

孤立无力场磁拱的自洽模型

胡 文 瑞 李 建 国

(中国科学院力学研究所,北京)

摘 要

聚集强磁场的磁通量管是太阳表面磁场的基本位形。本文讨论了孤立磁通量管在太阳大气中的平衡位形。从数学上看,即使对于线性无力场模型,磁势的方程是线性的,但边界条件是非线性的,而且边界位置也需要由物理条件确定。对于孤立的无力场磁拱,在较大标高近似时,我们求出了均匀圆弧拱和非均匀拱模型的分析解。结果表明,对于不同的环向磁场,非线性问题可能无解,可能有解;非线性问题解的个数最多可以有四个,有时是两个。本文具体求出了胖拱近似和瘦拱近似下的分析解,从而揭示出磁拱结构的一般性质。

一、前 言

我们对太阳磁场的认识,从概念上发生了很大的变化。近十多年的观测不断揭示,太阳大气中的磁通量绝大部分都集中于一些孤立的磁通量管中。光球观测表明,活动区的磁通量有 90% 以上聚集在单个磁通量管的磁结中^[1],而宁静区中聚集在孤立磁力线管中的磁通量所占比例更高^[2,3]。这些磁力线管直径数百公里,其中的磁场强度约 0.1—0.15 T。随着空间观测的进展,远紫外和 X 射线的太阳像发现,磁弧和磁拱也是色球和日冕活动区中的基本结构形式^[4-6]。根据其成像特征,它们可分为过渡区磁弧和磁拱以及日冕弧和拱。

实验室中的磁场往往都是弥散的。在受控聚变装置中,为产生约束的磁场而历尽艰辛。研究太阳磁弧和磁拱的产生和约束条件,不仅是太阳物理的一个新问题,也可能对一般磁通量管的理解有所促进。大多数太阳物理的理论限于分析一维的孤立磁通量管(例如,见 Parker 专著^[7]及有关的文献)。另外一种途径是用连续磁场模型来近似描述(例如,见文献[8])。显然,实际的磁弧和磁拱至少是二维的,而且其位形受到磁通量管外部压力分布的显著影响。因此,发展二维的自洽模型就是研究磁弧和磁拱理论的重要问题。

在本文中,我们讨论一个孤立的磁通量拱。由于日冕中的压力标高很大以及热传导率也比较高,在不太大的日冕拱周围可以看成是等温的。这时,太阳的分层大气压力随高度的变化较小。孤立磁通量管内的磁场相对地较强,因而,可以用无力场模型来描述。而在磁通量管外,磁场相对较弱,压力梯度与重力平衡。在磁力线管的边界上,要求内部的磁压与外部的热力学压力平衡。建立完整的自洽孤立磁通量拱模型显然是相当困难的。我们将采用摄动展开

本文 1985 年 5 月 18 日收到。

的方法,分析对均匀模型的一个小非均匀偏离。

二、模型和假设

磁通量管浮出太阳表面以后,磁通量往往聚集在管中。对于双极的结构,将呈磁弧的位形。当磁弧大体不随时间变化时,它在太阳大气中保持平衡。对于无力场的磁弧和磁拱,其内部的磁压起主导作用。而在磁弧和磁拱的外边,气体的热力学压力为主。在磁弧或磁拱的边界,应满足总压守恒条件,磁场强度发生间断。所以,磁弧或磁拱的位形是太阳大气中的弧立磁结构模型。

无作用力磁场可以表示为

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha_1 \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

其中 α_1 为无力因子。我们讨论线性无力场,这时 α_1 为常数。磁弧的纵向尺度相对较长,在柱坐标系 (r, θ, z) 中,可以假设 $\partial/\partial z = 0$ 。这样,磁拱结构可以用二维模型描述。引进磁势函数 ϕ ,由 (2.2) 式可导出

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\partial \phi}{\partial r}. \quad (2.3)$$

将 (2.3) 式代入 (2.1) 式。对线性无力场,可得到

$$B_z = \alpha_1 \phi \quad (2.4)$$

和

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \phi = 0. \quad (2.5)$$

这样,方程 (2.4) 和 (2.5) 就是磁拱内部所满足的关系式。

在磁拱外部的太阳大气中,满足静力学平衡关系

$$\nabla p = -\rho \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

\mathbf{g} 是太阳重力加速度。若将重力方向取为 $-\mathbf{e}_z$, 则 (2.6) 式可导出

$$p(\zeta) = p_0(\zeta_0) \exp \left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{g d\zeta}{\mathcal{R} T} \right], \quad (2.7)$$

其中 \mathcal{R} 为气体常数, T 为太阳大气温度。太阳日冕中,大气温度变化不大,可以取为常数。这时, (2.7) 式可简化为

$$p(\zeta) = p_0(\zeta_0) \exp \left(-\frac{\zeta - \zeta_0}{h} \right), \quad (2.8)$$

其中的标高

$$h = \frac{\mathcal{R} T}{g}. \quad (2.9)$$

(2.8) 式就是磁拱外太阳大气中的静力学关系。

在磁拱的边界面 Γ_1 和 Γ_2 上,应该满足总压连续条件,即

$$\frac{1}{8\pi} (|\nabla \phi|^2 + \alpha_1^2 \phi^2) = p(r, \theta). \quad (2.10)$$

二维的磁拱模型就由方程 (2.4), (2.5), (2.8) 以及边界条件 (2.10) 描述。

利用 ζ 与 (r, θ) 之间的关系, 太阳大气的静力平衡条件 (2.8) 式可以写成

$$p(r, \theta) = p_0 \exp\left(-\frac{r \sin \theta}{h}\right), \quad (2.11)$$

其中 $p_0 = p(\zeta_0)$ 为常数. 这样, 太阳大气的压力部分就是已知的. 问题就归结为在给定边界条件下求解方程 (2.5). 由于边界条件 (2.10) 式是非线性的, 所以, 自洽磁拱模型的数学问题

也是非线性的, 而且这类非线性问题的解还不唯一. 这就是求解自洽模型的困难所在.

引进无量纲量

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad H = \frac{h}{r_0},$$

$$P = \frac{p}{p_0},$$

$$\Psi = \frac{\phi}{r_0 \sqrt{8\pi p_0}},$$

$$\alpha = \alpha_1 r_0, \quad (2.12)$$

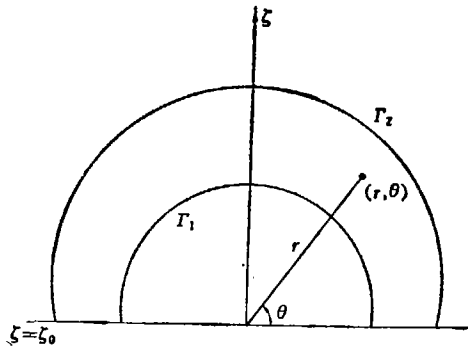


图 1 磁拱静力学平衡位形的示意图

其中 r_0 为问题的典型尺度, 则磁拱的数学描述可以写为

$$\mathcal{L}(\Psi) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Psi = 0, \quad (2.13)$$

$$\Psi(R, 0) = \Psi_0(R), \quad R_1 \leq R \leq R_2, \quad (2.14)$$

$$\Psi(R, \pi) = \Psi_\pi(R), \quad R_1 \leq R \leq R_2, \quad (2.15)$$

$$\left[\left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)^2 + \alpha^2 \Psi^2 \right]_{R_i} = [\exp(-R \sin \theta / H)]_{R_i} \quad (i = 1, 2), \quad (2.16)$$

其中, 磁通量守恒要求

$$\int_{R_1}^{R_2} \Psi_0(R) dR = \int_{R_1}^{R_2} \Psi_\pi(R) dR.$$

而且磁拱边界还需满足条件

$$\Psi(R, \theta)|_{R_i} = \Psi_i (\text{常数}), \quad i = 1, 2, \quad (2.17)$$

即磁拱边界为磁面. 不影响问题的实质而做简化, 如果我们讨论对称模型, 则条件 (2.15) 式可以改写成

$$\frac{\partial \Psi(R, \pi/2)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.18)$$

上述问题是一类自由边界问题, 即边界 R_1 和 R_2 并非已知, 而是要由条件 (2.16) 和 (2.17) 控制. 在某种意义上, 这种边值类似于非线性水波的情形.

三、大标高近似

如果取日冕温度 $T_0 \approx 2 \times 10^6$ K, 日冕拱的典型尺度 $r_0 = 10^9$ cm, 则无量纲标高

$$H \approx 6 \gg 1.$$

在此情形下, 自由边条件可近似地写为

$$\left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial R} \right)^2 \right]_{r_i} = 1 - \alpha^2 \Psi_i^2 \quad (i = 1, 2), \quad (3.1)$$

其中 Ψ_i 由纵向磁场的边界值确定。总压守恒条件要求 $1 - \alpha^2 \Psi_i^2 > 0$ 。

我们先讨论一维问题, 这时

$$\Psi(R, \theta) = \Psi_0(R). \quad (3.2)$$

在这种简单的情况下, 条件 (2.14), (2.15), (2.17) 和 (2.18) 式皆满足, 方程和边界条件可化简为非线性问题:

$$\frac{d^2 \Psi_0}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Psi_0}{dR} + \alpha^2 \Psi_0 = 0, \quad (3.3)$$

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_i)}{dR} \right]^2 + [\alpha \Psi_0(R_i)]^2 = 1 \quad (i = 1, 2), \quad (3.4)$$

边界条件是非线性的。线性方程 (3.3) 的通解为

$$\Psi_0(R) = a_1 J_0(\alpha R) + a_2 Y_0(\alpha R). \quad (3.5)$$

将解式 (3.5) 代入非线性边界条件 (3.4), 对于 $i = 1$ 和 2 , 我们得到 a_1 和 a_2 满足的两个代数方程

$$[a_1 J_1(\alpha R_1) + a_2 Y_1(\alpha R_1)]^2 + [a_1 J_0(\alpha R_1) + a_2 Y_0(\alpha R_1)]^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad (3.6)$$

$$[a_1 J_1(\alpha R_2) + a_2 Y_1(\alpha R_2)]^2 + [a_1 J_0(\alpha R_2) + a_2 Y_0(\alpha R_2)]^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (3.7)$$

消去 (3.6) 和 (3.7) 式中的 $a_1 a_2$ 项, 就导出联系 a_1^2 和 a_2^2 的方程

$$a_2^2 = \frac{(A_1 D - A_3) a_1^2 + \frac{1}{\alpha^2} (1 - D)}{A_4 - A_2 D}. \quad (3.8)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= J_0^2(\alpha R_1) + J_1^2(\alpha R_1), \quad A_2 = Y_0^2(\alpha R_1) + Y_1^2(\alpha R_1), \quad A_3 = J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2), \\ A_4 &= Y_0^2(\alpha R_2) + Y_1^2(\alpha R_2), \\ A_5 &= \frac{A_1 D - A_3}{A_4 - A_2 D}, \quad A_6 = \frac{1 - D}{\alpha^2 (A_4 - A_2 D)}, \\ D_1 &= J_0(\alpha R_1) Y_0(\alpha R_1) + J_1(\alpha R_1) Y_1(\alpha R_1), \\ D_2 &= J_0(\alpha R_2) Y_0(\alpha R_2) + J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_2), \\ D &= \frac{D_2}{D_1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

利用这些系数关系, (3.8) 式可缩写成

$$a_2^2 = A_5 a_1^2 + A_6. \quad (3.10)$$

将 (3.10) 式代入 (3.6) 式, 我们就得到 a_1 的方程为

$$\begin{aligned} & [(A_1 + A_2 A_5)^2 - 4 D_1^2 A_5] a_1^4 + \left[2(A_1 + A_2 A_5) \left(A_2 A_6 - \frac{1}{\alpha^2} \right) - 4 D_1^2 A_6 \right] a_1^2 \\ & + \left(A_2 A_6 - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

方程 (3.11) 可得出 a_1 的四个根

$$a_1 = \pm \left\{ \frac{A_8 \pm \sqrt{A_8^2 - A_7 \left(A_2 A_6 - \frac{1}{\alpha^2} \right)^2}}{A_7} \right\}^{1/2}, \quad (3.12)$$

其中记

$$\begin{aligned} A_7 &= (A_1 + A_2 A_5)^2 - 4D_1^2 A_5, \\ A_8 &= (A_1 + A_2 A_5) \left(A_2 A_6 - \frac{1}{\alpha^2} \right) - 4D_1^2 A_6. \end{aligned} \quad (3.13)$$

将每一个 a_1 的根代入 (3.8) 式, 可得到两个 a_2 的解, 它们大小相等, 但差一符号。这样, 我们就得到八对 a_1 和 a_2 的解, 但其中的四对仅与另四对相差一符号; 它们表示磁场的方向恰好相反, 而大小相同。若不计方向的差别, 约束磁拱可以有四种不同的位形。

将解 (3.5) 式代入 (2.3) 和 (2.4) 式, 磁场分布就可表示为:

$$B_r = 0, \quad (3.14)$$

$$B_\theta = \alpha [a_1 J_1(\alpha R) + a_2 Y_1(\alpha R)], \quad (3.15)$$

$$B_z = \alpha [a_1 J_0(\alpha R) + a_2 Y_0(\alpha R)]. \quad (3.16)$$

应该指出, 上述解式 (3.5) 在 $\alpha = 0$ 时不再成立。这时, 方程 (3.3) 和边界条件 (3.4) 化为

$$\frac{d^2 \psi_0(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d \psi_0(R)}{dR} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{d \psi_0(R_i)}{dR} = \pm 1 \quad (i = 1, 2), \quad (3.18)$$

不难得到方程 (3.17) 的通解为:

$$\psi_0(R) = a_1 + a_2 \ln R. \quad (3.19)$$

容易看出, 通解 (3.19) 式不可能同时满足 (3.18) 式所要求的两个边界条件。这表明, 势场位形的自由边界条件不可能是圆弧形。

四、非均匀磁拱

上节所讨论的均匀磁拱只是很特殊的情况。在大多数情况下, 磁拱的截面以及内部的磁场分布都是非均匀的, 应该由 (R, θ) 两个自变量来描述。从物理观点看, 即使对于较大的标高 H , 太阳大气中的压力也是随 (R, θ) 而变化的, 这就需要调节磁拱的形状和内部磁场的位形。相应地, 磁场分布也会偏离均匀磁拱的状态。

我们取小参数

$$\varepsilon = \frac{1}{H} \ll 1, \quad (4.1)$$

磁势函数可以表示为

$$\Psi(R, \theta) = \psi_0(R) + \varepsilon \Psi^{(1)}(R, \theta), \quad (4.2)$$

磁拱外的太阳大气压力则为:

$$P(R, \theta) = 1 - \varepsilon R \sin \theta. \quad (4.3)$$

这时,磁拱的内外边界亦偏离圆弧而变为

$$R = R_i + \varepsilon S_i(\theta) \quad (i = 1, 2). \quad (4.4)$$

由 $\psi_i(R, \theta)$ 的分布可以了解非均匀磁拱的性质.

先讨论非线性边值条件 (2.16) 式. 利用 (4.2)–(4.4) 式, 该条件可以表示为:

$$\left[\frac{d\psi_0(R_i)}{dR} \right]^2 + \alpha^2 \psi_i^2 + 2\varepsilon \left\{ \frac{d\psi_0(R_i)}{dR} \left[\frac{d^2\psi_0(R_i)}{dR^2} S_i(\theta) + \frac{\partial \psi^{(1)}(R_i, \theta)}{\partial R} \right] + \alpha^2 \psi_i \psi^{(1)}(R_i, \theta) \right\} \\ = 1 - \varepsilon R_i \sin \theta + O(\varepsilon^2) \quad (i = 1, 2). \quad (4.5)$$

利用均匀解条件 (3.8) 和 (3.9) 式, 边界条件 (2.17) 式要求

$$\psi^{(1)}(R_i, \theta) = -\frac{d\psi_0(R_i)}{dR} S_i(\theta) \quad (i = 1, 2). \quad (4.6)$$

进一步考虑到 (3.4) 和 (4.6) 式, 边界条件 (4.5) 式给出

$$\frac{\partial \psi^{(1)}(R_i, \theta)}{\partial R} = -\frac{d^2\psi_0(R_i)}{dR^2} S_i(\theta) - \frac{R_i}{2} \frac{d\psi_0(R_i)}{dR} \sin \theta \quad (i = 1, 2). \quad (4.7)$$

将上述关系代入方程 (2.13), 并利用边界条件 (2.14) 和 (2.18) 式, 我们得到

$$\mathcal{L}[\psi^{(1)}(R, \theta)] = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}(R, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad (4.9)$$

$$\psi^{(1)}(R, 0) = 0. \quad (4.10)$$

这样, 非均匀解问题就化为求解方程 (4.8) 和边界条件 (4.9), (4.10) 和 (4.7) 式. 要指出的是, 边界条件 (4.7) 式是给在 $R = R_i$ 上, 而不是给在待定边界 $R = R_i + \varepsilon S_i(\theta)$ 上. 非零边条件 (4.7) 式中包含两个待定函数 $S_i(\theta)$, 它们由 (4.6) 式列出的两个条件确定.

根据条件 (4.9) 和 (4.10) 式, 非均匀解 $\psi^{(1)}(R, \theta)$ 可以表示为:

$$\psi^{(1)}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(R) \sin [(2n+1)\theta]. \quad (4.11)$$

由方程 (4.8), 不难得到通解

$$A_n(R) = a_{1n} J_{2n+1}(\alpha R) + a_{2n} Y_{2n+1}(\alpha R). \quad (4.12)$$

由此导出非均匀解为:

$$\psi^{(1)}(R, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1n} J_{2n+1}(\alpha R) + a_{2n} Y_{2n+1}(\alpha R)] \sin [(2n+1)\theta]. \quad (4.13)$$

将 (4.4) 式中的函数 $S_i(\theta)$ 展开为:

$$S_i(\theta) = \sum s_{in} \sin [(2n+1)\theta], \quad (4.14)$$

其中 s_{in} 为待定系数. 这样, 边条件 (4.6) 式可导出两个条件

$$J_{2n+1}(\alpha R_1) a_{1n} + Y_{2n+1}(\alpha R_1) a_{2n} = \alpha [a_1 J_1(\alpha R_1) + a_2 Y_1(\alpha R_1)] s_{1n}, \quad (4.15)$$

$$J_{2n+1}(\alpha R_2) a_{1n} + Y_{2n+1}(\alpha R_2) a_{2n} = \alpha [a_1 J_1(\alpha R_2) + a_2 Y_2(\alpha R_2)] s_{2n}. \quad (4.16)$$

关系式 (4.15) 和 (4.16) 给出待定系数 a_{in} 与 s_{in} 之间的联系, 它们是

$$a_{1n} = f_{1n} s_{1n} + f_{2n} s_{2n}, \quad (4.17)$$

$$a_{2n} = f_{3n} s_{1n} + f_{4n} s_{2n}, \quad (4.18)$$

其中的系数

$$\begin{aligned}
 f_{1n} &= \frac{\alpha}{f_n} [a_1 J_1(\alpha R_1) + a_2 Y_1(\alpha R_1)] Y_{2n+1}(\alpha R_2), \\
 f_{2n} &= -\frac{\alpha}{f_n} [a_1 J_1(\alpha R_2) + a_2 Y_1(\alpha R_2)] Y_{2n+1}(\alpha R_1), \\
 f_{3n} &= -\frac{\alpha}{f_n} [a_1 J_1(\alpha R_1) + a_2 Y_1(\alpha R_1)] J_{2n+1}(\alpha R_2), \\
 f_{4n} &= \frac{\alpha}{f_n} [a_1 J_1(\alpha R_2) + a_2 Y_1(\alpha R_2)] J_{2n+1}(\alpha R_1), \\
 f_n &= J_{2n+1}(\alpha R_1) Y_{2n+1}(\alpha R_2) - J_{2n+1}(\alpha R_2) Y_{2n+1}(\alpha R_1).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

再由边界条件 (4.7) 式, 经过适当的运算, 就可导出确定系数 s_{in} 的方程:

$$\begin{aligned}
 \{[J_{2n}(\alpha R_i) - J_{2n+2}(\alpha R_i)] f_{1n} + [Y_{2n}(\alpha R_i) - Y_{2n+2}(\alpha R_i)] f_{3n}\} s_{1n} \\
 + \{[J_{2n}(\alpha R_i) - J_{2n+2}(\alpha R_i)] f_{2n} + [Y_{2n}(\alpha R_i) - Y_{2n+2}(\alpha R_i)] f_{4n}\} s_{2n} \\
 + \alpha [a_1 J_2(\alpha R_i) + a_2 Y_2(\alpha R_i) - \Psi_i] s_{in} = \frac{R_i \delta_{0n}}{\alpha^2 [a_1 J_1(\alpha R_i) + a_2 Y_1(\alpha R_i)]} \quad (i = 1, 2),
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 $\delta_{0n} = 1$, 若 $n = 0$; $\delta_{0n} = 0$, 若 $n \geq 1$. 由这两个关系立即导出

$$s_{in} = 0, \text{ 若 } n \geq 1 \quad (i = 1, 2), \tag{4.21}$$

而非零系数 s_{10} 和 s_{20} 的方程就简化为

$$\begin{aligned}
 \{f_{10}[J_0(\alpha R_i) - J_2(\alpha R_i)] + f_{30}[Y_0(\alpha R_i) - Y_2(\alpha R_i)]\} s_{10} \\
 + \{f_{20}[J_0(\alpha R_i) - J_2(\alpha R_i)] + f_{40}[Y_0(\alpha R_i) - Y_2(\alpha R_i)]\} s_{20} \\
 + \alpha [a_1 J_2(\alpha R_i) + a_2 Y_2(\alpha R_i) - \Psi_i] s_{i0} = \frac{R_i}{\alpha^2 [a_1 J_1(\alpha R_i) + a_2 Y_1(\alpha R_i)]} \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

由此定出 s_{10} 和 s_{20} 为:

$$s_{10} = \frac{d_5 d_4 - d_6 d_2}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, \tag{4.23}$$

$$s_{20} = \frac{d_1 d_6 - d_3 d_5}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, \tag{4.24}$$

其中

$$\begin{aligned}
 d_1 &= [J_0(\alpha R_1) - J_2(\alpha R_1)] f_{10} + [Y_0(\alpha R_1) - Y_2(\alpha R_1)] f_{30} + \alpha [a_1 J_1(\alpha R_1) \\
 &\quad + a_2 Y_1(\alpha R_1) - \Psi_1], \\
 d_2 &= [J_0(\alpha R_1) - J_2(\alpha R_1)] f_{20} + [Y_0(\alpha R_1) - Y_2(\alpha R_1)] f_{40}, \\
 d_3 &= [J_0(\alpha R_2) - J_2(\alpha R_2)] f_{10} + [Y_0(\alpha R_2) - Y_2(\alpha R_2)] f_{30}, \\
 d_4 &= [J_0(\alpha R_2) - J_2(\alpha R_2)] f_{20} + [Y_0(\alpha R_2) - Y_2(\alpha R_2)] f_{40} + \alpha [a_1 J_2(\alpha R_2) \\
 &\quad + a_2 Y_1(\alpha R_2) - \Psi_2], \\
 d_5 &= \frac{R_1}{\alpha^2 [a_1 J_1(\alpha R_1) + a_2 Y_1(\alpha R_1)]}, \\
 d_6 &= \frac{R_2}{\alpha^2 [a_1 J_1(\alpha R_2) + a_2 Y_1(\alpha R_2)]}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

这样,非均匀解就表示为:

$$\Psi^{(1)}(R, \theta) = [(f_{10} s_{10} + f_{20} s_{20}) J_1(\alpha R) + (f_{30} s_{10} + f_{40} s_{20}) Y_1(\alpha R)] \sin \theta. \quad (4.26)$$

应该指出的是,由 (4.2) 式所定义的磁势函数 $\Psi(R, \theta)$ 其定义域为:

$$R_1 + \varepsilon s_1 \leq R \leq R_2 + \varepsilon s_2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (4.27)$$

因此,不仅非均匀磁势 $\Psi^{(1)}(R, \theta)$,而且均匀磁势 $\Psi_0(R)$,都应该有相同的定义域 (4.27) 式。前一节所得到的均匀解是定义在区域

$$R_1 \leq R \leq R_2 \quad (4.28)$$

之中。这就需要将函数 $\Psi_0(R)$ 从区域 (4.28) 式延拓到区域 (4.27) 中。对于线性问题,显然是不难做到的。

五、渐近情况

为了更好地理解孤立磁拱的性质,我们讨论两种渐近情况,这时的解可以分析给出。

1. 胖拱近似

当拱的宽度 $R_2 - R_1$ 远大于内径 R_1 时,就是胖拱。具体地,我们假设

$$(\alpha R_1)^2 \ll (\alpha R_2)^2 = O(1). \quad (5.1)$$

这时,小宗量 αR_1 的 Bessel 函数可以近似地用其渐近展开的主要项表示,诸如

$$J_0(\alpha R_1) = 1 - \frac{(\alpha R_1)^2}{4} + \dots, \quad J_1(\alpha R_1) = \frac{(\alpha R_1)}{2} + \dots,$$

$$Y_0(\alpha R_1) = \frac{2}{\pi} (\ln \alpha R_1 - 0.11593) + \dots,$$

等等。根据 (3.9) 和 (3.13) 式就可以求出系数 A_i 和 D_i , 进而得到

$$a_1 \simeq \pm \frac{1}{\alpha \sqrt{A_3}}, \quad (5.2)$$

再由 (3.10) 式可导出

$$a_2 \simeq \pm \frac{\pi a}{2} (\alpha R_1), \quad (5.3)$$

其中 a 为量级为 1 的系数,其定义为

$$a = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{4 \ln \alpha R_1 - 0.61593}{D_2} - \left(1 + \frac{1}{A_3} \right)^{1/2} \right]. \quad (5.4)$$

由解式 (3.5) 就得到

$$\Psi_0(R) = \pm \left[\frac{1}{\alpha} \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}} \pm \frac{\pi a}{2} (\alpha R_1) Y_0(\alpha R) \right]. \quad (5.5)$$

不难看出,解式 (5.5) 右端第二项只在 $R = R_1$ 附近才有贡献。在 $R = R_2$ 附近,解式 (5.5) 可近似地写成

$$\Psi_0(R) \simeq \pm \frac{1}{\alpha} \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}}. \quad (5.6)$$

这个解就是 $R_1 \rightarrow 0$ 时的解,我们将在另文中仔细分析^[9]。

进一步,可类似地分析二维解 (4.26) 式。在胖拱近似条件下,由 (4.19) 式求出 f_{kn} , 由 (4.25) 式求出 d_k , 再由 (4.23) 和 (4.24) 式定出 s_{10} 和 s_{20} 。利用这些结果,经过一些运算可导

出

$$\Psi^{(1)}(R, \theta) = \frac{R_2}{S} \left[\frac{J_1(\alpha R)}{(\alpha R_1)} + \pi Y_1(\alpha R) \right] \sin \theta, \quad (5.7)$$

其中的系数 S 为

$$S = \pi \alpha^2 a J_1(\alpha R_2) Y_1(\alpha R_2) \left[\frac{J_0(\alpha R_2) - J_2(\alpha R_2)}{J_1(\alpha R_2)} + \frac{1}{2} \frac{Y_0(\alpha R_2) - Y_2(\alpha R_2)}{Y_1(\alpha R_2)} \right]. \quad (5.8)$$

解式 (5.7) 表明, $Y_1(\alpha R)$ 项的贡献主要在 $R=R_1$ 附近; 当 $R \gg R_1$ 时, $J_1(\alpha R)$ 项的贡献为主。

如果我们主要关心 $R \gg R_1$ 区域中的解, 利用 (5.6) 和 (5.8) 式, 解式 (4.2) 可表示为

$$\Psi(R, \theta) = \pm \frac{1}{\alpha} \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}} + \frac{\varepsilon R_2}{\alpha R_1 S} J_1(\alpha R) \sin \theta. \quad (5.9)$$

相应的磁场分布为

$$\begin{aligned} B_r &= \left(\frac{\varepsilon R_2}{\alpha R_1 S} \right) \frac{J_1(\alpha R)}{R} \cos \theta, \\ B_\theta &= \mp \frac{J_1(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}} + \varepsilon \frac{R_2}{2R_1 S} [J_0(\alpha R) - J_2(\alpha R)] \sin \theta, \\ B_z &= \pm \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)}} + \varepsilon \frac{R_2}{R_1 S} J_1(\alpha R) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.10)$$

利用磁场分布 (5.10) 式, 由磁力线方程

$$\frac{dR}{B_r} = \frac{R d\theta}{B_\theta} = \frac{dz/r_0}{B_z}, \quad (5.11)$$

可导出磁力线的轨迹。例如, 由 (5.11) 式的前一等式得到积分关系

$$R = R_0 - \varepsilon \frac{R_2}{\alpha R_1 S} \sqrt{J_0^2(\alpha R_2) + J_1^2(\alpha R_2)} \sin \theta. \quad (5.12)$$

这表明, 在平面 $z = \text{常数}$ 中, 磁力线不再是半圆线, 而是在半圆之外 ($\varepsilon/s < 0$) 或半圆之内 ($\varepsilon/s > 0$)。这个结果与假设 (4.4) 式一致。

2. 瘦拱近似

当 $R_2 - R_1 \ll R_1$ 时, 就得到瘦拱近似。这时, 我们不妨记

$$R_1 = R_2 - \Delta, \quad \Delta \ll 1. \quad (5.13)$$

先考虑均匀解 (3.5) 式, 它应满足两个边界条件 (3.4) 式, 分别对应于 $R = R_1$ 和 R_2 。将 (5.13) 式代入 $R = R_1$ 的边条件 (3.4) 式, 不难导出

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR} \right]^2 + [\alpha\Psi(R_2)]^2 - 2\Delta \frac{d\Psi_0(R_2)}{dR} \left[\frac{d^2\Psi_0(R_2)}{dR^2} + \alpha^2\Psi_0(R_2) \right] + O(\Delta^2) = 1. \quad (5.14)$$

利用 $R = R_2$ 的边值条件,

$$\left[\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR} \right]^2 + \alpha^2\Psi_0^2(R_2) = 1. \quad (5.15)$$

(5.14) 式即导出

$$\frac{d\Psi_0(R_2)}{dR} \left[\frac{d^2\Psi_0(R_2)}{dR^2} + \alpha^2\Psi_0(R_2) \right] = 0. \quad (5.16)$$

不难证明, 对于解式 (3.5), 由 (5.16) 式导出的两个关系式

$$\frac{d\psi_0(R_2)}{dR} = 0 \quad (5.17)$$

和

$$\frac{d^2\psi_0(R_2)}{dR^2} + \alpha^2\psi_0(R_2) = 0 \quad (5.18)$$

是等价的。这样,由边界条件(5.15)和(5.17)式就求出系数 a_1 和 a_2 , 相应的解 (3.5) 可表为:

$$\psi_0(R) = \pm \frac{1}{\alpha} \frac{Y_1(\alpha R_2)J_0(\alpha R) - J_1(\alpha R_2)Y_0(\alpha R)}{J_0(\alpha R_2)Y_1(\alpha R_2) - J_1(\alpha R_2)Y_0(\alpha R_2)} \quad (5.19)$$

再进一步分析非均匀解 (4.13)。如果限于考虑等压大气的情况,利用关系 (5.13) 式作展开,则两个边界条件 (4.7) 式化为

$$\psi^{(1)}(R_2, \theta) = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}(R_2, \theta)}{\partial R} = - \frac{d^2 \psi_0(R_2)}{dR^2} s_{1n}(\theta). \quad (5.21)$$

由此可求出系数 a_{1n} 和 a_{2n} , 并将解 (4.13) 式表示为

$$\psi^{(1)}(R, \theta) = \pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_{2n+1}(\alpha R_2)J_{2n+1}(\alpha R) - J_{2n+1}(\alpha R_2)Y_{2n+1}(\alpha R)}{J_{2n+1}(\alpha R_2)Y_{2n+2}(\alpha R_2) - Y_{2n+1}(\alpha R_2)J_{2n+2}(\alpha R_2)} s_{1n} \sin [(2n+1)\theta]. \quad (5.22)$$

类似地,我们可以讨论瘦拱的许多特性。

从电动力学的概念可知,一个瘦环在真空介质中通电流后,要受径向 Lorentz 力而运动,难于维持平衡。对于瘦拱也应有类似的情况。条件 (5.17) 式表明,瘦拱的电流基本上是沿着 z 轴方向,环向的磁通量甚少。

六、小 结

约束磁场的概念在天体物理中经常采用,它不仅受到观测的支持,而且避免了无界无力场模型引进的许多数学上的不确定性。

约束磁通量问题的一个主要特点是,其数学描述为非线性自由边值问题。这类问题的求解是比较复杂的。本文分析了一类特定的磁拱位形,即对均匀磁拱的弱非均匀偏离,并且具体地讨论了胖拱和瘦拱两种近似情况。

磁拱位形延伸于 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的空间。类似的方法,若将定义空间开拓到 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则可用于日珥的无力场模型。这种日珥模型是约束于太阳大气之中。

一般而言,要完整地求解一般的非线性自由边界问题,需要采用数值计算的方法来求解。相应的结果将在另文中讨论。

参 考 文 献

- [1] Beckers, J. M., Schorter, E. H., *Solar Phys.*, 4(1968), 142, 165.
- [2] Howard, R., Stenflo, J. O., *ibid.*, 22(1972), 402.
- [3] Frazier, E. N., Stenflo, J. O., *ibid.*, 27(1972), 330.
- [4] Cheng, C. C., *Astrophys. J.*, 238(1980), 743.
- [5] Sheeley, N. R., *Solar Phys.*, 66(1980), 79.
- [6] Cheng, C. C. et al., *ibid.*, 66(1980), 259.
- [7] Parker, E. N., *Cosmical Magnetic Field*, ch. 6, 7, Clarendon Press, 1979.
- [8] 胡文瑞, 空间科学学报, 1(1981), 93.
- [9] 李建国, 胡文瑞, 天文学报, 27(1986), 3: 254.