

# 含裂纹球壳裂纹尖端应力应变场及 应力强度因子计算

柳春图 吴犀甲 李英治

(中国科学院力学研究所,北京)

## 摘 要

本文将“局部-整体分析法”(Local-global analysis)推广到含裂纹球壳的断裂分析中,给出含裂纹球壳裂纹尖端应力应变场包括 I, II, III 型的一般解。它类似于平面断裂问题中 Williams 展开式的作用,揭示了裂纹尖端附近的力学性质,为进行含裂纹球壳断裂分析提供良好的基础。平面断裂问题分析中一整套成熟的分析方法,诸如能量法,边界配置法,摄动法,有限元法等都可以移植到球壳的断裂分析中去。

作为算例,本文给出了几种边界条件下有限尺寸球壳的应力强度因子数值并进一步对工程中实用的球壳鼓胀系数进行了计算,分析了现在常用的鼓胀系数的适用范围,并给出了简单实用的近似公式。本文获得的应力应变场也为复合型断裂分析提供了一个强有力的工具。

## 一、引 言

球壳是工程中常用的结构形式,因此,含裂纹球壳是工程结构安全性评定(例如压力容器安全性评定)中的一个重要课题。由于壳体中曲率的存在使得拉伸和弯曲作用耦合,给问题的求解带来了数学上的困难。早期的文献主要按 Kirchhoff 经典理论进行分析<sup>[1,2]</sup>,但是,由于经典壳体理论忽略了剪切应变,从而导致横向剪力不是独立的广义力、III 型应力强度因子不独立,而且在裂纹尖端处剪力具有  $O(r^{-\frac{3}{2}})$  阶奇异性。由于同样的原因,弯曲应力的幅角分布与拉伸应力的幅角分布不同。由此可见,经典理论在平板弯曲断裂问题中存在的缺陷<sup>[7-10]</sup>也同样存在于壳体断裂问题中。近年来,一些研究者从 Reissner 理论出发,采用考虑剪切应变的壳体理论,建立了壳体的十阶微分方程<sup>[3,4]</sup>。由于问题的复杂性,文献[3]只计算了无限大球壳的应力强度因子,并仅给出裂纹尖端应力应变场的首项表达,即  $O(r^{-\frac{3}{2}})$  阶奇异项。显然,问题仍未得到彻底解决。

对于工程实际应用中的各种边界支承条件下的有限尺寸壳体断裂问题,目前尚无解答。本文采用的研究路线是:首先寻求裂纹尖端应力应变场的一般解,在此基础上,采用有限元法计算了球壳的应力强度因子和鼓胀系数。实践证明,本文的研究方法是工程断裂分析中行之有效的办法。

本文 1986 年 1 月 13 日收到,1986 年 9 月 1 日收到修改稿。

## 二、含裂纹球壳基本方程及其简化

考虑一球壳, 在大圆处有一条穿透裂纹, 将坐标原点取在裂纹尖端处(图 1)。考虑剪应变的扁壳方程如下:<sup>[5]</sup>

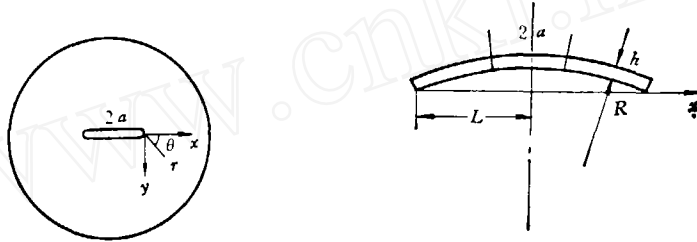


图 1

应力应变关系:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{D}{2} (1 - \nu) \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right), \\ Q_x &= C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} Q_y &= C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{B} (N_x - \nu N_y) + k w, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{B} (N_y - \nu N_x) + k w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1 + \nu)}{B} N_{xy}.$$

式中  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  分别为弯矩、扭矩和剪力;  $N_x, N_y, N_{xy}$  为中面力。  $u, v, w$  分别为中面和垂直中面的位移;  $\phi_x, \phi_y$  为变形前中面的法线在  $xoz$  平面和  $yoaz$  平面的转角。  $B$  为抗拉压刚度,  $D$  为抗弯刚度,  $C$  为剪切刚度。  $k$  为壳体曲率,  $\nu$  为泊桑比。

平衡方程为:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k(N_x + N_y) + q = 0. \quad (2.5)$$

式中  $q$  为壳体面上的分布载荷。

由 (2.4) 式引进应力函数  $\varphi$ , 使得:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (2.6)$$

则由 (2.3) 式得到协调方程

$$\frac{1}{B} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k \nabla^2 w = 0 \quad (2.7)$$

将 (2.1), (2.2) 式代入 (2.5) 式得到

$$D \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) = 0, \quad (2.8)$$

$$D \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) = 0, \quad (2.9)$$

$$C \left( \nabla^2 w - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + k \nabla^2 \varphi + q = 0. \quad (2.10)$$

裂纹面边界条件为:

$$\theta = \pm \pi \text{ 时}$$

$$M_y = M_{xy} = Q_y = 0, \quad N_y = N_{xy} = 0. \quad (2.11)$$

引入位移函数  $F, f$  令:

$$\phi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \phi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.12)$$

并代入 (2.8), (2.9) 式得:

$$\frac{\partial}{\partial x} [D \nabla^2 F + C(\omega - F)] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf \right] = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [D \nabla^2 F + C(\omega - F)] - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf \right] = 0. \quad (2.14)$$

由此得到

$$\left[ \frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf \right] + i \left[ D \nabla^2 F + C(\omega - F) \right] = C \Phi(x + iy), \quad (2.15)$$

其中  $\Phi(x + iy)$  为一解折函数。将实部虚部分离后得:

$$\frac{D}{2} (1-\nu) \nabla^2 f - Cf = C \operatorname{Re} \Phi, \quad (2.16)$$

$$D \nabla^2 F + C(\omega - F) = C \operatorname{Im} \Phi, \quad (2.17)$$

并由 (2.17) 式得:

$$\omega = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F + \operatorname{Im} \Phi. \quad (2.18)$$

将 (2.12) 和 (2.18) 式代入 (2.10) 式得

$$D \nabla^2 \nabla^2 F - k \nabla^2 \varphi = q. \quad (2.19)$$

将 (2.18) 式代入 (2.7) 式得

$$\frac{1}{B} \nabla^2 \nabla^2 \varphi + k \nabla^2 F - k \frac{D}{C} \nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (2.20)$$

当  $g = 0$ , 由(2.19)和(2.20)式可得

$$\nabla^4 F - \frac{k^2 B}{C} \nabla^2 F + \frac{k^2 B}{D} F = 0. \quad (2.21)$$

可以证明, (2.21) 式中的  $F$  等价于  $F_0, F_1, F_2$  三个函数的组合, 它们分别满足如下方程:

$$\nabla^2 F_0 = 0, \quad (2.22)$$

$$\nabla^2 F_1 - 4\lambda_1^2 F_1 = 0, \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 F_2 - 4\lambda_2^2 F_2 = 0. \quad (2.24)$$

$$\text{式中 } 4\lambda_{1,2}^2 = \frac{k^2 B}{2C} \pm \sqrt{\frac{k^4 B^2}{4C^2} - \frac{k^2 B}{D}},$$

于是我们有:

$$F = F_0 + F_1 + F_2. \quad (2.25)$$

方程(2.16)式可化为

$$\nabla^2 f_0 - 4\mu^2 f_0 = 0, \quad (2.26)$$

$$f = f_0 - \text{Re}\Phi, \quad (2.27)$$

$$\text{式中 } 4\mu^2 = \frac{2C}{D(1-\nu)}.$$

至此, 我们已将壳体的十阶微分方程经过解耦, 等价地化为(2.18), (2.19), (2.23)–(2.27) 等式几个二阶微分方程。

### 三、裂纹尖端应力应变场的特征展开

求解以上方程组并使其满足裂纹面边界条件(2.11)式, 得到  $f, F, w$  和  $\Phi$  的级数表达式, 详见附录。

求得以上  $f, F, w, \Phi$  的解答之后, 由(2.1)–(2.3), (2.6), (2.12) 式可以求得广义位移和广义内力, 即得到裂纹尖端应力应变场。

### 四、应力强度因子计算

对于对称问题, 取  $1/4$  球壳进行计算, 网格划分如图 2 所示。以顶点  $O$  为原点建立整体坐标系  $OXYZ$ , 以裂纹尖端  $o$  为原点建立奇异单元的局部坐标系  $oxyz$ 。将裂纹尖端应力应变场的展开式截取前若干项作为奇异元的位移模式, 其余常规单元采用考虑剪切变形的厚壳元<sup>[6]</sup>。

#### 1. 含裂纹块壳受均匀弯曲作用(图 3)

Sih 用积分变换讨论了无限大球壳问题<sup>[3]</sup>。因为球面是有界曲面, 几何上不可能延展到无穷远处, 因此有限尺寸效应将对应力强度因子带来一定影响。本文按不同  $a/L$  计算所得结果如表 1。

其中  $\lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)} a / \sqrt{Rh}$  为曲率参数。当  $\lambda = 0$ , 即平板情形, 本文结果与 Sih 的理论值相比较, 当  $a/L = 0.1$  时误差小于 1%, 且不同  $a/L$  情况下的数值与文献[7]中有限尺寸板的结果相比较, 误差亦在 1% 左右。对于壳体情况, 即  $\lambda > 0$ , 随着  $a/L$  增加, 应力强度因子增大。但当  $a/L = 0.1$  时, 本文计算结果低于文献[3]中无限大壳体的结果。这是因为当给

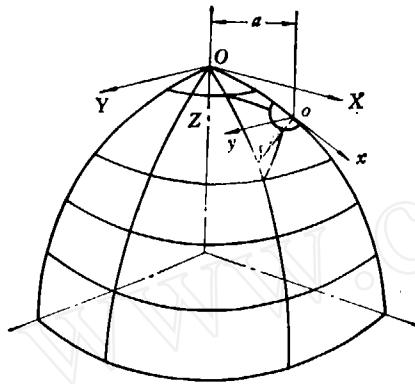


图 2

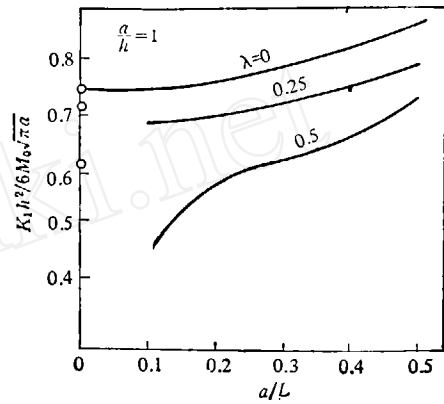


图 3

表 1 均匀弯曲作用下球壳的应力强度因子 (a/h = 1)

		$K_1 / (6M_0 \sqrt{\pi a} / h^2)$			
$\lambda$	$a/L$	0 <sup>[3]</sup>	0.1	0.25	0.5
0.00		0.744	0.741	0.757	0.870
0.25		0.703	0.680	0.701	0.781
0.50		0.619	0.433	0.613	0.727

定  $a/h$  和  $\lambda$  值时,对于较小的  $a/L$  球壳已呈深壳,扁壳理论不再适用。这说明在某些范围内,文献[3]的结果不再适用。

### 2. 不同支承条件下的内压球壳

考虑  $L/R = \pi/4$ , 受均匀内压  $q_0$  的球壳。在几种支承条件下的应力强度因子数值见表 2。可以看到,边界加支承比自由时应力强度因子下降,当  $\kappa = 1$ , ( $\kappa = D/Ca^2$ ) 时,边界简支的影响最大为 16%,固支的影响最大为 20%。图 4 给出相应的曲线。

表 2 不同支承条件下内压球壳应力强度因子 ( $\kappa = 1$ )

		$K_1 / \frac{q_0 R}{2h} \sqrt{\pi a}$		
边界条件	$\lambda$	0.2	0.6	1.0
自由		1.222	1.592	1.800
简支		1.108	1.332	1.650
固支		1.065	1.270	1.579

## 五、球壳的鼓胀系数

Folias<sup>[1]</sup> 应用 Kirchhoff 经典薄壳理论得到压力球壳的应力强度因子表达式:

$$K_1 = M \sigma \sqrt{\pi a} \quad (5.1)$$

式中,  $\sigma = q_0 R / 2h$  为压力球壳应力,  $q_0$  为均匀内压,  $M$  为鼓胀系数, 工程应用中采用的近似公

表 3 鼓胀系数  $M(\lambda, \kappa)$ 

$\lambda \backslash \kappa$	$0^{[2]}$	0.001	0.01	0.1	1	2
0.2	1.022	1.032	1.099	1.127	1.222	1.301
0.4	1.073	1.078	1.144	1.178	1.305	1.381
0.6	1.142	1.146	1.181	1.299	1.592	1.673
1.0	1.316	1.320	1.361	1.609	1.800	1.913
1.2	1.417	1.411	1.601	1.839	2.002	
1.6	1.637	1.652	1.792	2.052		
2.0	1.876	1.841	2.022	2.110		
2.2	2.000	2.001	2.096	2.192		

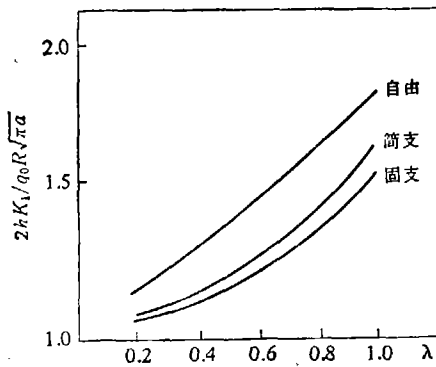


图 4

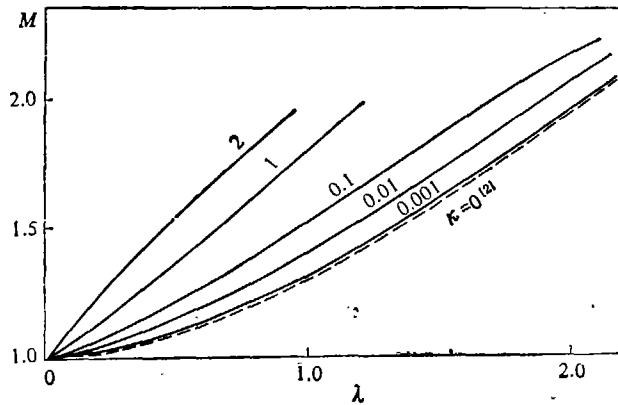


图 5

式为:

$$M = (1 + 0.59\lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2)$$

式中  $\lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)} a / \sqrt{Rh}$ .

由经典理论得到的结果, 鼓胀系数仅依赖曲率参数  $\lambda$  变化。本文采用考虑剪应变的 Reissner 型理论, 引入了新的物理参数  $\kappa = D/Ca^2$ 。表 3 给出了不同剪切刚度下的鼓胀系数。图 5 给出相应的变化曲线。当  $\kappa$  不变时, 鼓胀系数随  $\lambda$  增大而增大。当  $\kappa \rightarrow 0$  时, 本文结果趋于经典理论解, 当  $\kappa = 0.001$  时, 误差为 1%。当  $\lambda$  不变时, 鼓胀系数随  $\kappa$  增大而增大, 在本文计算范围内与经典结果相比, 最大相差可达 46%。

一般实际问题中  $\lambda < 2$ ,  $\kappa < 2$ , 因此在本文计算范围内可以认为, 对于  $a/h$  较大的情形, 经典理论的结果误差不大, 而对于  $a/h$  较小的情形, 经典结果就不能用了, 这时必须采用考虑剪切刚度影响的计算结果。

根据计算结果分析, 本文拟定如下近似公式:

$$M(\lambda, \kappa) = \sqrt{1 + 0.59\lambda^2} (1 + 1.2\kappa^{\frac{1}{2}}\lambda e^{-\lambda})$$

$$\nu = \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2.2, \quad (5.3)$$

其相对误差小于 4%。

## 六、结 论

1. 对于含裂纹球壳, 本文从考虑剪应变理论基本方程出发, 将 10 阶壳体微分方程等价地简化为解耦的二阶方程的组合. 与平面问题的 Williams 展开式类似, 本文给出 Reissner 型球壳裂纹尖端应力应变场包括 I, II, III 型的一般解.

2. 本文获得的裂纹尖端应力应变场为球壳应力强度因子计算提供了有力的工具, 可将平面断裂问题中现有的一套计算方法推广到 Reissner 型壳体断裂分析中去, 诸如能量法, 边界配置法, 高阶奇异元法等.

3. 本文对含裂纹的有限尺寸块壳的力学特性进行了探讨. 受均匀弯曲作用时, 应力强度因子随  $a/L$  增加而增大. 本文还讨论了含裂纹内压球壳在各种边界支承条件下应力强度因子的变化.

4. 当剪切刚度很大时(即  $a/h$  较大时), 内压球壳的鼓胀系数与经典结果接近. 但当剪切刚度较小时(即  $a/h$  较小), 剪应变的影响增大最大值可以达 46% 左右. 因此按经典理论给出的鼓胀系数是偏不安全的. 为便于工程应用, 本文给出了考虑剪切刚度影响的近似公式.

5. 本文从计算角度讨论了奇异元位移模式阶数的选取和奇异元最佳尺寸问题. 在本文计算中, 裂纹尖端位移展开式取至  $O(r^{7/2})$  阶, 奇异元尺寸取  $0.1a$  为宜.

## 附 录

应力函数与位移函数的表达式

1. 当  $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

$$\begin{aligned}
 t = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [-(K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1)\theta + (L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1)\theta] \\
 & + \sum_{n=0,1,\dots} \sum_{\lambda} \left[ -\frac{4D}{C} (\lambda_i K_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i K_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1+2n)\theta \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} \left( \beta_{\lambda-1} + \frac{4D}{C} \lambda_i L_{\lambda-1}^{(1)} + \frac{4D}{C} \lambda_i L_{\lambda-1}^{(2)} \right) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\mu^2)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\mu^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)}. \quad (\text{附 1})
 \end{aligned}$$

仅当  $\lambda-1 > \frac{1}{2}$  时,  $\beta_{\lambda-1} \approx 0$ ,

仅当  $\lambda-1 > \frac{3}{2}$  时,  $K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)} \approx 0$ ,  $L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)} \approx 0$ .

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{\lambda} r^{\lambda-1} [(K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1)\theta + (L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1)\theta] \\
 & + \sum_{\lambda} r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} [-(\lambda_i K_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i K_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda+1)\theta \\
 & + (\lambda_i L_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i L_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda+1)\theta] \\
 & + \sum_{\lambda} \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} K_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + L_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\lambda_i)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_i^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} K_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + L_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\lambda_i^n)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_i^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)}, \tag{附 2}
 \end{aligned}$$

仅当  $\lambda-1 > \frac{3}{2}$  时,  $K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)} \neq 0, L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 w & = \sum_i r^{\lambda-1} \beta_{\lambda-1} \sin(\lambda-1)\theta + \sum_i r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} [-(\lambda_i^2 K_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i^2 K_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda+1)\theta \\
 & \quad + (\lambda_i^2 L_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i^2 L_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda+1)\theta] \\
 & + \left(1 - \frac{4D}{C} \lambda_i^2\right) \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} K_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + L_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\lambda_i^n)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_i^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \\
 & + \left(1 - \frac{4D}{C} \lambda_i^2\right) \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} K_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + L_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\lambda_i^n)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_i^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)}, \tag{附 3}
 \end{aligned}$$

仅当  $\lambda-1 > \frac{1}{2}$  时,  $\beta_{\lambda-1} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 \varphi & = \frac{4D}{k} \lambda_i^2 \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} K_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + L_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\lambda_i^n)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_i^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \\
 & + \frac{4D}{k} \lambda_i^2 \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} K_{\lambda-1}^{(2)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + L_{\lambda-1}^{(2)} \sin(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\lambda_i^n)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_i^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)} \tag{附 4}
 \end{aligned}$$

2. 当  $\lambda = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 f & = \sum_i r^{\lambda-1} [-K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)}] \sin(\lambda-1)\theta + (L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1)\theta \\
 & + \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ -\frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} (\tilde{\alpha}_{\lambda-1} + \frac{4D}{C} \lambda_i^2 K_{\lambda-1}^{(1)} + \frac{4D}{C} \lambda_i^2 K_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1+2n)\theta \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4D}{C} (\lambda_i^2 L_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i^2 L_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1+2n)\theta \right] \\
 & \times \frac{(-\mu^n)^n}{n! \varphi(\lambda+n-2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\mu^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda-1+2n, m)}, \tag{附 5}
 \end{aligned}$$

仅当  $\lambda-1 > \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{\alpha}_{\lambda-1} \neq 0$ ,

$\lambda-1 > \frac{3}{2}$ ,  $K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)} \neq 0, L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 F & = \sum_i r^{\lambda-1} [(K_{\lambda-1}^{(1)} + K_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda-1)\theta + (L_{\lambda-1}^{(1)} + L_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda-1)\theta] \\
 & + \sum_i r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda+1)(1-\nu)} [(\lambda_i^2 K_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i^2 K_{\lambda-1}^{(2)}) \cos(\lambda+1)\theta \\
 & \quad - (\lambda_i^2 L_{\lambda-1}^{(1)} + \lambda_i^2 L_{\lambda-1}^{(2)}) \sin(\lambda+1)\theta] \\
 & + \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ [K_{\lambda-1}^{(1)} \cos(\lambda-1+2n)\theta + \frac{\lambda-1}{\lambda-1+2n} L_{\lambda-1}^{(1)} \sin(\lambda-1+2n)\theta] \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \frac{(-\lambda_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \\
& + \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ K_{i-1}^{(2)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} L_{i-1}^{(2)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-\lambda_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)}, \quad (\text{附 6})
\end{aligned}$$

仅当  $\lambda - 1 > \frac{3}{2}$ ,  $K_{i-1}^{(1)} + K_{i-1}^{(2)} \neq 0$ ,  $L_{i-1}^{(1)} + L_{i-1}^{(2)} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
w = & \sum_i r^{\lambda-1} \bar{\alpha}_{i-1} \cos(\lambda - 1)\theta + \sum_i r^{\lambda+1} \frac{4}{\lambda(\lambda + 1)(1 - \nu)} [(\lambda_1^2 K_{i-1}^{(1)} + \lambda_2^2 K_{i-1}^{(2)}) \cos(\lambda + 1)\theta \\
& - (\lambda_1^2 L_{i-1}^{(1)} + \lambda_2^2 L_{i-1}^{(2)}) \sin(\lambda + 1)\theta] \\
& + \left(1 - \frac{4D}{C} \lambda_i\right) \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ K_{i-1}^{(1)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} L_{i-1}^{(1)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-\lambda_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \\
& + \left(1 - \frac{4D}{C} \lambda_i\right) \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ K_{i-1}^{(2)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} L_{i-1}^{(2)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-\lambda_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)}, \quad (\text{附 7})
\end{aligned}$$

仅当  $\lambda - 1 > \frac{1}{2}$ ,  $\bar{\alpha}_{i-1} \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
\varphi = & \frac{4D}{k} \lambda_i \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ K_{i-1}^{(1)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} L_{i-1}^{(1)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-\lambda_1^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_1^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)} \\
& + \frac{4D}{k} \lambda_i \sum_i \sum_{n=0,1,\dots} \left[ K_{i-1}^{(2)} \cos(\lambda - 1 + 2n)\theta + \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1 + 2n} L_{i-1}^{(2)} \sin(\lambda - 1 + 2n)\theta \right] \\
& \times \frac{(-\lambda_2^2)^n}{n! \varphi(\lambda + n - 2, n)} \sum_{m=0,1,\dots} \frac{\lambda_2^{2m} r^{\lambda-1+2(n+m)}}{m! \varphi(\lambda - 1 + 2n, m)}, \quad (\text{附 8})
\end{aligned}$$

以上各式中均有  $n + m > 0$ .

$$\varphi(\lambda, m) = \frac{\Gamma(\lambda + m + 1)}{\Gamma(\lambda + 1)} = \begin{cases} (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdots (\lambda + m) & (m \geq 1) \\ 1 & (m = 0). \end{cases}$$

### 参 考 文 献

- [1] Folias, E. S., *Int. J. Fract.*, 1(1965), 20—46.
- [2] Erdogan, F. and Kibler, J., *Int. J. Fract.*, 5(1969), 229—237.
- [3] Shi, G. C. and Hagendoif, *Thin Shell Structure*, 1974, 365—375.
- [4] Delale, F. and Erdogan, *Int. J. Solid Struct.*, 15(1979), 907—926.
- [5] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, 1981.
- [6] Zien kiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill London, 1971.
- [7] 李英治, 柳春图, 力学学报, 1983, 4: 366—375.
- [8] 柳春图, 固体力学学报, 1983, 3: 441—448.
- [9] 柳春图, 李英治, 力学进展, 12(1982), 4: 346—359.
- [10] —, 同上, 16(1984), 4: 351—362.