) = C_0[\theta_0(\eta)] + \xi C_1[\theta_0(\eta), \theta_1(\eta)] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将式(16)–(18)代入式(3)–(10), 显然式(3)和式(6)自动满足. 再令其余各式中 ξ^n 的系数为零, 便可得到下列常微分方程: (其中 $u_0(\eta)$ 和 $u_1(\eta)$ 是为了简化方程的形式而引进的)

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= f_0' \theta_0, \quad u_0'' + [f_0/2\theta_0'' + \omega\theta_0'/\theta_0]u_0' = 0 \\ \theta_0'' + \omega(\theta_0')^2/\theta_0 + Pr\theta_0'f_0/2\theta_0'' + (\gamma - 1)PrMa_\infty^2(u_0')^2 &= 0 \\ h_0' = 0, \quad g_0' = 0, \quad t_0' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1' + [(\omega\theta_0''^{-1}\theta_0' + f_0/2)/\theta_0'']u_1' - [f_0'/\theta_0'']u_1 + (\omega u_0'/\theta_0)\theta_1' \\ + \{[-\omega\theta_0''^{-2}\theta_0'u_0' - \omega f_0 u_0'/2\theta_0'']/\theta_0''\}\theta_1 + (3u_0'/\theta_0'')f_1 \\ = -S(1 - u_0) \\ u_1 &= \theta_0 f_1' + \theta_1 f_0' \\ \theta_1'' + [2\omega\theta_0''^{-1}\theta_0' + Prf_0/2\theta_0'']\theta_1' + 3Pr\theta_0'f_1/2\theta_0'' \\ + \theta_1\{-Prf_0'/\theta_0'' + \omega(\omega - 1)\theta_0'^2/\theta_0^2 - [(\omega Prf_0\theta_0/2 + \omega^2\theta_0''\theta_0')/\theta_0''^2]\theta_0'\} \\ = -(\gamma - 1)Ma_\infty^2 S(1 - u_0)^2 - 2S(1 - u_0)/3 \\ \eta h_1' - 2h_1 &= -2\theta_0''(1 - \theta_0 f_0/\eta) + g_1' - 3g_1/\eta \\ \eta^2 g_1'' - 3\eta g_1' + 3g_1 &= -2\theta_0''(\eta u_0 - \theta_0 f_0) \\ \eta t_1' - 2t_1 &= -4\theta_0'' c_p^*(\theta_0 - 1)/3Pr c_p^* \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

为了方便, 把式(19)称为第一组方程, 式(20)称为第二组方程. 以上共十二个方程, 十二个未知函数($f_0, f_1, u_0, u_1, \theta_0, \theta_1, t_0, t_1, h_0, h_1, g_0, g_1$), 由式(11)得到其所满足的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad f_0(0) = 0; \quad \text{(ii)} \quad f_1(0) = 0; \quad \text{(iii)} \quad u_0(0) = 0, \quad u_0(\infty) = 1; \\ \text{(iv)} \quad u_1(0) = u_1(\infty) = 0; \quad \text{(v)} \quad \theta_0(0) = \theta_w, \quad \theta_0(\infty) = 1; \quad \text{(vi)} \quad \theta_1(0) = 0 \\ \theta_1(\infty) = 0; \quad \text{(vii)} \quad t_0(\infty) = 1; \quad \text{(viii)} \quad t_1(\infty) = 0; \quad \text{(xi)} \quad h_0(\infty) = 1; \\ \text{(x)} \quad h_1(\infty) = 0; \quad \text{(xi)} \quad g_0(0) = 0, \quad g_0'(\infty) = 1; \quad \text{(xii)} \quad g_1(0) = g_1'(\infty) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

利用以上边界条件, 不难验证式(20)后三个方程的解分别为

$$\begin{aligned} g_1(\eta) &= -\eta^3 \int_{\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x)}{x^4} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \\ &\quad + \eta \int_{\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x)}{x^2} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{且} \quad g_1'(\eta) &= -3\eta^2 \int_{\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x)}{x^4} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \\ &\quad + \int_{\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x)}{x^2} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \end{aligned} \quad (23)$$

$$g_1'(0) = - \int_0^{\infty} \frac{\theta_0''(x)}{x^2} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \quad (24)$$

$$t_1(\eta) = - \frac{4\eta^2}{3(c_s^*/c_p^*)Pr} \int_{-\infty}^{\eta} \theta_0''(x) \frac{[\theta_0(x) - 1]}{x^3} dx \quad (25)$$

$$t_1(0) = \frac{2}{3(c_s^*/c_p^*)Pr} [\theta_0(0) - 1] \theta_0''(0) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} h_1(\eta) = & - 2\eta^2 \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x)}{x^4} [x - f_0(x)\theta_0(x)] dx \\ & - \eta^2 \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x) [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)]}{x^4} dx \\ & + \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\theta_0''(x)}{x^2} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \end{aligned} \quad (27)$$

$$h_1(0) = \theta_0''(0) - \int_0^{\infty} \frac{\theta_0''(x)}{x^2} [xu_0(x) - f_0(x)\theta_0(x)] dx \quad (28)$$

四、下 游 解

在这个区域中, $x \gg 1$, 我们也可作正则扰动求解, 首先引进流函数 ψ 和 ψ_p ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma u = \partial\psi/\partial y, \quad \sigma v = -\partial\psi/\partial x \\ \sigma_p u_p = \partial\psi_p/\partial y, \quad \sigma_p v_p = -\partial\psi_p/\partial x \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

并作座标变换

$$\xi = x, \quad \eta = y\sqrt{S+1}/\sqrt{x} \quad (30)$$

同时假定 $\psi, \psi_p, T, \sigma_p, T_p, C$ 可作如下展开

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \sqrt{\xi/(S+1)}\{f_0(\eta) + \xi^{-1}f_1(\eta) + \dots\}, \\ \psi_p &= \psi + \sqrt{\xi/(S+1)}\{\xi^{-1}g_1(\eta) + \dots\} \\ \sigma_p &= h_0(\eta) + \xi^{-1}h_1(\eta) + \dots \\ T &= \theta_0(\eta) + \xi^{-1}\theta_1(\eta) + \dots \\ T_p &= t_0(\eta) + \xi^{-1}t_1(\eta) + \dots \\ C(T) &= C_0[\theta_0(\eta)] + \xi^{-1}C_1[\theta_0(\eta), \theta_1(\eta)] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

将式(29)–(31)代入式(3)–(10), 显然式(3)和式(6)自动满足, 采用与上节相同的方法, 可得下列常微分方程: ($u_0(\eta)$ 和 $u_1(\eta)$ 是为了简化方程形式而引进的)

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= f_0'\theta_0, \quad u_0'' + (\omega\theta_0'/\theta_0 + f_0\theta_0/2\theta_0'^{+1})u_0' = 0 \\ \theta_0'' + \omega\theta_0'^2/\theta_0 + [Pr(1 + Sc_s^*/c_p^*)/2(1+S)]f_0\theta_0'/\theta_0 + (\gamma - 1)PrMa_\infty^2(u_0')^2 &= 0 \\ h_0\theta_0 &= 1 \quad t_0 = \theta_0 \\ f_0u_0'/2 + (S+1)[\omega\theta_0'^{-1}\theta_0'u_0' + \theta_0'u_0''] &= Sh_0[g_1'\theta_0 - (\theta_0^2h_1 + \theta_1)f_0]\theta_0 - f_0\theta_0'/2 \\ &= (S+1)\{\omega\theta_0'^{-1}\theta_0'^2 + \theta_0'\theta_0''\}/Pr + (S+1)(\gamma - 1)Ma_\infty^2\theta_0'u_0'^2 \\ &\quad + 2Sh_0(t_1 - \theta_1)\theta_0'/3Pr \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= f_0'\theta_1 + f_1'\theta_0 \\ [(S+1)\theta_0''u_1' + [f_0/2 + \omega(S+1)\theta_0'^{-1}\theta_0']u_1' + f_0'(1+S)u_1 + Sf_0\theta_0f_1'/2 \\ &+ f_0\theta_0'f_1'/2 - (1+S)u_0'f_1/2 + [(S+1)\omega\theta_0'^{-1}u_0' - Sf_0^2]\theta_1 + [(S+1)\omega\theta_0'^{-1}u_0' \\ &+ (S+1)\omega(\omega - 1)\theta_0'^{-2}u_0'\theta_0']\theta_1 + Sf_0f_0\theta_0^2h_1/2 + Sf_0\theta_0g_1'/2 + f_0\theta_0'g_1'/2 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
& -Su'_0g_0/2 + [-Sf_0'^2\theta_0^2 - Sf_0'f_0'\theta_0^2/2 - S\theta_0'u_0f_0]h_1 + Sf_0'g_0'\theta_0 = 0 \\
& - (S+1)\theta_0'\theta_1'/Pr - [f_0/2 + 2(S+1)\omega\theta_0'^{-1}\theta_0'/Pr]\theta_1' \\
& - [f_0' + (S+1)\omega(\omega-1)\theta_0'^{-1}\theta_0'/Pr + \omega(S+1)(\gamma-1)Ma_\infty^2\theta_0'^{-1}u_0'^2]\theta_1 \\
& + \theta_0'[1 + Sc_p^*/c_p^*]f_1/2 + \theta_0'Sg_1c_p^*/2c_p^* - Sc_p^*f_0't_1/c_p^* \\
& - f_0c_p^*St_1'/2c_p^* - (\gamma-1)Ma_\infty^2S\theta_0'^{-1}[g_1'\theta_0 - (\theta_0^2h_1 + \theta_1)f_0']^2 \\
& = 2(S+1)Ma_\infty^2(\gamma-1)u_0'u_1' \\
& [(g_1 + g_1'\eta)\theta_0 - h_1\theta_0(\eta f_0' - f_0) + \theta_1(f_0'\eta - f_0)/\theta_0] \\
& = [u_0^2\eta + f_0\theta_0u_0'\eta - f_0\theta_0u_0 - \theta_0'f_0^2\theta_0]/2\theta_0^2
\end{aligned}$$

为了方便,把式(32)称为第三组方程,式(33)称为第四组方程。以上共十一个方程,十一个未知函数($u_0, f_0, h_0, \theta_0, t_0, f_1, u_1, h_1, \theta_1, t_1, g_1$),相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned}
& \text{(i)} f_0(0) = 0; \quad \text{(ii)} f_1(0) = f_1(\infty) = 0; \quad \text{(iii)} u_0(0) = 0, u_0(\infty) = 1 \\
& \text{(iv)} u_1(0) = u_1(\infty) = 0; \quad \text{(v)} \theta_0(0) = \theta_w, \theta_0(\infty) = 1; \quad \text{(vi)} \theta_1(0) = 0 \\
& \theta_1(\infty) = 0; \quad \text{(vii)} t_0(\infty) = 1; \quad \text{(viii)} t_1(\infty) = 0; \quad \text{(ix)} h_0(\infty) = 1; \\
& \text{(x)} h_1(\infty) = 0; \quad \text{(xi)} g_1(0) = g_1(\infty) = 0
\end{aligned} \right\} \quad (34)$$

五、方程的性质及其求解

四组方程各自都是互相耦合在一起的两点边值问题。由于前三组方程中各有一些方程不能直接积分出来,而在对它们进行数值积分时,各有两个边界条件在边界层外缘给出,必须在壁面附近先假定两个边界条件,并判定积分结果是否满足外缘条件才能得到问题的解。这类问题我们称为两重耦合的两点边值问题。物理上反映了边界层速度和温度分布间的相互影响。本文从粘性系数的幂次律出发,假定 $Pr = 0.69$, 采用试凑法严格求解了前三组方程。由于没作可压缩变换,采用物理座标,使用很方便。第一组方程的解实为单相流平板边界层数值解,也可供纯气体边界层计算使用。

第四组方程耦合度超过两重,需试凑出 $u_1'(0), \theta_1'(0)$ 和 $g_1'(0)$, 还要求 $u_1(\infty) = \theta_1(\infty) = g_1(\infty) = 0$, 难于选择正确解,我们只从式(33)求出了两相速度和温度差的一级近似。

文献[6]采用 Emmons 变换后求扰动解,所遇到的困难与本文相同,由此可见,平板下游一阶扰动方程超过两重耦合,这是含灰气体边界层的基本特征之一。用差分法求解本问题时的困难,我们将另文讨论。

六、计算结果和讨论

表 1 和表 2 列出了含灰空气(比热比 $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.69$, $\omega = 0.666$)的结果。图 1—图 4 都是针对 $(\gamma-1)Ma_\infty^2 = 1$, $\theta_0(0) = 1/2$ 给出的。图中 $K = (1 + Sc_p^*/c_p^*)/(1 + S)$ 表征灰尘浓度和比热对气、固两相的温度分布和速度分布零阶近似影响的综合参数。从表中不难看出壁温比和来流 Mach 数对计算结果的影响。

由表 1,可根据下式计算平板前缘的摩擦力和热流:

$$\tau_w^*/\sigma_\infty^*u_\infty^{*2} = (1/\sqrt{Re_x^*})(T_w^*/T_\infty^*)^\omega [u_0'(0) + u_1'(0)x^*/\lambda_{m\infty}^* + \dots] \quad (35)$$

表 1 几种常用壁温 T_w/T_∞ 和不同来流 Ma_∞ 下平板前缘的 $u'_0(0)$ 、 $\theta'_0(0)$ 、 $u'_1(0)$ 和 $\theta'_1(0)$ 值

T_w/T_∞	Ma_∞	$u'_0(0)$	$\theta'_0(0)$	$u'_1(0)$	$\theta'_1(0)$
0.25	0.00	0.9197	0.6005	0.8569	0.5287
	0.50	0.9177	0.6326	0.8764	0.5574
	1.00	0.9120	0.7285	0.9361	0.6494
	1.58	0.9029	0.9183	1.0623	0.8635
0.50	0.00	0.5564	0.2430	0.9088	0.3614
	0.50	0.5554	0.2628	0.9228	0.3830
	1.00	0.5525	0.3218	0.9650	0.4514
	1.58	0.5472	0.4382	1.0517	0.6051
1.00	0.00	0.3321	0.0000	1.1467	0.0000
	0.50	0.3316	0.0121	1.1576	0.0182
	1.00	0.3304	0.0481	1.1906	0.0754
	1.58	0.3380	0.1193	1.2576	0.2021

表 2 几种常用壁温 T_w/T_∞ 和不同来流 Ma_∞ 数下, 平板下游的 $u'_0(0)$ 、 $\theta'_0(0)$ 与 K 的关系

T_w/T_∞	Ma_∞	$K = 0.80$		$K = 0.90$		$K = 1.00$	
		$u'_0(0)$	$\theta'_0(0)$	$u'_0(0)$	$\theta'_0(0)$	$u'_0(0)$	$\theta'_0(0)$
0.25	0.00	0.9255	0.5553	0.9224	0.5787	0.9197	0.6005
	0.50	0.9212	0.5886	0.9203	0.6115	0.9177	0.6326
	1.00	0.9171	0.6881	0.9144	0.7091	0.9120	0.7285
	1.58	0.9058	0.8841	0.9040	0.9018	0.9023	0.9183
0.50	0.00	0.5583	0.2245	0.5573	0.2341	0.5564	0.2430
	0.50	0.5573	0.2451	0.5563	0.2543	0.5554	0.2628
	1.00	0.5541	0.3060	0.5533	0.3142	0.5426	0.3218
	1.58	0.5482	0.4261	0.5477	0.4324	0.5472	0.4382
1.00	0.00	0.3321	0.0000	0.3321	0.0000	0.3321	0.0000
	0.50	0.3316	0.0124	0.3316	0.0122	0.3316	0.0121
	1.00	0.3303	0.0495	0.3303	0.0487	0.3304	0.0481
	1.58	0.3277	0.1228	0.3279	0.1210	0.3280	0.1193

$$g_w^* = - (T_w^* k_w^* / x^*) \sqrt{Re_x^*} (T_w^* / T_\infty^*)^\omega [\theta'_0(0) + \theta'_1(0) x^* / \lambda_{m\infty}^* + \dots] \quad (36)$$

其中

$$Re_x^* = \sigma_\infty^* \mu_\infty^* x^* / \mu_w^*, \quad k_w^* = c_p^* \mu_w^* / Pr.$$

由表 2, 可根据下式计算平板下游的摩擦力和热流

$$\tau_w^* / \sigma_\infty^* \mu_\infty^{*2} = \sqrt{(S+1)} / Re_x^* (T_w^* / T_\infty^*)^\omega [u'_0(0) + u'_1(0) \lambda_{m\infty}^* / x^* + \dots] \quad (37)$$

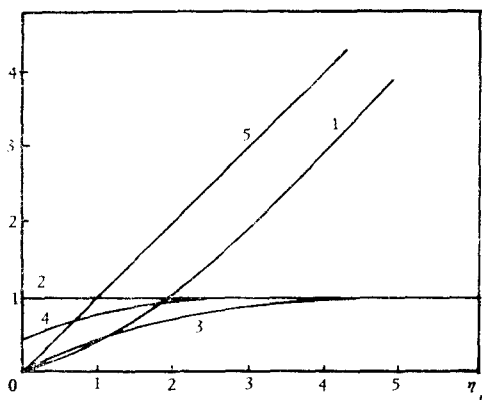


图 1 平板前缘气固两相流动参数的零阶近似

1 $f_0(\eta)$; 2 $u_{p0}(\eta), t_{p0}(\eta)$; 3 $u_0(\eta)$;
4 $\theta_0(\eta)$; 5 $g_0(\eta)$

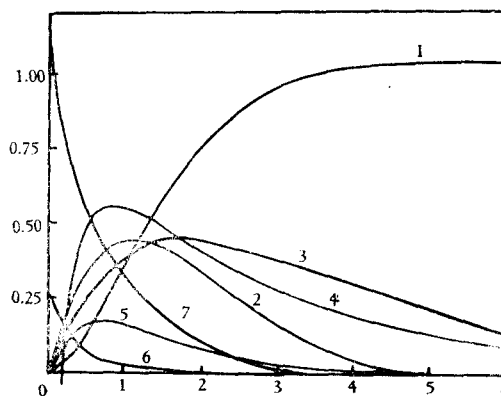


图 2 平板前缘气固两相流动参数的一阶近似

1 $f_1(\eta)$; 2 $u_1(\eta)/S$; 3 $g_1(\eta)$; 4 $-h_1(\eta)$
5 $\theta_1(\eta)/S$; 6 $[3c_p^*Pr/4c_p^*]t_1(\eta)$; 7 $u_{p1}(\eta)$

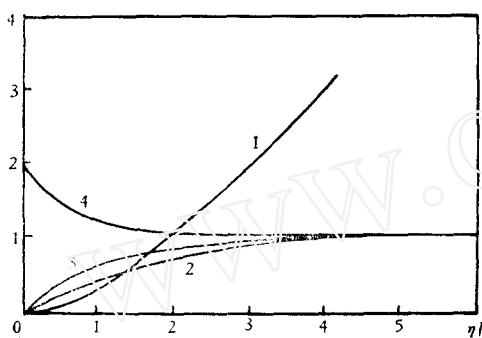


图 3 平板下游气固两相流动参数的零阶近似 ($K=1$)

1 $f_0(\eta)$; 2 $u_0(\eta), u_{p0}(\eta)$; 3 $\theta_0(\eta)$; 4 $h_0(\eta)$

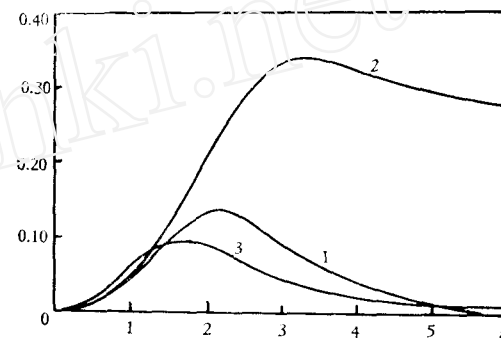


图 4 平板下游两相流动参数的一阶近似 ($K=1$)

1 $v_{p1} - u_1$; 2 $(u_{p1} - v_1)\sqrt{1+S}$; 3 $t_1 - \theta_1$

$$q_w^* = -(T_\infty^* k_\infty^* / x^*) \sqrt{(S+1) Re_x^*} (T_w^* / T_\infty^*)^\omega [\theta_0'(0) + \theta_1'(0) \lambda_{m\infty}^* / x^* + \dots] \quad (38)$$

当 $x^* \gg \lambda_{m\infty}^*$ 时, 上式取零阶近似已足够精确。

从本文的计算结果可以知道, 尽管气体中含有灰尘, 但平板前缘解的零阶近似仍与纯气体相同, 差异仅在一阶近似上。在平板后缘, 就摩阻和热流而言, 含灰气体比纯气体增加了一个因子 $\sqrt{S+1}$, 同时, 零阶近似还与 c_p^*/c_p 和 S 有关, 它们在方程中以综合参数 K 出现, 但计算表明, K 的影响很小。

本文得到俞鸿儒同志指导, 并与竺迺宜同志作过讨论, 谨向他们表示感谢。

参 考 文 献

[1] Marble, F. E., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 2(1970), 397—446.
 [2] Marble, F. E., *Proc. 5th AGARD Colloq. Combust. Propul.*, Braunschweig (1962), 175—213 (Pergamon Press, 1963).
 [3] Saffman, P. G., *J. F. M.*, 13, 1(1962).
 [4] Murray, J. D., *J. F. M.*, 21, 3(1965).

- [5] Chiu, H. H., Boundary Layer Flow with Suspended particles, Princeton University Report 620 (1962).
- [6] Singleton, R. E., *ZAMP* **16**, 4(1965).
- [7] White, F. M., *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill (1974).
- [8] Saffman, P. G., *J. F. M.*, **22** Part 2(1965); **31**, Part 3 (1968).
- [9] Rudinger, G., *Fundamentals of Gas-Particle Flow*, Elsevier Scientific Publishing Company (1980).

COMPRESSIBLE GAS-SOLID PARTICLE BOUNDARY LAYER OVER A SEMI-INFINITE FLAT PLATE

Zhao Guoying

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

The regular perturbation method is directly used in the initial portion and far down-stream regions of gas-solid particle boundary layer, and the governing equations are reduced into a series of ordinary differential equations, in which the velocity and temperature equations are matched. They are solved numerically for arbitrary Mach number, Prandtl number and wall temperature. The friction coefficient and heat transfer to the wall can easily be found from the tables given.