

研究简讯

# 具有间断界面的无力场模型\*

胡文瑞 李建国  
(中国科学院力学研究所)

### 提 要

本文描述了有接触间断界面的无力场区域,它可用于分析磁通量区在太阳和恒星大气中的浮出.通过一维问题解,显示了约束无力场模型与半无界无力场模型之间的重大差别.

无力场模型在天体物理中有广泛的应用<sup>[1-4]</sup>.半无限空间的线性无力场在数学上存在解不唯一的困难<sup>[5]</sup>.线性无力场近似在物理上的不足又促使发展了非线性无力场理论<sup>[6-9]</sup>,它的解也往往是多值的<sup>[10-13]</sup>.事实上,强磁场从对流区浮出时与太阳大气会有一交局,构成间断模型.间断模型与目前广泛分析的无界连续模型在数学描述和物理含义上都有很大的不同.

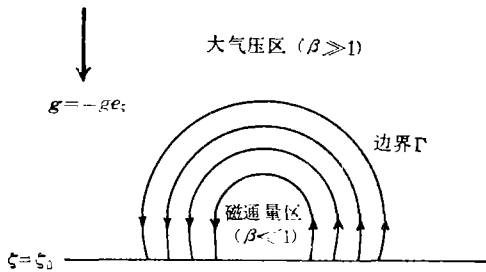


图1 约束无力场模型

Fig. 1 The Schematic of confined force-free field model

本文尝试建立定量的理论模型,异具体地分析一类一维场的性质.

讨论如图1所示的位形.磁通量区域( $\beta \ll 1$ )与大气区域( $\beta \gg 1$ )通过接触间断面 $\Gamma$ 分开.在大气区域中,满足条件压力梯度与重力平衡:

$$\nabla p_c = -\rho_c g, \tag{1}$$

其中重力  $g = -g e_z$ . 对等温大气有

$$p_c(\zeta) = p_c(\zeta_0) \exp\left(-\frac{\zeta - \zeta_0}{h}\right), \tag{2}$$

这里的标高  $h = \frac{\mathcal{R}T}{g}$ , 而  $\mathcal{R}$  为气体常数.

对无力场模型,在柱坐标  $(r, \theta, z)$  中,若假设  $\partial/\partial z = 0$ , 将磁场写为

$$B = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, d\psi, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \tag{3}$$

\* 1985年4月19日收到.

$\psi$  的方程可表示为<sup>[14]</sup>

$$\mathcal{L}(\psi) \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \alpha_*^2 \psi = 0 \quad (4)$$

$\alpha_*$  为常数无力因子。

边界  $\Gamma$  上应满足总压守恒, 它可以导出为

$$\frac{1}{8\pi} (|\nabla \psi|^2 + \alpha \psi^2) = p_e(\zeta_0) \exp\left(-\frac{r \sin \theta}{h}\right). \quad (r \in \Gamma) \quad (5)$$

此外, 还有磁场边界条件

$$\psi(r, 0) = \psi_0(r), \quad \psi(r, \pi) = \psi_\pi(r). \quad (6)$$

这样, 问题就归结为在边界条件 (5) 和 (6) 下求解方程 (4)。问题的复杂性在于, 边界值 (5) 是非线性的<sup>[15]</sup>, 而且边界  $\Gamma$  是待定的<sup>[16]</sup>。这在地磁场及水波问题中都常遇到。

引进无量纲量

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad H = \frac{h}{r_0}, \quad \alpha = \alpha_* r_0, \quad \Psi = \frac{\psi}{r_0 \sqrt{8\pi p_e(\zeta_0)}}. \quad (7)$$

若讨论对称问题, 边条件 (6) 的第二式化为  $\frac{\partial \psi(r, \pi/2)}{\partial \theta} = 0$ 。这时, 无量纲方程和边界条件可写为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \alpha^2 \Psi = 0. \quad (8)$$

$$\Psi(R, 0) = \Psi_0(R), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Psi(R, \pi/2)}{\partial \theta} = 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2 + (\alpha \Psi)^2 = \exp\left(-\frac{R \sin \theta}{H}\right). \quad (r \in \Gamma) \quad (11)$$

显然, 约束无力场区域的边界  $\Gamma$  为一磁面, 即

$$\Psi(R, \theta)|_{\Gamma} = \Psi_{\Gamma} \text{ (常数)}. \quad (12)$$

我们讨论一维模型。这时的问题可描述为

$$\frac{d^2 \Psi(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Psi(R)}{dR} + \alpha^2 \Psi = 0, \quad (13)$$

$$\left[\left(\frac{d\Psi}{dR}\right)^2 + (\alpha \Psi)^2\right]_{R=R_r} = 1. \quad (14)$$

式 (14) 为非线性边值。方程 (13) 的通解为

$$\Psi(R) = \begin{cases} a J_0(\alpha R) + a_0 Y_0(\alpha R), & (\alpha \neq 0) \\ a_1 \ln R + a_2, & (\alpha = 0) \end{cases} \quad (15)$$

$$\quad (16)$$

其中  $a_i$  皆为常数。显见, 当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 解 (15) 趋于 (16)。若讨论正则解, 则要求  $a_0 = 0$  或  $a_1 = 0$ 。将解式 (15) 代入边条件 (14), 不难求出

$$\Psi(R) = \pm \frac{1}{\alpha} \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_{\Gamma}) + J_1^2(\alpha R_{\Gamma})}}. \quad (17)$$

相应的磁场分布为

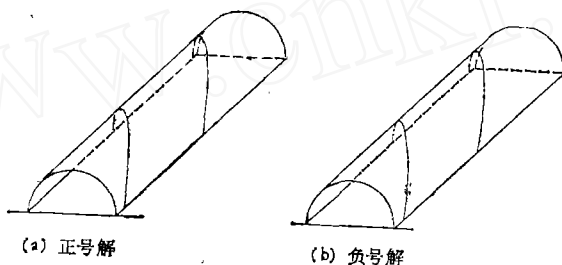
$$B = \left( 0, \pm \frac{J_1(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}}, \pm \frac{J_0(\alpha R)}{\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}} \right). \quad (18)$$

对于不太大的  $\alpha R$  值, 式 (18) 中止, 负号的两个解分别如图 2 (a) 和 (b) 所示, 都是左手螺旋方向。图 3 给出磁场随  $\alpha R$  的分布, 它必须在某个半径  $R_r$  处截断, 不会出现无界模型中磁场交替变号的困难。单向的磁通量区域要求

$$\alpha R_r < 3.8317, \quad (19)$$

如果纵场  $B_z$  也不改变方向, 则要求

$$\alpha R_r < 2.4048. \quad (20)$$



(a) 正号解 Positive Solution                      (b) 负号解 Negative Solution

图 2 约束无力场模型非线性边值两组解的位形

Fig. 2 The configurations of two solutions of non-linear boundary value problems for the confined force-free field model

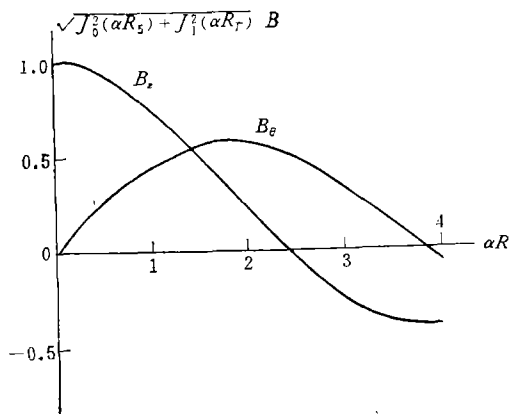


图 3 一维模型的磁场分布

Fig. 3 The distribution of magnetic field for one-dimensional model.

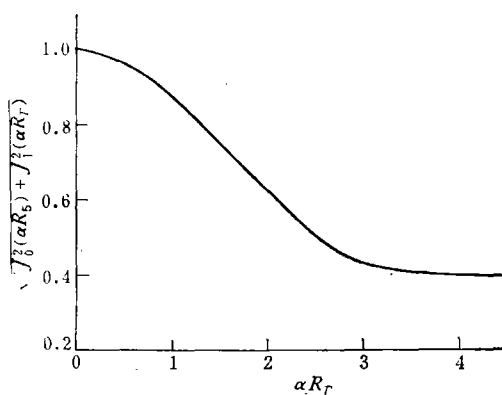


图 4  $\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}$  随  $\alpha R_r$  的分布

Fig. 4 The distribution of  $\sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)}$  with  $\alpha R_r$ .

解式 (17) 和 (18) 中有一个共同的分母  $[J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)]^{1/2}$ 。图 4 给出了该分母随  $\alpha R$  的分布, 它随  $\alpha R$  增加而单调减少。对于同样半径  $R$ , 若边界  $R_r$  较大则磁场较强。这个结论与固定  $p_e(\zeta_0)$  有关。

当分析磁通量区域的浮沉时, 还必须计入速度的影响。若把  $R_r$  看成时间的函数, 则一维无力场解 (17) 和 (18) 仍成立。感应方程可写为

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = -\frac{\partial v_r B_\theta}{\partial r}. \quad (21)$$

将解(18)代入上式, 不难导出

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \sqrt{J_0^2(\alpha R_r) + J_1^2(\alpha R_r)} = \frac{1}{J_1(\alpha R)} \frac{\partial}{\partial R} \left[ J_1(\alpha R) \frac{v_r}{r_0} \right]. \quad (22)$$

(22) 式左端为时间  $t$  的函数, 将它记为  $\lambda(t)$ . 由式(22)两端分别导出径向速度  $v_r$  和边界  $R_r(t)$  满足

$$v_r = \frac{r_0 \lambda(t)}{\alpha} \frac{1 - J_0(\alpha R)}{J_1(\alpha R)}, \quad (23)$$

$$J_0^2[\alpha R_r(t)] + J_1^2[\alpha R_r(t)] = \exp[2(\int \lambda(t) dt + \lambda_1)] \quad (24)$$

上述关系式表明,  $\lambda > 0$  时, 磁力线向外推移,  $R_r(t)$  将增大; 反之,  $\lambda < 0$  时, 磁力线向内挤,  $R_r(t)$  将减少. 这样, 就把通常的静力学模型自洽地推广到运动学模型. 当磁通量区根部外移 ( $R_r$  增大) 时, 磁通量相应地增大.

本文的一维约束无力场模型可以推广到二维的情况. 特别是对近圆位形, 利用小参数展开可导出二维分析解. 对于非大标高情况, 可用数值方法进行分析.

### 参 考 文 献

- [1] 胡文瑞, 无作用力磁场, 自太阳耀斑 (1983) 科学出版社.
- [2] Nakagawa, Y., Raadu, M. A., *Solar Phys.*, **19** (1971), 72.
- [3] Nakagawa, Y., Raadu, M. A., *Solar Phys.*, **25** (1972), 127.
- [4] Raadu, M. A., Nakagawa, Y., *Solar Phys.*, **20**(1971), 64.
- [5] Chiu, Y. T., Hilton, H. H., *Ap. J.*, **212** (1977), 873
- [6] Sakurai, T., *Solar Phys.*, **69** (1981), 434.
- [7] Barnes, C. W., Sturrock, P. A., *Ap. J.*, **174** (1972), 659.
- [8] Low, B. C., Nakagawa, Y., *Ap. J.* **199** (1975), 237.
- [9] 胡文瑞, 空间物理论文集, (1980) p. 88 科学出版社.
- [10] Milson, F., Wright, A. E., *M. N.*, **174** (1976), 307.
- [11] Jockers, K., *Solar Phys.*, **50** (1976), 405.
- [12] Jockers, K., *Solar Phys.*, **56** (1976), 37.
- [13] Low, B. C., *Ap. J.* **212** (1977), 234.
- [14] 胡文瑞, 自然杂志, **2**(1979), 595.
- [15] Backus, G. E., *J. Geophys. Res.*, **75** (1970), 6339.
- [16] 梅强中, 水波动力学, (1984), 科学出版社.
- [17] Parker, E. N., *Cosmical Magnetic Field*, Ch. 8, 9 (1979) Clarendon Press

## THE FORCE-FREE FIELD MODEL WITH DISCONTINUOUS SURFACE

HU WEN-RUI LI JIAN-GUO

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

### ABSTRACT

When the magnetic flux region emerges out from the convective zone, it is often confined in the finite extensive region of solar atmosphere. The flux region may be considered as low force-free region, the atmospheric region outside of it is a higher one, and the boundary is a contact discontinuous surface. In the present paper, we will give mathematically the description of the confined force-free field model, and show the features of one-dimensional solutions in detail. The static model is also extended consistently to the kinematical model by considered the inductive equation. The results in the present paper show the difference between the models of confined one and the usual infinite one.