中国科学

1986 年 2 月 A 辑 第 2 期

有涨落效应的磁流体静力学关系
——局部展开

胡文瑞
(中国科学院力学研究所，北京)

摘　要

本文采用局部展开的方法，分析了湍流近似条件下的磁流体静力学关系．对于涨落的、平均的动量守恒和磁感应方程，都得到了可以自洽的湍流场关系．与普通的静力学关系相比，湍流场引进的力包括与平均场平行和垂直分量的力

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{a}^{(1)}\times \boldsymbol{B}_0)\times \boldsymbol{B}_0,$$

以及与平均场垂直的由湍流边值引进的力 $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{k}\times \boldsymbol{B}_0$． 对于二维磁场位形，基本方程可化为一个二阶椭圆型方程，其中包括由涨落场引进的一些线性和非线性项．湍流场使磁场位形改变，可使位形非均匀剪切．在许多天体物理环境中都观测到湍流场，因此研究湍流场的影响是重要的．

一、引　言

太阳对流区和太阳大气中很大的温度梯度将导致涨落量的出现，形成许多不同尺度的涡，在气体动力学中叫做湍流． 小尺度的涨落场和大尺度的静力学关系这两方面组成了太阳大气，以至于某些恒星大气的基本特点．人们很早就利用谱线加宽来估计太阳大气中的湍流速度（如见 Allen[1]），最近的太阳峰年卫星 SMM 还直接测量到谱线 CIV（1548.19 Å）的移动（Simnett[2]），给出高色球层中的速度涨落．太阳大气中湍流速度场的典型相关长度约为500—600km，典型的湍流速度在太阳表面，1000 和 2000km 高度分别约为 2.6，8 和 14km/s． 如果按照能量均分原理，假设涨落场的动能与磁能相当，则太阳表面，1000 和 2000km 高度的涨落磁场分别约为几十 Gs，几 Gs 和 1 Gs 左右．太阳大气中磁场起着重要的作用，湍流中的涨落速度场必然与涨落磁场耦合在一起． Stenflo 用磁谱线加宽估计出太阳磁场涨落的上限为 100 Gs[3]，他用 Hanle 效应测出湍流磁场的下限为 10Gs[4]．这样，太阳光球的涨落磁场的量级为 $10 < |\delta \boldsymbol{B}| < 100$Gs． 小尺度的涨落场结构必然地会影响到大尺度场的平衡位形．

磁流体静力学平衡广泛地应用于太阳和恒星的大尺度磁场结构、黑子和日珥的静力学关系，以及与太阳耀斑相关的过程．绝大多数工作都忽略了涨落场对于平均的平衡位形的影响

本文 1984 年 3 月 29 日收到，1985 年 9 月 24 日收到修改稿．

(诸如 Low[5]，胡文瑞[6]，Osherovich[7])．作者曾讨论有涨落效应的磁流体静力学一般关系[8]．本文作为前文的继续，用局部展开的方法具体地导出磁流体静力学的湍流关系．局部展开的方法在湍流发电机的平均场理论中有广泛的应用(如见 Krause 和 Rädler[9] 等专著)．

Lerche 曾讨论过一类特定的随机无力场的情况[10]．本文作者对通常湍流近似下的无力场关系进行了一般的分析[11]，并用局部展开的方法论述了湍流无力场的基本方程和特性[12]．本文的处理方法与文献 [12] 有相似之处，但本文的结果更有一般性．

在第二节中，我们在湍流近似条件下推导了涨落场的关系，并证明了由一阶光滑近似而截断处理后的涨落动量守恒和涨落磁感应方程的结果是自洽的．利用求出的涨落场关系，就导出涨落平均的 Lorentz 力和感应电动势．第三节具体进行了局部展开近似下的运算．湍流的贡献归结为引进了三项平均电磁力、它们分别是

$$\frac{b}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0,\ \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0,\ \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0,$$

其中的系数 b, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 代表湍流场的影响．这样，静力学平衡的基本方程就是上述三项新的电磁力与平均场 Lorentz 力，压力梯度和重力的平衡．在第四节中，我们讨论了二维磁场位形，引进磁面函数以后，可将基本方程归结为一个二阶椭圆型偏微分方程．湍流的贡献是在此方程中引进若干线性和非线性项．由于天体物理环境中普遍存在着湍流，因此研究湍流的影响就非常必要．

二、湍流近似

在研究太阳黑子磁场的平衡时，典型的尺度为 10^4km，而典型的磁场强度为 10^3Gs．观测给出涨落磁场的典型尺度和典型强度值分别为 $10^{2.7}$km 和 $10^{1.7}$Gs．它们满足通常湍流的条件

$$\left|\frac{\delta B}{B_0}\right|\ll 1,\ \frac{l_0}{L_0}\ll 1, \tag{2.1}$$

其中每个量都表示为平均量与涨落量之和，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{B},\ p=p_0+\delta p,\ \rho=\rho_0+\delta\rho,\ \boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{v}, \tag{2.2}$$

而 l_0 和 L_0 分别为典型的小尺度和大尺度值．在湍流近似时，我们要求小磁 Reynold 数

$$R_m=\frac{l_0\delta v}{\eta}=O\left(\frac{l_0^2}{\eta t_0}\right)\ll 1 \tag{2.3}$$

和

$$\left|\frac{\delta v}{l_0/t_0}\right|=O(1), \tag{2.4}$$

其中 t_0 为小尺度典型时间，η 为磁粘性系数．在这种情形下，我们采用一阶光滑近似以后，就可以由涨落方程求出涨落量，然后给出它们在平均量方程中的影响．

在湍流近似下，磁流体静力学的平均量方程组为[8]

$$\nabla\cdot[\langle\delta\rho\delta\boldsymbol{v}\rangle]=0, \tag{2.5}$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{B}_0)\times\boldsymbol{B}_0+\langle(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}\rangle=4\pi(\nabla p_0+\rho_0\boldsymbol{g}), \tag{2.6}$$

$$\nabla\times[\langle\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}\rangle]+\eta\Delta\boldsymbol{B}_0=0, \tag{2.7}$$

$$p_0=p_0(\rho_0), \tag{2.8}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}_0=0. \tag{2.9}$$

而涨落场的方程为:

$$\nabla \cdot (\rho_0 \delta \boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{4\pi}[(\nabla \times \boldsymbol{B}_0) \times \delta \boldsymbol{B} + (\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}_0] = \nabla \delta p + \delta \rho \boldsymbol{g}, \tag{2.11}$$

$$\nabla \times (\delta \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 - \eta \nabla \times \delta \boldsymbol{B}) = 0, \tag{2.12}$$

$$\delta p = a_0^2 \delta \rho, \tag{2.13}$$

$$\nabla \cdot \delta \boldsymbol{B} = 0. \tag{2.14}$$

在平均的动量守恒关系(2.9)式中略去了 Reynold 应力.

扰动的动量守恒关系(2.11)式中四项的量级分别为

$$\frac{B_0 \delta B}{4\pi L_0},\ \frac{B_0 \delta B}{4\pi l_0},\ a_0^2 \frac{\delta \rho}{l_0},\ g\delta\rho. \tag{2.15}$$

对湍流近似(2.1)式,扰动的动量守恒关系就简化为[8]:

$$(\nabla \times \delta \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{B}_0 = 0. \tag{2.16}$$

其中假定扰动 Alfven 速度 $\delta B/\sqrt{4\pi\delta\rho}$ 和重力特征速度 $\sqrt{gL_0}$ 与声速相当. (2.16)式就和无力场时的湍流近似结果相同[11],可以采用类似的方法处理.

(2.15)式的第三项比第二项小的要求意味着

$$\frac{(\delta B)^2}{4\pi\delta\rho} \gtrsim a_0^2.$$

这个条件在许多天体物理环境中都是满足的. 比如,在低密度气体中,ρ_0 和 $\delta\rho$ 都很小. 很容易满足上述条件. 在此情况下的 Reynold 应力 $\rho_0\langle \delta\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v}\rangle$ 也相对地较小. 具体地讲,行星际介质中的密度涨落很小,而磁场和速度的涨落较大,可满足上述关系.当 $\delta\boldsymbol{B}$ 描述 Alfven 涨落的时候,湍流 Lorentz 力就代表波动压力的贡献. 在太阳风理论中常常讨论其影响,而同时忽略 Reynold 应力项.

根据(2.16)式,我们记

$$\nabla \times \delta \boldsymbol{B} = \delta b \boldsymbol{B}_0, \tag{2.17}$$

其中 δb 是空间的函数,代表涨落电流在平均磁场方向的大小. 将(2.17)式取散度,立即导出

$$(\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)\delta b = 0,$$

即 δb 沿平均磁场保持不变. $\delta\boldsymbol{B}$ 唯一地由方程(2.14)和(2.17)式,及其边界条件所确定. 仿照无力场的情况[11],引进磁矢势 $\boldsymbol{A}$, 即

$$\delta \boldsymbol{B} = \nabla \times \delta \boldsymbol{A}. \tag{2.18}$$

取磁矢势的散度为

$$\nabla \cdot \delta \boldsymbol{A} = S(\boldsymbol{r}), \tag{2.19}$$

其中 $S(\boldsymbol{r})$ 为任意给定函数,则方程(2.17)化为

$$\nabla^2 \delta \boldsymbol{A} = \nabla S - \delta b \boldsymbol{B}_0. \tag{2.20}$$

由此可导出磁矢势的解为:

$$\delta \boldsymbol{A} = -\iint \delta B_\Gamma G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) d\sigma_\xi + \iiint G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi})[\delta b((\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{B}_0) - \nabla S(\boldsymbol{\xi})] d\tau_{\boldsymbol{\xi}}, \tag{2.21}$$

其中 $\delta\boldsymbol{A}$ 的边值为

$$\left.\frac{\partial \delta \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}\right|_{\xi\in\Gamma} = \delta \boldsymbol{B}_\Gamma(\boldsymbol{\xi}). \tag{2.22}$$

Γ 是边界面，$\boldsymbol{n}_\xi$ 是边界面的法向，$d\sigma_\xi$ 和 $d\tau_\xi$ 为面积元和体积元，Green 函数

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) = 4\pi\left[f(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}|}\right], \tag{2.23}$$

而 $f(\boldsymbol{\xi})$ 满足

$$\begin{cases} \Delta f(\boldsymbol{\xi}) = 0, \\ \left.\dfrac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{n}_\xi}\right|_{\xi\in\Gamma} = 0. \end{cases}$$

利用这些结果，涨落的 Lorentz 力可写为

$$\begin{aligned} \langle(\nabla \times \delta\boldsymbol{B}) \times \delta\boldsymbol{B}\rangle = B_0 \times \iiint \nabla_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) \times [\langle\delta b(\boldsymbol{r})\delta b(\boldsymbol{\xi})\rangle\boldsymbol{B}_0 \\ - \langle\delta b(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{\xi})\rangle]d\tau_\xi + \boldsymbol{B}_0 \times \iiint \langle\delta b(r)\delta\boldsymbol{B}_\Gamma(\boldsymbol{\xi})\rangle \\ \times \nabla_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi})d\sigma_\xi. \end{aligned} \tag{2.24}$$

其中的任意函数 $\nabla S(\boldsymbol{\xi})$ 与涨落场可以有关系．将表达式 (2.25) 代入平均的动量方程 (2.6)，就得到湍流动量守恒关系

$$(\nabla \times \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{L} + \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{B}_0 = 4\pi(\nabla p_0 + \rho_0\boldsymbol{g}), \tag{2.25}$$

其中

$$\boldsymbol{L} = -\iiint \nabla_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) \times [\langle\delta b(\boldsymbol{r})\delta b(\boldsymbol{\xi})\rangle\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi}) - \langle\delta b(\boldsymbol{r})\nabla S(\boldsymbol{\xi})\rangle]d\tau_\xi, \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{k} = -\iint \langle\delta b(\boldsymbol{r})\delta\boldsymbol{B}_\Gamma(\boldsymbol{\xi})\rangle \times \Delta_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi})d\sigma_\xi. \tag{2.27}$$

矢量 $\boldsymbol{L}$ 代表内部湍流场的影响，而 $\boldsymbol{k}$ 为边界湍流场的贡献．

再讨论涨落场磁感应方程 (2.12)，它可以改写为

$$\nabla \times \delta\boldsymbol{B} = \frac{1}{\eta}(\delta\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 - \nabla\chi), \tag{2.28}$$

其中 χ 为任意标量函数．方程 (2.28) 与 (2.14) 一起也可以确定 $\delta\boldsymbol{B}$．当然，由磁感应方程求出的 $\delta\boldsymbol{B}$ 应与由动量方程求出的 $\delta\boldsymbol{B}$ 相同．这实际上就给出 $\delta\boldsymbol{B}$ 与 $\delta\boldsymbol{v}$ 之间的联系．

比较关系 (2.17) 与 (2.28) 式，自洽性条件要求

$$\delta\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 - \eta\delta b\boldsymbol{B}_0 = \nabla\chi. \tag{2.29}$$

根据 (2.14) 式可定义磁矢势 (2.18)，如果取

$$\nabla \cdot \delta\boldsymbol{A} = -\chi/\eta, \tag{2.30}$$

则磁感应方程 (2.28) 化为:

$$\nabla^2\delta\boldsymbol{A} = -\frac{1}{\eta}\delta\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0. \tag{2.31}$$

为了使方程 (2.31) 和方程 (2.20) 一致，要求取 $S(\boldsymbol{r}) = -\chi/\eta$ 和满足条件 (2.29) 式，即

$$\delta\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_0 - \eta\delta b\boldsymbol{B}_0 = -\eta\nabla S. \tag{2.32}$$

将条件 (2.32) 式代入 (2.26) 和 (2.27) 式，我们得到平均的动量守恒关系如 (2.25)，但其中的 $\boldsymbol{L}$ 就简化为

$$L = \frac{1}{\eta}\iiint \nabla_r G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}) \times [\langle\delta b(\boldsymbol{r})\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})\rangle \times \boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})]d\tau_\xi, \tag{2.33}$$

而 $\boldsymbol{k}$ 的表达式与 (2.27) 式相同.

由动量涨落方程 (2.17) 和条件 (2.14) 式求出涨落磁场 $\delta\boldsymbol{B}$ 以后，涨落的磁感应方程将给出 $\delta\boldsymbol{B}$ 与 $\delta\boldsymbol{v}$ 之间的联系，这就是条件 (2.32) 式. 如果记

$$\frac{1}{\eta}\delta\boldsymbol{v}=\delta u\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{B}_0, \tag{2.34}$$

则 (2.32) 式就导出

$$B_0^2\delta\boldsymbol{w}=-\nabla_\perp S,\quad \eta\delta b\boldsymbol{B}_0=-\nabla_{/\!/}S.$$

其中下标 ⊥ 和 // 分别表示与基态场 $\boldsymbol{B}_0$ 垂直和平行的分量，而 $\delta\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{B}_0=0$.

将涨落场代入平均磁感应方程，关联项为

$$\langle\delta\boldsymbol{v}\times\delta\boldsymbol{B}\rangle=\frac{1}{\eta}\iiint\langle\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\times\{\nabla_r G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})\times[\delta\boldsymbol{v}(\xi)\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})]\}\rangle d\tau_\xi$$
$$+\iint\langle\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\times[\delta B_T(\boldsymbol{\xi})\times\nabla_r G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi})]\rangle d\sigma_\xi. \tag{2.35}$$

平均磁感应方程可写为：

$$\nabla\times(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N})+\eta\Delta\boldsymbol{B}_0=0, \tag{2.36}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别对应于 (2.35) 式右端的第一和第二项.

三、局部展开

为了讨论静力学平衡中的涨落场影响，需要具体导出 $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 这些关联项与平均量之间的关系. 这就要对涨落量 δb, δu 和 $\delta\boldsymbol{w}$ 有所理解. 这些涨落量的分布与磁流体力学的湍流结构相关，还是远未解决的课题.

湍流发电机理论曾采用局部展开的方法来分析二阶关联的感应电动势. 因为 (2.33) 式中的关联项 $\langle\delta b(\boldsymbol{r})\delta v_i(\boldsymbol{\xi})\rangle$ 和 (2.35) 式中的关联项 $\langle\delta v_i(\boldsymbol{r})\delta v_j(\boldsymbol{\xi})\rangle$ 都是小尺度的关联函数，它们的作用主要限于小的湍流尺度 l_0 之内. 如果将 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 中的平均磁场 $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})$ 作级数展开

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{r})\cdot\nabla\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})+\cdots,$$

$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 就可表示为平均场及其导数的级数. 考虑到与被积函数中关联项的耦合，展开中的较低阶项有较大的贡献. 我们可以一般地将 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 表示为

$$L_i=-a_{ij}B_{0j}+b_{ijk}\frac{\partial B_{0k}}{\partial x_j}+\cdots, \tag{3.1}$$

$$M_i=\alpha_{ij}B_{0j}+\beta_{ijk}\frac{\partial B_{0k}}{\partial x_j}+\cdots, \tag{3.2}$$

这里的函数 a_{ij} 和 α_{ij} 为二阶张量的元素，b_{ijk} 和 β_{ijk} 为三阶张量的元素，它们都是关联函数、Green 函数的梯度、以及 $(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{r})^n$ 的确定积分. 对于无力场的情况，曾作过仔细的讨论[12]，这里就不再具体推导了.

静力学平衡方程 (2.25) 左端括号中的 $\nabla\times\boldsymbol{B}_0$ 为赝矢量，所以 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 亦为赝矢量. 由此导出，(a_{ij}) 为二阶赝张量，(b_{ijk}) 为三阶标张量. 一般而言，a_{ij} 和 b_{ijk} 可表示为[12]：

$$a_{ij}=a\delta_{ij}+a_k^{(1)}\varepsilon_{ijk}+a^{(2)}A_i^{(1)}A_j^{(2)}, \tag{3.3}$$

$$b_{ijk}=b\varepsilon_{ijk}+b_1\beta_i^{(1)}\delta_{jk}+b_2\beta_j^{(2)}\delta_{ki}+b_3\beta_k^{(3)}\delta_{ij}+b_4\varepsilon_{jkl}\beta_l^{(4)}\beta_i^{(5)}$$
$$+b_5\varepsilon_{kil}\beta_l^{(6)}\beta_j^{(7)}+b_6\varepsilon_{ijl}\beta_l^{(8)}\beta_k^{(9)}+b_7\beta_i^{(10)}\beta_j^{(11)}\beta_k^{(12)}, \tag{3.4}$$

其中 a 为膺标量，$\boldsymbol{a}^{(1)}$ 为膺矢量，当 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{A}^{(2)}$ 为同类矢量时，$a^{(2)}$ 为纯标量，否则为膺标量，b 为纯标量，b_i 与 $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$ 为同类型的，若 $\boldsymbol{\beta}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{(i+1)}$ $(i=4, 6, 8)$ 为同类型矢量，则 b_4，b_5 或 b_6 为纯标量，否则为膺标量．最后，若 $\beta^{(i)}(i=10, 11, 12)$ 为同类的膺矢量，则 b_7 为膺标量，若它们为同类型的标矢量，则 b_7 为纯标量．如果我们只讨论 (3.3) 和 (3.4) 式中包含一个标量或矢量元素的情况，将 (3.1)，(3.3) 和 (3.4) 式代入静力学方程 (2.25)，我们就得到关系

$$\frac{1}{4\pi}[(1+b)\nabla\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{a}^{(1)}\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{k}]\times\boldsymbol{B}_0=\nabla p_0+\rho_0\boldsymbol{g}. \tag{3.5}$$

(3.5) 式中的 b，$\boldsymbol{a}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 代表湍流的小尺度涨落场对大尺度平均位形的影响．

类似地，我们可以讨论平均的磁感应方程 (2.27)．通过局部展开，涨落场电动势的平均矢量 $\boldsymbol{M}$ 可以表示为：

$$M_i=\alpha_{ij}B_{0j}+\beta_{ijk}\frac{\partial B_{0k}}{\partial x_j}+\cdots. \tag{3.6}$$

而 α_{ij} 和 β_{ijk} 可一般地表示为：

$$\alpha_{ij}=\alpha_0\delta_{ij}+\alpha_k^{(1)}\varepsilon_{ijk}+\alpha^{(2)}D_i^{(1)}D_j^{(2)}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\beta_{ijk}=&\beta_0\varepsilon_{ijk}+\beta_1q_i^{(1)}\delta_{jk}+\beta_2q_j^{(2)}\delta_{ki}+\beta_3q_k^{(3)}\delta_{ij}+\beta_4\varepsilon_{jkl}q_l^{(4)}q_i^{(5)}+\beta_5\varepsilon_{kil}q_l^{(6)}q_j^{(7)}\\&+\beta_6\varepsilon_{ijl}q_l^{(8)}q_k^{(9)}+\beta_7q_i^{(10)}q_j^{(11)}q_k^{(12)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 α_0，$\alpha^{(2)}$，β_i $(i=1-7)$ 为标量，$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$，$\boldsymbol{D}^{(1)}$，$\boldsymbol{D}^{(2)}$，$\boldsymbol{q}^{(i)}$ $(i=1—12)$ 为矢量，它们与表达式 (3.3) 和 (3.4) 中的系数有类似的性质．将 (3.6)—(3.8) 式代入磁感应方程 (2.36)，略去并矢项以后，就得到

$$\alpha_0\nabla\times\boldsymbol{B}_0+(\eta+\beta_0)\Delta\boldsymbol{B}_0+\nabla\times\boldsymbol{N}+\nabla\times(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\times\boldsymbol{B}_0)=0. \tag{3.9}$$

其中 α_0，β_0，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ 给出了湍流涨落场对于平均场的影响．不难看出，α_0 项和 β_0 项就分别是湍流发电机理论中的 α 效应和 β 效应．

在静力学问题中，平均动量方程 (3.4) 和平均磁感应方程也应该自洽．对于均匀的输运系数 η，α_0 和 β_0，方程 (3.9) 可以改写为：

$$(\eta+\beta_0)\nabla\times\boldsymbol{B}_0-\alpha_0\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\times\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{N}=\nabla N_1,$$

其中 N_1 为标量函数．将上式与 $\boldsymbol{B}_0$ 叉乘后就导出

$$[(\eta+\beta_0)\nabla\times\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\times\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{N}]\times\boldsymbol{B}_0=\nabla N_1\times\boldsymbol{B}_0. \tag{3.10}$$

比较 (3.4) 和 (3.10) 式，自洽性条件要求

$$\boldsymbol{a}^{(1)}=-\frac{\boldsymbol{\alpha}^{(1)}}{\eta+\beta_0},\ \boldsymbol{k}=-\frac{\boldsymbol{N}}{\eta+\beta_0},\ 4\pi(\nabla p_0+\rho_0\boldsymbol{g})=\frac{\nabla N_1\times\boldsymbol{B}_0}{\eta+\beta_0}. \tag{3.11}$$

这个结果表明，考虑了湍流的效应以后，磁流体静力学方程组是自洽的．我们可以主要去分析静力学平衡关系 (3.4) 的性质．

如果湍流动能与湍流的磁能大致均分，则 $\rho_0\langle\delta\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v}\rangle$ 与 $\langle\delta\boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{B}\rangle$ 的量级相同，在平均动量方程中要加入 Reynold 应力项．利用解式 (2.34)，Reynold 应力可表示为：

$$\rho_0\langle\delta\boldsymbol{v}\delta\boldsymbol{v}\rangle=\rho_0\eta^2\langle(\delta u\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{B}_0)(\delta u\boldsymbol{B}_0+\delta\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{B}_0)\rangle, \tag{3.12}$$

(3.12) 式将 Reynold 应力与平均磁场联系在一起．对系数 δu 和 $\delta\boldsymbol{w}$ 作适当的处理，也可以导出一些简单的关系．将这种关系式计入平均动量方程 (3.4)，就可分析相应的影响．在本文

中，我们不作更具体的分析.

四、湍流场的影响

将湍流场局限于有限区域时可取 $\boldsymbol{k}=0$，或者边值处湍流场的贡献 $\boldsymbol{k}$ 与平均场 $\boldsymbol{B}_0$ 平行时，湍流静力学方程简化为:

$$\frac{1}{4\pi}[(1+b)\nabla\times\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{a}^{(1)}\times\boldsymbol{B}_0]\times\boldsymbol{B}_0=\nabla p_0+\rho_0\boldsymbol{g}. \tag{4.1}$$

与普通静力学不同，平均的 Lorentz 力除去有垂直于平均磁场的分量外，还有平行于平均磁场方向的分量. 从数学上讲，这种平衡关系将特别有助于讨论三维位形[13-15]. 作为第一步，本文将讨论二维的磁场位形.

二维磁场位形可记为:

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z},\ B_y(x,z),-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right). \tag{4.2}$$

将 $\boldsymbol{g}$ 的方向取在 $-\boldsymbol{e}_z$ 方向，则湍流静力学方程的分量形式为:

$$-\left[(1+b)\Delta\psi+a_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi}{\partial x}-B_y\left[(1+b)\frac{\partial B_y}{\partial x}+a_xB_y-a_y\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]$$
$$=4\pi\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.3}$$

$$\left[(1+b)\frac{\partial B_y}{\partial x}+a_xB_y-a_y\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi}{\partial z}-\left[(1+b)\frac{\partial B_y}{\partial z}-a_zB_y-a_y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{4.4}$$

$$-\left[(1+b)\Delta\psi+a_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]\frac{\partial\psi}{\partial z}-B_y\left[(1+b)\frac{\partial B_y}{\partial z}+a_zB_y+a_y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$
$$=4\pi\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g\right), \tag{4.5}$$

其中假设 $\partial\psi/\partial y=0$ 和 $\partial p/\partial y=0$. 根据 (4.4) 式，我们得到

$$(1+b)\frac{\partial B_y}{\partial x}+a_xB_y-a_y\frac{\partial\psi}{\partial z}=G[\psi,z]\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{4.6}$$

$$(1+b)\frac{\partial B_y}{\partial z}+a_zB_y+a_y\frac{\partial\psi}{\partial x}=G[\psi,z]\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{4.7}$$

利用 (4.6) 和 (4.7)，(4.3) 和 (4.5) 式化为:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}\left[(1+b)\Delta\psi+a_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_z\frac{\partial\psi}{\partial z}+B_yG(\psi,z)\right]=4\pi\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{4.8}$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial z}\left[(1+b)\Delta\psi+a_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_z\frac{\partial\psi}{\partial z}+B_yG(\psi,z)\right]$$
$$=4\pi\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g\right). \tag{4.9}$$

方程 (4.8) 和 (4.9) 的自洽条件要求

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\left[\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g\right]=0. \tag{4.10}$$

讨论多方过程

$$p = K\rho^{\gamma}, \tag{4.11}$$

其中K为常数．由(4.10)式可以导出，

$$p[\psi, z] = \left[p_0(\psi)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{g(z-z_0)}{K^{1/\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \gamma \neq 1, \tag{4.12}$$

或者

$$p[\psi, z] = p_0(\psi)\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{g\,dz}{KT[\psi]}\right], \quad \gamma = 1. \tag{4.13}$$

将(4.12)式或(4.13)式代入(4.8)和(4.9)式，立即导出基本方程

$$(1+b)\Delta\psi + a_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + a_z\frac{\partial\psi}{\partial z} + B_y G[\psi, z] = -4\pi\frac{\partial p[\psi, z]}{\partial\psi}. \tag{4.14}$$

其中$p[\psi, z]$由(4.12)或(4.13)式给出．

基本方程(4.14)中的$B_y[\psi, z]$和$G[\psi, z]$还要满足关系(4.6)和(4.7)．事实上，方程(4.4)可以改写为

$$(1+b)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial B_y[\psi, z]}{\partial z} - \left[a_z\frac{\partial\psi}{\partial x} - a_x\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]B_y[\psi, z] = a_y(\nabla\psi)^2. \tag{4.15}$$

(4.15)式为$B_y(x, z)$的线性常微分方程，它的解为：

$$B_y[\psi, z] = \exp\left[-\int\frac{a_x\frac{\partial\psi}{\partial z} - a_z\frac{\partial\psi}{\partial x}}{(1+b)\frac{\partial\psi}{\partial x}}dz\right]\left\{G_1(\psi) + \int\frac{a_y}{1+b}\frac{(\nabla\psi)^2}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right.$$
$$\left.\cdot\exp\left[\int\frac{a_x\frac{\partial\psi}{\partial z} - a_z\frac{\partial\psi}{\partial x}}{(1+b)\frac{\partial\psi}{\partial x}}dz\right]dz\right\}, \tag{4.16}$$

其中已经把$B_y(x, z)$转化为(ψ, z)的函数$B_y[\psi, z]$，这就需要把相应的系数也换算成(ψ, z)的函数．当$|\boldsymbol{a}| = 0$时，(4.16)式简化为

$$B_y[\psi, z] = G_1(\psi). \tag{4.17}$$

这就是普通磁流体静力学二维平衡时的情形．如果涨落场引进的矢量$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_z$，则

$$B_y[\psi, z] = e^{\int\left(\frac{a}{1+b}\right)dz}G_1(\psi). \tag{4.18}$$

在这些表达式中$G_1(\psi)$需要通过物理考虑作适当的选取．将表达式(4.16)代入(4.6)或(4.7)式，就可以求出$G[\psi, z]$的分布．

涨落场对平衡位形的影响表现在各个方面．虽然压力和磁场之间的联系式(4.12)或(4.13)与普通静力学关系式的形式一样，由于磁场位形受湍流场的影响而改变，热力学量的分布也相应地改变了．涨落场对于磁场位形的影响可由(4.14)式和(4.16)式表示出来．我们先讨论横场B_y．在普通静力学问题中，横向磁场在每个磁面上是均匀的，如(4.17)式所示．这时，磁力线在每个磁面ψ = 常数上均匀地剪切．当计入湍流场的影响以后，磁面上的磁力线可以非均匀地剪切，也就是在某些地方剪切得厉害些，而在其他地方扭绞得小一些．实际的

观测情形确实如此．太阳黑子的白光照片给出光球中的形态，暗条扭转的程度往往是非均匀的．磁力线剪切的不均匀性还有重要的应用．太阳耀斑触发于局部区域之中，当局部区域中的磁力线剪切得较厉害可触发不稳定性、爆发耀斑，而在其余区域的磁力线不需要过份地剪切．这时，与储存横向磁场能量相联系的过程主要限于局部区域之中，对于有效地利用磁能是很好的．作为一个例子，我们讨论 (4.18) 式所给出的横场分布． 将 (4.18) 的条件代入 (4.6) 式，立即导出

$$G[\phi, z] = (1+b)\frac{\partial B_y[\phi, z]}{\partial \phi}. \tag{4.19}$$

将 (4.18) 和 (4.19) 代人方程 (4.14) 就得到

$$(1+b)\Delta\phi + a\frac{\partial \phi}{\partial z} + (1+b)e^{A(z)}G_1(\phi)\frac{dG_1(\phi)}{d\phi} = -4\pi\frac{\partial P[\phi, z]}{\partial \phi}, \tag{4.20}$$

其中

$$A(z) = \frac{1}{2}\int\frac{a}{1+b}dz. \tag{4.21}$$

合理地给定 $G_1(\phi)$ 和 $P_0(\phi)$ 的分布，就可在确定边条件下求解 (4.20) 式．特别是对于线性问题，可得到本征值问题的解．这时，湍流的影响就反映在系数 a 和 b 之中，还需要进一步的分析．

五、小　　结

本文讨论了湍流近似下的磁流体静力学平衡，分析了小尺度涨落场对大尺度平均场的影响．湍流的贡献引进了新的电磁力，它们既可以平行于平均磁场，也可以垂直于平均磁场．这就给静力学平衡位形带来了新的机制．在讨论磁场的剪切或扭绞时，非均匀的横场可以使横场磁能储存于局部区域中．

尽管本文侧重于建立数学的关系，但是其物理含义是很清楚的．湍流将产生能量与动量的交换．在纯粹流体力学湍流中，惯性项的涨落平均导出 Reynold 应力，对平均流动造成重大的影响．这是由于小尺度涡的影响，改变了大尺度的平均流场．为了方便，人们常常引进一个粘性湍流系数来简单地描述 Reynold 应力．当然，这种处理办法包含着很强的近似假设．但对于如此复杂的湍流过程来讲，使模型简化而实用显然是很重要的．这种处理方法并不影响人们去做更加基本的研究．对于磁流体力学湍流，情况更加复杂(例如，参见文献 [16])．除去不同尺度旋涡动能之间的交换外，还有小尺度磁能，以及磁能与动能之间的交换．为完整地描述这些过程还需要作很大的努力． 磁流体力学湍流应用中很重要的一个课题是发电机理论．本文的很多近似，诸如一阶光滑近似和局部展开，都是借助于发电机理论的常用处理．但是，本文证明了这些近似情况的结果最后是自洽的，而发电机理论不易得到这点．

本文的结果是在局部展开近似下得到的，这种数学处理所得到结果的物理含义对应于特定的湍流结构，还需要进一步的分析．再则，具体地计算包括湍流效应的磁流体静力学平衡位形，并讨论这些平衡位形的特征，也是需要进行研究的工作．

参考文献

[1] Allen, C. W., *Astrophysical Quantities*, 1973.
[2] Simnett, G., *J. British Interplanet. Soc.*, **35**(1982), 434.
[3] Stenflo, J. O., *Astron. Astrophys.*, **59**(1977), 367.
[4] Stenflo, J. O., *Solar Physics*, **80**(1982), 209.
[5] Low, B. C., *ibid.*, **67**(1980), 57.
[6] Hu, W. -R., *Scientia Sinica*, **24**(1981), 168.
[7] Osherovich, V., *Solar Physics*, **67**(1982), 63.
[8] Hu, W. -R., *Scientia Sinica*, **26**(1983), 1073.
[9] Krause, F., Rädler, K. -H., *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press, 1980.
[10] Lerche, I., *Astrophys. J.*, **162**(1970), 675.
[11] Hu, W. R., *Astrophys. Space Sci.*, **85**(1982), 351.
[12] Hu, W. R., *ibid*, **97**(1983), 353.
[13] Hu, W. R. et al., *Solar Phys.*, **83**(1983), 195.
[14] Hu, W. R., *Astrophys. Space Sci.*, **90**(1983), 391.
[15] 胡文瑞，力学学报，1983，6：603.
[16] 胡文瑞，宇宙磁流体力学(将出版)，科学出版社，1986.