孤立磁通量管的线性无力场模型*

胡 文 瑞

（中国科学院力学研究所，北京）

近年来的大量观测发现，太阳磁场在光球层倾向于集中在小尺度的磁通量管中．根据目前磁象仪的分辨率，磁通量管的直径可以小至100km，或者更小．这就要求从理论上建立磁通量管的模型（有关论述可见 Parker[1] 和 Spruit[2] 的综评）．Deinzer 曾经用一类相似解去描述黑子位形[3]，而 Yun 对这种解进行了改进[4]．作者用小参数展开的方法处理了细长位形磁通量管的平衡问题[5]．Osherovich 分析了分层大气中磁通量管的一类相似解的性质[6]．最近 Deinzer 等在数值分析流动对强磁通量管的影响时，曾导出某些二维平衡位形[7,8]．不难看出，所有这些模型都是在特定假设下组建的．

本文讨论包围在等温分层大气中的一根孤立的磁力线管，分层大气的压力标高远大于磁力线管的直径．在太阳光球层中的小磁元以及日冕中的大磁管都满足这个条件．在大标高近似下，磁力线管相对于柱形的偏离不大，我们可以采用小参数展开的方法处理[9,11]．

假设磁场是轴对称的，在柱坐标中可写为

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\ \frac{1}{r}G(\psi),\ -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right), \tag{1}$$

其中 $G(\psi)$ 为任意函数．对于线性无力场模型，磁流函数 ψ 满足方程[11]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\alpha_*^2\psi=0, \tag{2}$$

其中 $G(\psi)=\alpha_*\psi$，而 α_* 为常数．另一方面，在分层大气中，压力分布可以表示为

$$p(z)=p_0\exp(-z/h), \tag{3}$$

其中 p_0 为 $z=0$ 处的压力值，$h=\mathscr{R}T/g$ 为标高，在等温大气中为常数．在上述关系中，重力 $\boldsymbol{g}=-g\boldsymbol{e}_z$，$z=0$ 位于光球底面．

采用 Spruit 所建议的模型[2]，即磁通量管中磁场相对较强（$\beta\ll 1$），而磁通量管外的大气中磁场相对较弱（$\beta\gg 1$）．这样，磁通量管边界 Γ 处的条件可写为

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+\alpha_*^2\psi^2\right]\Big|_\Gamma=8\pi p_0e^{-z/h}\Big|_\Gamma. \tag{4}$$

此外，还有 $z=0$ 和 $z=\infty$ 处的边界条件．问题就归结为在这些边界条件下求解方程 (2)．

引进无量纲量

$$\xi=\frac{r}{r_0},\ \zeta=\frac{z}{r_0},\ \alpha=\alpha_*r_0,\ \Psi=\frac{\psi}{r_0^2\sqrt{8\pi p_0}},\ \varepsilon=\frac{r_0}{h}. \tag{5}$$

其中 r_0 为磁通量管的典型半径．利用关系 (5)，则方程和边界条件可重新写为

本文 1986 年 3 月 17 日收到．

* 中国科学院科学基金资助的课题．

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}+\alpha^2\Psi=0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\xi^2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}\right)^2+\alpha^2\Psi^2\right]_\Gamma=e^{-\varepsilon\zeta}|_\Gamma, \tag{7}$$

$$\Psi(\xi,0)=f(\xi). \qquad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_0. \tag{8}$$

处理非线性边条件 (7) 是求解问题的关键.

如果标高非常大，$\varepsilon\ll1$，可以采用等压大气近似. 这时，存在着一维问题 $(\partial/\partial\zeta=0)$ 的解，问题就可以简化为

$$\frac{d^2\Psi_0}{d\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{d\Psi_0}{d\xi}+\alpha^2\Psi_0=0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{\xi_0^2}\left[\left(\frac{d\Psi_0}{d\xi}\right)^2+\alpha^2\Psi_0^2\right]_{\xi=\xi_0}=1, \tag{10}$$

其中将等压大气中的磁流函数记为 $\Psi_0(\xi)$. 不难得出问题 (9) 和 (10) 的解为

$$\Psi_0(\xi)=\pm\frac{\xi J_1(\alpha\xi)}{\alpha[J_0^2(\alpha\xi_0)+J_1^2(\alpha\xi_0)]^{1/2}}. \tag{11}$$

等压大气模型忽略了标高的影响. 我们分析大标高情况中压力分布所引起的磁通量管随高度的变化. 这时，可将等压大气模型取为零级近似，然后作小参数 $O(\varepsilon)$ 展开. 我们记

$$\Psi(\xi,\zeta)=\Psi_0(\xi)+\Psi_1(\xi,\zeta), \quad f(\xi)=\Psi_0(\xi)+f_1(\xi), \tag{12}$$

其中有下标 1 的量为 $O(\varepsilon)$ 数量级的小量. 相应地，磁力线管的边界 Γ 表示为

$$\xi=\xi_0+\xi_1(\zeta). \tag{13}$$

将 (12) 式和 (13) 式代人方程和边界条件 (6)—(8)，利用基态的关系 (9) 和 (10)，可以导出扰动态的关系为

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\zeta^2}+\alpha^2\Psi_1=0, \tag{14}$$

$$\left[\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\frac{\partial\Psi_1(\xi_0,\zeta)}{\partial\xi}+\alpha^2\Psi_0(\xi_0)\Psi_1(\xi_0,\zeta)\right]+\left\{\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\left[\frac{d^2\Psi_0(\xi_0)}{d\xi^2}+\alpha^2\Psi_0(\xi_0)\right]-\xi_0\right\}\xi_1(\zeta)=\frac{\xi_0^2}{2}(e^{-\varepsilon\zeta}-1), \tag{15}$$

$$\Psi_1(\xi,0)=f_1(\xi). \tag{16}$$

此外，磁力线管的边界应满足磁流函数为常数

$$\Psi_0[\xi_0+\xi_1(\zeta)]+\Psi_1[\xi_0+\xi_1(\zeta),\zeta]=\Psi_\Gamma.$$

由此导出一阶关系式为

$$\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\xi_1(\zeta)+\Psi_1(\xi_0,\zeta)=0. \tag{17}$$

扰动场的问题就归结为求解由 (14)式—(17) 式所描述的问题.

方程 (14) 式有两类通解[10]，我们在这里取

$$\Psi_1(\xi,\zeta)=\xi\sum_n[a_{1n}\sin(\lambda_n z)+b_{1n}\cos(\lambda_n z)]I_1(\beta_n\xi), \tag{18}$$

其中 I_1 为虚宗量贝塞耳函数，本征值 $\beta_n=\sqrt{\lambda_n^2-\alpha^2}>0$，系数 a_{1n} 和 b_{1n} 由边界条件确定. 事实上，在研究分层大气的影响时，人们很难给出边值 (16) 式中 $f_1(\xi)$ 的具体分布. 由(15)式

和(17)式消去 $\xi_1(\zeta)$，可导出 $\Psi_1(\xi_0,\zeta)$ 的方程

$$\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\frac{\partial\Psi_1(\xi_0,\zeta)}{\partial\xi}+\left[\frac{\xi_0}{\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}}-\frac{d^2\Psi_0(\xi_0)}{d\xi^2}\right]\Psi_1(\xi_0,\zeta)=\frac{\xi_0^2}{2}(e^{-\varepsilon\zeta}-1). \tag{19}$$

(19)式左端为 ζ 的三角函数,我们将右端的函数亦做相应的展开，

$$e^{-\varepsilon\zeta}-1=-\sum_n e_{1n}\sin(\lambda_n\zeta). \tag{20}$$

由于 $\zeta=0$ 时 $e^{-\varepsilon\zeta}-1=0$，所以(20)式的展开中 $\cos(\lambda_n\zeta)$ 的系数为零．考虑到(18)式和(20)式,由(19)式就可以导出

$$a_{1n}=-\frac{\xi_0^4}{2}\frac{e_{1n}\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}}{\left[\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\right]^2\beta_n\xi_0 I_0(\beta_n\xi_0)+\left[\xi_0-\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\frac{d^2\Psi_0(\xi_0)}{d\xi^2}\right]I_1(\beta_n\xi_0)}, \tag{21}$$

$$b_{1n}=0. \tag{22}$$

由(17)式就求出磁通量管边界的扰动量为

$$\xi_1(\zeta)=\frac{\xi_0^3}{2}\sum_n\frac{e_{1n}\sin(\lambda_n\zeta)\ I_1(\beta_n\xi_0)}{\left[\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\right]^2\beta_n\xi_0 I_0(\beta_n\xi_0)+\left[\xi_0-\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\frac{d^2\Psi_0(\xi_0)}{d\xi^2}\right]I_1(\beta_n\xi_0)}. \tag{23}$$

由于 e_{1n} 的量级为 $O(\varepsilon)$，所以，$\xi_1(\zeta)$ 以及 $\Psi_1(\xi,\zeta)$ 的数量级都是 $O(\varepsilon)$．这样,我们就求出了分层大气效应对磁场分布的影响．作为一个粗糙的近似处理，如果只取展开(20)式右端的第一项,则 $e_{10}=c\varepsilon$ 应为正数．这时,(23)式化简为

$$\xi_1(\zeta)\simeq\frac{c\varepsilon}{2}\frac{\xi_0^3 I_1(\beta_0\xi_0)}{\left[\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\right]^2\beta_0\xi_0 I_0(\beta_0\xi_0)+\left[\xi_0-\frac{d\Psi_0(\xi_0)}{d\xi}\frac{d^2\Psi_0(\xi_0)}{d\xi^2}\right]I_1(\beta_0\xi_0)}\sin(\lambda_0\zeta), \tag{24}$$

其中 c 为数量级为1的正数．关系式(24)表明，如果 $\lambda_0\zeta<\pi$，在分层大气中,磁力线管随着高度的增加而增加其半径；而且增大的尺度与标高 h 成反比，即标高越小，半径增加得越大．这个结果在物理上是不难理解的．在重力分层大气中,压力随着高度 z 的增加而减小.另一方面,磁力线管中的磁通量要守恒．为了与磁通量管外边的分层大气相平衡,对于某些磁场位形,磁通量管的截面必然要随高度而增加．这些物理条件与本文的结果完全一致．

参考文献

[1] Parker, E. N., *Cosmical Magnetic Field*, ch. 8, Clarendon Press, Oxford, 1979.
[2] Spruit, H. C., in *The Sun as a Star*, NASA SP-450, 1981, 385.
[3] Deinzer, W. G., *Astrophy. J.*, **141**(1965), 548.
[4] Yun, H. S., *Astrophy. J.*, **162**(1970), 975.
[5] 胡文瑞，中国科学，1981，5：593.
[6] Osherovich, V. A., *Solar Phys.*, **94**(1984), 205.
[7] Deinzer, W. G. et al., *Astron. Astrophys.*, **139**(1984), 426.
[8] Deinzer, W. G. et al., *Astron. Astrophys.*, **139**(1984), 435.
[9] 胡文瑞、李建国，天体物理学报(待发表).
[10] 李建国、胡文瑞，科学通报，**31**(1986)，6：303.
[11] 胡文瑞，中国科学，1977，1：69.