

# 缺陷连续统理论及其在本构方程研究中的应用\*

## I. 一般概述, 运动学和变形几何学

段祝平 黄迎雷

王文标

(中国科学院力学研究所)

(中国科学院研究生院)

**提要** 缺陷连续统理论即缺陷场论是当代固体力学的一个重要分支,其主要任务是对物质的弹性和非弹性性质的宏、微观研究之间架起一座桥梁。它也被认为是由固体力学、近代物理和数学之间交互作用而发展起来的一门交缘学科。本文分三部分较系统地介绍了它的主要发展和最近结果。第I部分讨论具有位错和旋错连续统的运动学和变形几何学,包括Nye, Kondo, Bilby和Kröner等人的早期结果以及我们利用4维物质流形上Cartan结构方程推导出的非线性动力学方程的最近结果。第II部分详细介绍了缺陷连续统的规范场理论,主要强调对该连续统动力学方程的发展。第III部分研究缺陷场论对构造弹塑性物质本构关系的应用。

**关键词** 缺陷连续统; 物质流形; 规范场论; 本构方程; 位错; 旋错

## 1 引言——缺陷场论研究梗概

### 1.1 学科性质和研究范畴

缺陷连续统理论 (continuum theory of defects) 是从研究晶体位错和其他晶体缺陷发展起来的一门新兴学科。其英文名称最早源于 Eshelby<sup>[1]</sup> 的工作。晚近 Kröner<sup>[2]</sup> 在线性范围内对它作了较详细的论述,进一步提出这一称呼,并正式列入缺陷物理的学科范畴。有时,我们可称之为缺陷场论。

现实物体内部包含大量的缺陷,如空穴、杂质原子、位错、旋错和旋位错(dispiration),还有晶界和相界。按照缺陷的特征和维数,人们现在把它区分为点、线和面三种类型的缺陷。这种缺陷在物理上讲可以用各种对称性的破缺来定义。因为,理想有序结构物体存在各种不同的对称性质,如平移对称性和转动对称性,当这种对称性遭到破坏时,就形成了各种

\* 国家自然科学基金资助课题。

不同的缺陷。

缺陷的存在会表现出各种不同的几何和力学特征。如研究具有分布缺陷物体的变形几何学，归结为建立并定量地描述各种分布缺陷的拓扑结构。另外，形成缺陷需要能量，它以内应力和内应变的方式表现出来。这种内应力和施加作用于物体上产生的外应力不同。但随着物体在外载下发生宏观运动（可观测的），物体内部的缺陷也会运动、增生和湮灭，彼此间以及和外加应力场发生相互作用。物体的很多宏观非线性性质都是和缺陷的运动及相互作用密切相关的。

因此，缺陷场论应该是一门用连续统方法研究具有大量缺陷的物体的运动（包括可观测的宏观运动和不可观测的缺陷运动）和变形规律的一门学科。这里我们强调连续统的方法，就是不再把缺陷看成是离散或个别的，而是在4维时空中引进缺陷的分布密度和流密度并用场论的方法建立相应的运动学和动力学方程<sup>[3]</sup>。因此，在发展这门学科时，除了强调宏观、细观和微观相结合的方法外，还把近代数学、物理和力学、材料科学有机地结合起来，进行各种学科的相互交感和渗透。这顺应着现代学科发展的潮流。

缺陷连续统又是一门正在发展中的学科。无论从方法论、理论预示的结果和被学术界接受的程度来说，都不象经典位错理论那样成熟，仍存在很多争议之点，数学方法也不统一。正因为这样，它才进一步引起人们广泛的研究兴趣并进一步推动学科的发展。

## 1.2 学科发展历史

缺陷连续统理论是从研究位错和旋错基础上发展起来的。历史上的发展可以大致分成四个阶段。第一阶段1901—1934。Weingarten<sup>[4]</sup>

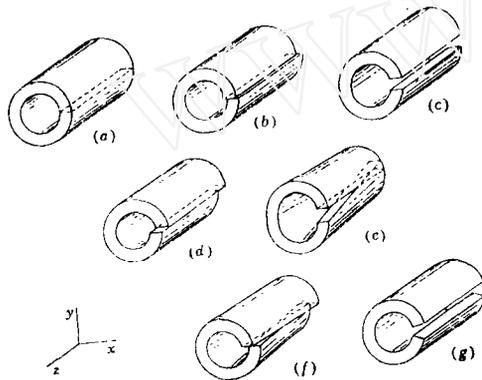


图 1

首先提出了各向同性弹性体中“宏观”位错的概念，而Volterra将宏观位错分成六种不同组态，见图1。其中三种组态和平移操作有关，而另外三种和转动操作有关。而实际中的位错是平移和转动操作的联合。后来Love用弹性力学进行了详细计算<sup>[5]</sup>，得到了最一般的解，这样发展了“宏观”位错的弹性理论。第二阶段1934—1950。以Orowan<sup>[6]</sup>，Polanyi<sup>[7]</sup>和Taylor<sup>[8]</sup>三人在同一年内发表的三篇开创性文章建立了离散位错的晶格点阵模型。随后，Peierls用半晶格点阵

理论计算了位错核心的应力场分布，创造性地解决了关于位错核心由线弹性理论预见的应力奇异性问题。喜剧性的是Peierls计算的物理模型是由Orowan提供的，Peierls一再宣称<sup>[9]</sup>他的这份功劳应该归功于Orowan。Peierls的原始计算中有些错误，后来被Nabarro<sup>[10]</sup>纠正了。另外，Frenkel-Kontorova<sup>[11]</sup>从晶格动力学出发并利用1维原子链模型讨论了晶格位错的运动学问题，建立了著名的Sin-Gordon方程。在这期间，Frank和Read<sup>[12]</sup>提出了位错运动和增殖的一种机制，后来得到了实验的证实。第三个阶段1950—1965。这15年期间发表了大量关于晶体位错理论的文章和专著。这在Hirth的纪念位错理论发展50周年的短文中作了很好的评述<sup>[13]</sup>。理论的发展分成两个方面。一方面的工作是在弹性理论框架内，研究各种形状的离散位错产生的弹性场的性质，包括应力和应变场的计算以及研究位错和

其他缺陷的相互作用,以便进一步弄清位错在固体强度理论中扮演的角色。Frank<sup>[14]</sup>于1951年首先给出了Burgers矢量的正确定义并把对直线刃型位错的研究扩大到任意线缺陷组态的位错中去。1950年Peach和Koehler<sup>[15]</sup>计算了外加应力场作用在位错上的象力(又称物质力或本构力),后来被进一步说明当这种象力达到一定临界值时,位错开始越过障碍的势垒而滑动。因此这一临界值可比作是晶体的屈服应力。Nabarro<sup>[16]</sup>详细计算了简单形状直线位错的应力场问题。Kroupa<sup>[17]</sup>将Nabarro的计算推广到平面位错环的情形中去。Eshelby的早期工作说明了自由边界和位错的相互作用,提出了计算象力的方法。Stroh<sup>[18]</sup>发展了一种解析方法处理各向异性弹性介质中位错场的计算。在这期间,也出版了不少专著,论述位错理论的各种问题<sup>[19-25]</sup>。值得指出的是,位错理论的发展及其重要性吸引了我国的金属物理学家及力学家。在1962年钱临照、柯俊、李薰和葛庭燧等的倡导下,举办了“晶体缺陷和金属强度”的讨论报告会,系统总结了60年代以前关于位错的理论和实验工作<sup>[26]</sup>。不幸的是这种势头没有坚持下来,以致今天我国在这方面的研究大大落后了。这是一个值得记取的教训。50—60年代成功地发展了许多实验方法使对位错的直接观察成为可能<sup>[27-34]</sup>。尤其是今天用透射电子显微镜直接观察位错的方法已被普遍接受。位错理论在研究断裂机制,金属的蠕变、内耗和疲劳,高应变率下金属的屈服和本构关系等方面获得了相当大的成功。第三阶段的另一方面理论工作是关于位错连续统理论的提出和发展。位错场论的方法是基于下面的出发点提出来的:因为存在于晶体内部的位错是大量的,单位面积内包括的位错数目达 $10^8-10^{11}$ 之多,即使把个别位错的应力场和应变场的性质弄清楚,在总体和定量上也还是不容易得到晶体物质的宏观性质。基于这一点,用场或连续统方法来描述位错似乎更加合理。位错连续统理论的早期发展主要包括Nye<sup>[35]</sup>,Kondo<sup>[36,37]</sup>,Bilby等<sup>[38,39]</sup>,Kröner<sup>[40]</sup>,Bullough和Perrin<sup>[41]</sup>以及Nabarro<sup>[42]</sup>等人的开创性工作。这一理论主要包括位错场的几何结构描述和建立场的动力学方程两方面内容。在第一方面,人们成功地把微分几何(黎曼和非黎曼几何)的方法用到研究位错的连续统理论中,把位错密度及旋错密度同某一非黎曼空间的挠率及曲率联系起来。这方面的发展和物理学中的广义相对论的发展十分相似,而前者却比后者晚了50年,在我国更是空白。第二方面的内容是用Lagrangian场论的方法建立关于位错和旋错场的运动方程和本构定律。人们已经成功地解决了在位错密度和位错流密度给定的条件下,关于无限和有限、线性和非线性弹性体内应力和应变场的计算问题。这主要是针对静态问题的。这方面可详细参考Kosevich<sup>[43]</sup>,Eshelby<sup>[44]</sup>,Willis<sup>[45]</sup>,以及Gairola<sup>[46]</sup>的系统总结文章。相对而言,位错动力学场论的发展比较困难。在位错结构和运动方式已知的条件下,在线弹性范围内可以计算出运动位错产生的动态应力场和应变场。J. Weertman和J. R. Weertman<sup>[47]</sup>和Schock<sup>[48]</sup>对此进行了很好的总结,但主要是针对1维情形的。如果用场的方法来描述位错动力学问题,当位错密度和位错流密度随时间改变时,人们已建立了场的基本方程<sup>[49,50]</sup>,Kosevich<sup>[51]</sup>较系统地研究过位错动力学场的方程求解问题。但相对而言,这方面的研究比较困难,用到的数学工具较多。

1965年至今是位错理论发展的第四个阶段,弹性位错场论和位错连续统理论向纵深发展,文献是大量的。每年差不多都有专门性的国际讨论会,很难把它们都罗列出来。尤其值得提到的是1968年在西德举行的国际讨论会<sup>[52]</sup>。这次会议是为纪念法国的三位伟大的科学家E. Cosserat和F. Cosserat兄弟和E. Cartan而举行的。在这次会议上,各国的许多

著名学者聚集一堂,就广义连续介质力学和位错场论的重要课题发表观点。人们企图利用连续统的理论和方法把各种研究微观物质世界的方法统一起来,并能在微观研究和宏观唯象研究中架起一座桥梁。大会主席 E. Kröner 指出:“当今科学变得愈来愈复杂,如果一个科学工作者只看到自己眼皮底下的一星点工作而不关心‘左邻右舍’的话,他对科学的贡献就愈来愈少。因此,在科学各领域内交换概念的重要作用愈来愈明显了,而数学家、力学家和物理学家之间关于科学概念的交流是这次国际讨论会上最为被关注的事情。”事实证明,这次国际讨论会是成功的。它进一步推动了位错场论和广义连续介质力学的发展。

就位错场论而言,1968年以来有下面几个重要的发展:①线性位错场论的进一步深化和发展。对各向异性介质和有限物体中的位错场计算发展了许多实用的方法,如 Willis<sup>[53]</sup>, Mura<sup>[54]</sup>, Eshelby<sup>[55]</sup> 等人的经典工作。1982年再版的 Hirth 和 Lothe 的“位错理论”一书<sup>[56]</sup>中进行了系统而全面的总结,并罗列了极为详细的参考文献。②建立了关于晶体缺陷的非线性动力学场论,把变形几何学和运动学及动力学作为一个完整的系统加以研究,用 Lagrange 场论和变分方法来构造非线性系统的场方程,讨论了位错场论中的各种守恒定律<sup>[67]</sup>,这是对弹性场中守恒定律的推广<sup>[58,60]</sup>。③位错场论的更加数学化和物理化,其中包括欧发<sup>[60]</sup>, A. Herrmann<sup>[61]</sup> 的原始性工作。A. Herrmann 把电磁场和线性位错方程进行了类比,指出存在一类 Abel 规范群的变换使位错场方程保持不变,继而 Edelen 等<sup>[62-65]</sup> 发展了 A. Herrmann 的工作,把位错和旋错的规范场理论加以深化,将 Yang-Mills 非 Abel 规范场(以下称为 Y-M 规范场)理论引导到位错和旋错场论中来,建立了一个完整的理论系统。最近,龙期威和董连科的讲座<sup>[66]</sup>介绍了有关这方面的工作。Edelen 和 Kadic 的工作是一种线性分解(变换)方法,把转动和平移两种规范变换施加于位移场上。段一士和段祝平<sup>[67]</sup>采用另一种三构形方法,把非 Abel 规范变换群施加在由瞬时构形到自然构形的畸变张量上,建立了关于位错和旋错的非线性场论方程并讨论了相应的守恒定律。④位错理论在其他物理学和力学分支的应用。位错理论在解释断裂现象时获得了相当大的成功。用位错动力学理论来构造弹塑性本构关系也取得了一定的进展,特别是把晶体的滑移理论和位错动力学联系起来,使我们加深了对金属有限塑性变形理论的认识<sup>[68,69]</sup>。

当然,企图通过位错和旋错场论的发展找到一条从微观和细观过渡到宏观理论的道路还是很艰难的。其中不但要依赖于理论本身的发展和完善,更重要的是要把理论成果和实验观察结合起来,使其基础更加坚实,发展更为全面。

### 1.3 任务及与其他学科的联系

综上所述,缺陷连续统理论的建立有着如下三个方面的任务。

1.3.1 在给定缺陷分布密度和流密度的条件下,发展各种解析或数值方法,计算本征应力场和本征应变场 这时,离散位错看成是分布位错的一种特例。这一部分内容属于线性或非线性的非协调弹性场论。这里要强调的是要研究各种已知缺陷运动引起的耗散和不可逆热力学效应以及各种缺陷之间的相互作用。在计及热效应的情况下研究离散位错运动的文章尚不多见。

1.3.2 在缺陷分布和流密度未知的条件下,发展缺陷的连续统理论 这与非协调弹性场论相平行而且更为重要。这方面主要包括:①研讨缺陷连续统的变形几何学。上面所引关于 Kondo, Bilby 和 Kröner 等人的早期文献表明, Cartan 创立的仿射几何学或非黎曼几何



统提供了许多重大课题。M. Klcman 的近著《点、线和壁》充分反映了这个领域的新进展<sup>[74]</sup>。另外，位错理论在地球动力学、震源机制的研究中也有着广泛的应用。由于篇幅关系，我们不能在这里详细地介绍。

#### 1.4 讨论的内容

本文不可能涉及所有有关缺陷场的主要结果，而只能就其中最基本、最主要且较为成熟的内容加以讨论。其中包括：

1.4.1 线性缺陷连续统理论 着重讨论连续统方法是如何引进缺陷的，包括缺陷的运动学方程及动力学方程。并简单地讨论在缺陷场给定后本征应力和本征应变的计算方法。这部分内容相当成熟。

1.4.2 非线性缺陷连续统的变形几何学 其中包括以 Cartan 几何为基础的二构形方法（主要是解决静力学问题）和非线性缺陷连续统在描述运动学过程中的三构形方法。这两种方法，形式不同，但实质上是一致的，中心思想是要建立起分布缺陷密度和流密度与相应非欧空间几何结构的关系并给出相应的连续性方程。

1.4.3 缺陷的规范场理论 主要介绍 Kadac 和 Edelen<sup>[66]</sup> 的最新结果，看看规范场思想是如何被引入缺陷场中来的及其在建立缺陷场动力学方程中的应用，并指出理论的不足及其可能的发展。同时也介绍一下由三构形方法发展起来的规范场理论。

1.4.4 缺陷连续统理论与弹塑性本构关系 这部分内容虽然目前还很不成熟，但还是有一些很富有启发性的结果，了解它们对理论的应用将大有帮助。

## 2 线性缺陷连续统理论

### 2.1 运动和变形的描述

考虑一个单连通的宏观连续体，它内部含有大量的微观缺陷，如位错和旋错等线缺陷。它的每一个质点  $P$  的宏观运动仍然假定可以用一个从欧氏空间到欧氏空间连续变换

$$y^a = y^a(x^\mu, t) \quad \text{或} \quad x^\mu = x^\mu(y^a, t) \quad (2.1)$$

来描述。其中  $x^\mu$  和  $y^a$  ( $\mu = 1, 2, 3; a = 1, 2, 3$ ) 分别表示同一质点在参考构形  $B_0$  和瞬时构形  $B$  的空间位置坐标，如图 2 所示。

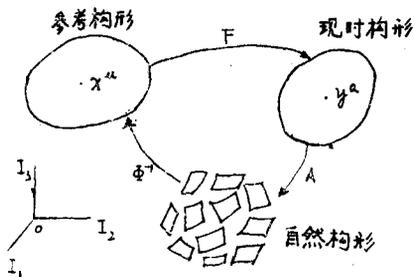


图 2

由运动 (2.1)，我们可以引进同一物质线元在不同时刻之间的变换关系

$$dr = F \cdot dR \quad \text{或} \quad dR = F^{-1} \cdot dr \quad (2.2)$$

其中 (重复指标求和)

$$\left. \begin{aligned} dr &= dy^a l_a, & dR &= dx^\mu l_\mu \\ F &= y^a_l \otimes l^\mu, & F^{-1} &= x^\mu_a \otimes l^a \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

这里  $l_\mu$  和  $l_a$  分别为参考和瞬时构形的笛卡儿坐标基

矢，可取为相同或不同的标架，而

$$y^a_\mu = \left. \frac{\partial y^a}{\partial x^\mu} \right|_{t = \text{const}}, \quad x^\mu_a = \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \right|_{t = \text{const}} \quad (2.4)$$

是变形梯度张量  $F$  的分量， $F^{-1}$  是其逆。记号  $\otimes$  表示张量积。显见，这种描述方法和经典连续统力学没有区别。由 (2.1) — (2.4)，我们还可引进随动标架，如

$$e_\mu = y_\mu^a |_{a}, \quad e_a = x_a^\mu |_{\mu} \quad (2.5)$$

由于假定 (2.1) 所表示的运动是处处连续可微的, 所以 (2.2) 表示的变换是完整变换, 它满足

$$\oint_{C_R} dr = \oint_{C_R} F \cdot dR \equiv 0, \quad \oint_{C'} dR = \oint_{C'} F^{-1} \cdot dr \equiv 0 \quad (2.6)$$

其中  $C_R$  和  $C'$  是分别在构形  $B_0$  和  $B$  上选取的对应的封闭回路。

由 (2.1), (2.2) 给出的宏观运动并不能描述物体微元内的缺陷的运动, 我们不妨称其为微观运动。为了用连续统的方法和理论描述缺陷的运动, 我们假想在每一个瞬间, 把一个“宏观无限小但微观无限大”的微元体  $\Delta V$  从完整的连续体中分割出来, 采取某种假想的步骤使得该微元体经过一个“放松”的变换而变成一个理想的无应力 (既无外加应力又无内应力), 无应变和无缺陷的自由状态  $\delta V$ , 并称其为对应于变形态  $\Delta V$  的自然态。由于缺陷的存在, 这个“放松”变换已不再是从欧氏到欧氏空间的映射, 而是一种从欧氏到某一非欧空间的映射了。一般假设它是连续的。若  $A$  表示该映射, 则有

$$\delta R = A \cdot dr \quad \text{或} \quad dr = B \cdot \delta R \quad (2.7)$$

其中  $\delta R$  表示瞬时构形中的物质线元  $dr$  通过放松变换  $A$  后得到的自然态 (构形) 中的物质线元。  $B = A^{-1}$  是自然构形到瞬时构形的逆映射, 是从非欧空间到欧氏空间的映射。关于  $A$  和  $B$  的张量表示, 下面还要介绍。这里我们强调的是: 第一, 当存在缺陷时,  $A$  表示的是一个不完整变换, 从而有

$$\oint_{C'} \delta R = \oint_{C'} A \cdot dr \neq 0 \quad (2.8)$$

第二,  $A$  所表示的变换和经典塑性力学中讲的弹性卸载过程在形式上相仿但在本质上是有所区别的, 因为这里关于自然态的选择比经典塑性理论, 如 E. H. Lee<sup>[75]</sup> 的弹性卸载有更加明确的几何意义。在 Lee 的文章中用  $F_e$  表示  $B$ 。

从 (2.7), 我们可以建立从参考构形  $B_0$  到自然构形的变换

$$\delta R = (A \cdot F) \cdot dR \equiv \phi \cdot dR, \quad dR = (F^{-1} \cdot B) \cdot \delta R = \phi^{-1} \cdot \delta R \quad (2.9)$$

其中  $\phi = A \cdot F$ , 它显然也是一个非完整变换, 相当于经典塑性里的  $F_p$ 。从而我们有

$$\oint_{C_R} \delta R = \oint_{C_R} \phi \cdot dR \neq 0 \quad (2.10)$$

目前, 在位错连续统理论中关于  $A$  的表示有很多不同的方法, 在下一节还要介绍。现在我们就小变形情形对 (2.7) 和 (2.9) 作一线性化处理。

## 2.2 线性化处理和运动学方程

设宏观变换  $F$  可以用一位移梯度来表示:

$$F = I + \nabla_R \otimes u \equiv I + \beta \quad (2.11)$$

其中  $\beta = \nabla_R \otimes u$  称为总的畸变张量,  $\nabla_R$  是参考构形上的梯度算子,  $u$  是位移矢量:

$$u = (y^a - \delta_\mu^a x^\mu) |_{a}$$

其中  $\delta_\mu^a$  是 Kronecker  $\delta$ 。如果将不完整变换  $B$  和  $\phi$  表示成

$$B = I + \beta', \quad \phi = I + \beta'' \quad (2.12)$$

其中,  $\beta'$  和  $\beta''$  分别称为弹性畸变张量和塑性畸变张量, 则将 (2.11) 和 (2.12) 代入

$F = B \cdot \phi$ , 得

$$\beta = \beta^e + \beta^p + \beta^e \cdot \beta^p \quad (2.13)$$

这就表明在一般情况下, 总的畸变张量不能表示成弹性和塑性畸变张量之和, 只有在弹性和塑性畸变都很小的情况下才能那样做。

在下面的推导中, 我们对参考构形和瞬时构形选取相同的坐标标架, 从而在线性近似下有  $\nabla_R = \nabla_r \equiv \nabla$ , 对这两个构形不再区分。从位移场  $u$  和定义如下一组几何量:

$$\left. \begin{aligned} e &= (\nabla \otimes u)_{s,m}, & \chi &= \nabla \otimes \left( \frac{1}{2} \nabla \times u \right) \equiv \nabla \otimes \omega \\ V &= \dot{u}, & \Omega &= \dot{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times V \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

分别称  $e$  和  $\chi$  为应变张量和弯扭张量, 而  $V$  和  $\Omega$  为速度矢量和转动速度矢量, 它们可替代位移场描述变形运动。  $(\ )_{s,m}$  表示对括号内张量取对称部分。按定义, 总畸变张量可表为

$$\beta = e + \varepsilon \cdot \omega \quad (2.15)$$

其中  $\varepsilon$  为三阶交错张量,  $\omega$  称为转动矢量。

由于 (2.14) 中的四个几何量都可用位移场  $u$  来表示, 它们不能相互独立。容易验证它们必须满足一组协调方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times e - (\varepsilon \cdot \chi) : \varepsilon &= 0, & \nabla \times \chi &= 0 \\ \nabla \otimes V - \dot{e} - \varepsilon \cdot \Omega &= 0, & \nabla \otimes \Omega - \dot{\chi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中  $(\dot{\ })$  表示对时间的导数, 而  $\cdot$  表示双点积。

当物体内部不存在缺陷时, 弹性场和基本总场是一样的, 即  $B = F$ ,  $\phi = I$ 。但如果物体内部存在运动的缺陷, 则按照 Kossecka 和 de Wit<sup>[76,77]</sup> 的观点, 在线性化的意义下, 仍然可将 (2.14) 中的量分解为弹性分量和塑性分量之和:

$$\left. \begin{aligned} e &= e^e + e^p, & \chi &= \chi^e + \chi^p \\ V &= V^e + V^p, & \Omega &= \Omega^e + \Omega^p \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

这种分解是线性缺陷连续统的一个基本性假设。与经典线性连续统理论不同, 这里引进了塑性速度场  $V^p$ 。由于塑性场可以任意引进 (它不引起应力的变化), 它一般不满足类似于 (2.16) 的协调条件, 我们可定义缺陷场为这些不协调量:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (\varepsilon \cdot \chi^p) : \varepsilon - \nabla \times e^p, & \Theta &= \nabla \times \chi^p \\ J &= \dot{e}^p + \varepsilon \cdot \Omega^p - \nabla \otimes V^p, & S &= \nabla \otimes \dot{\chi}^p - \nabla \otimes \Omega^p \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

其中,  $\alpha$  和  $\Theta$  分别称为位错密度张量和旋错密度张量, 而  $J$  和  $S$  分别称为位错流密度和旋错流密度张量。将 (2.17) 和 (2.18) 代入 (2.16) 同样可得到缺陷场作为弹性场的不协调量

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times e^e - (\varepsilon \cdot \chi^e) : \varepsilon &= \alpha, & \nabla \times \chi^e &= \Theta \\ \nabla \otimes V^e - \dot{e}^e - \varepsilon \cdot \Omega^e &= J, & \nabla \otimes \Omega^e - \dot{\chi}^e &= S \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

根据 (2.18), 利用简单的张量代数运算可以得到缺陷场的连续性方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \alpha &= \varepsilon : \Theta, & \nabla \cdot \Theta &= 0 \\ \dot{\alpha} &= (\varepsilon \cdot S) : \varepsilon - \nabla \times J, & \dot{\Theta} &= -\nabla \times S \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

上式表明, 旋错 $\theta$ 的存在可以作为位错的源, 而旋错本身是无源的。位错密度的变化是由位错流和旋错流引起的, 但旋错的变化率只和旋错流有关。顺便说明, 由 (2.20) 给出的缺陷场的连续性方程与电磁理论中的 Maxwell 方程是十分相似的, 这就启发人们把电磁场中的规范场理论应用到缺陷场从而发展缺陷场的规范场理论, 本文的第 II 部分将详细介绍这一点。

### 2.3 缺陷场的几何意义: Burgers 矢量和 Frank 矢量

对于 Volterra 早期引进的个别离散的线缺陷, Burgers 矢量和 Frank 矢量是描述位错和旋错强度的特征矢量。现在我们讨论如何将其引进缺陷场中来。为此, 我们引进一个新的协调场

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{u} - \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \quad (2.21)$$

和两个不协调场

$$(\delta \mathbf{u})^c = \mathbf{e}^c \cdot d\mathbf{r} - (d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\chi}^c) \times \mathbf{r}, \quad (\delta \mathbf{u})^p = \mathbf{e}^p \cdot d\mathbf{r} - (d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\chi}^p) \times \mathbf{r} \quad (2.22)$$

其中  $\mathbf{r}$  表示位矢。由 (2.14), (2.21) 和 (2.22) 可得到

$$d\mathbf{u}^* = (\delta \mathbf{u})^c + (\delta \mathbf{u})^p \quad (2.23)$$

从而, 一个协调场  $d\mathbf{u}^*$  分解为两个不协调场之和。在瞬时构形上取一封闭回路  $C_r$ , 并求积分

$$\mathbf{b} = -\oint_{C_r} (\delta \mathbf{u})^p = \oint_{C_r} [(d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\chi}^p) \times \mathbf{r} - \mathbf{e}^p \cdot d\mathbf{r}] \quad (2.24)$$

则称  $\mathbf{b}$  是关于回路  $C_r$  的 Burgers 矢量。利用 (2.18)<sub>1</sub> 和 Stokes 定理, 可将 (2.24) 表示成

$$\mathbf{b} = \iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) \quad (2.25)$$

其中  $S_r$  是  $C_r$  围成的面积,  $d\mathbf{S}$  是有向面元。

另外, 还可引进 Frank 矢量。为此设

$$d\boldsymbol{\omega} = (\nabla \otimes \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{\chi}^c \cdot d\mathbf{r} + \boldsymbol{\chi}^p \cdot d\mathbf{r} = (\delta \boldsymbol{\omega})^c + (\delta \boldsymbol{\omega})^p \quad (2.26)$$

其中一个协调场  $d\boldsymbol{\omega}$  分解为两个不协调场  $(\delta \boldsymbol{\omega})^c$  和  $(\delta \boldsymbol{\omega})^p$  之和

$$(\delta \boldsymbol{\omega})^c = \boldsymbol{\chi}^c \cdot d\mathbf{r}, \quad (\delta \boldsymbol{\omega})^p = \boldsymbol{\chi}^p \cdot d\mathbf{r} \quad (2.27)$$

而定义

$$\mathbf{f} = -\oint_{C_r} (\delta \boldsymbol{\omega})^p = -\oint_{C_r} \boldsymbol{\chi}^p \cdot d\mathbf{r} \quad (2.28)$$

为 Burgers 回路  $C_r$  所环绕的 Frank 矢量, 显然, 它表示绕  $C_r$  一圈后弹性转动角度的总增量。对 (2.28) 利用 Stokes 定理并计及 (2.18)<sub>2</sub> 可建立 Frank 矢量和旋错密度之间的联系

$$\mathbf{f} = -\iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\chi}^p) = \iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (2.29)$$

在 (2.25) 和 (2.29) 中, 当  $S_r$  趋于零时, 可得到下列极限:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{b} + \Delta \mathbf{f} \times \mathbf{r}) / \Delta S \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta \mathbf{f} / \Delta S \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

其中  $\mathbf{n}$  是  $\Delta \mathbf{S}$  的单位法矢量。这样我们清楚看到, 旋错密度表示单位面积内通过的 Frank 矢量的总条数, 而位错密度有两个方面的贡献, 一部分是单位面积内通过的 Burgers 矢量总

和, 另一部分则是由 Frank 矢量所贡献的。

如果我们假定 Burgers 回路  $C_r(t)$  在空间是运动的, 其运动速度为  $V_d$ , 则利用运动线积分公式从 (2.24) 和 (2.28) 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}} &= \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \oint_{C_r(t)} d\mathbf{r} \cdot [\mathbf{S} \times \mathbf{r} - \mathbf{J} - \mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{V}_d) \times \mathbf{r}] \\ &= \iint_{S_r(t)} d\mathbf{S} \cdot \nabla \times [\mathbf{S} \times \mathbf{r} - \mathbf{J} - \mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{V}_d) \times \mathbf{r}] \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} = - \oint_{C_r(t)} d\mathbf{r} \cdot [\mathbf{S} + \mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Theta}] = - \iint_{S_r(t)} d\mathbf{S} \cdot \nabla \times [\mathbf{S} + \mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Theta}] \quad (2.32)$$

这样一来, 我们可以把位错流和旋错流密度与 Burgers 回路的运动和 Burgers 矢量及 Frank 矢量的变化率联系起来。

另外, 若  $S_r$  是一封闭曲面, 则从 (2.25) 和 (2.29) 运用 Gauss 定理和 (2.20)<sub>1,2</sub> 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{r}) = \iiint_{V_r} \nabla \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{r}) dV \equiv 0 \\ \mathbf{f} &= - \iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Theta} = - \iiint_{V_r} \nabla \cdot \boldsymbol{\Theta} dV \equiv 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

这表明对于任一封闭曲面  $S_r$ , 特征矢量  $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{f}$  的守恒性质。

#### 2.4 线性位错连续统

现在, 我们讨论只有位错而无旋错的情形。这是在金属晶体理论中最常见到的, 在大多数单晶材料中旋错形成的能量要比位错的大得多, 从而不易形成。对线性位错连续统理论, Kröner 作了一个很好的总结<sup>[2]</sup>, 可参阅。

线性位错连续统是以总畸变张量分解成弹性和塑性两部分之和为基础的。在 (2.13) 中略去二阶项  $\beta^e \cdot \beta^p$  可得到

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^e + \boldsymbol{\beta}^p \quad (2.34)$$

这样, 总应变  $\mathbf{e}$  和转动  $\boldsymbol{\omega}$  都可分解为

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^p \quad (2.35)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}^e &= (\boldsymbol{\beta}^e)_{s,ym}, & \mathbf{e}^p &= (\boldsymbol{\beta}^p)_{s,ym} \\ \boldsymbol{\omega}^e &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\beta}^e)_{as,ym}, & \boldsymbol{\omega}^p &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\beta}^p)_{as,ym} \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

下标 sym 和 asym 分别表示对称化和反对称化。根据 (2.35)<sub>2</sub> 可把弯扭张量  $\boldsymbol{\chi}$  分解为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi} &= \boldsymbol{\chi}^e + \boldsymbol{\chi}^p = \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}^e + \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}^p \\ \boldsymbol{\chi}^e &= \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}^e = \frac{1}{2} \nabla \otimes [\boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\beta}^e)_{as,ym}] \\ \boldsymbol{\chi}^p &= \nabla \otimes \boldsymbol{\omega}^p = \frac{1}{2} \nabla \otimes [\boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{\beta}^p)_{as,ym}] \\ \dot{\boldsymbol{\chi}} &= \dot{\boldsymbol{\chi}}^e + \dot{\boldsymbol{\chi}}^p = \nabla \otimes \dot{\boldsymbol{\omega}}^e + \nabla \otimes \dot{\boldsymbol{\omega}}^p \end{aligned} \quad (2.37)$$

其中

$$\dot{\chi}^c = \nabla \otimes \dot{\omega}^c = \nabla \otimes \Omega^c, \quad \dot{\chi}^b = \nabla \otimes \dot{\omega}^b = \nabla \otimes \Omega^b \quad (2.38)$$

将 (2.36)–(2.38) 代入 (2.18), 我们立即得到

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\nabla \times \beta^b = \nabla \times \beta^c, & \Theta &= 0 \\ J &= \nabla \otimes V^c - \dot{\beta}^c, & S &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

这表明, 只要线性分解 (2.34) 和 (2.35) 成立, 旋错密度和旋错流密度便消失了. 连续性方程 (2.20) 简化为

$$\nabla \cdot \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = -\nabla \times J \quad (2.40)$$

这时只存在 Burgers 矢量而不存在 Frank 矢量, 且 (2.30) 和 (2.31) 简化为

$$\mathbf{n} \cdot \alpha = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta S}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\oint_{C_r(t)} d\mathbf{r} \cdot [\mathbf{J} + \mathbf{V}_d \times \alpha] \quad (2.41)$$

这给出了位错密度和其流密度的几何意义.

### 2.5 Kröner 线性非协调理论及其推广

我们曾经假定, 由参考态到瞬时态的宏观变形是一种协调变形. 这种变形的协调性可以由协调条件

$$\oint_{C_r} d\mathbf{u} = \oint_{C_R} (\mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{R} = 0 \quad (2.42)$$

来保证. 由于  $d\mathbf{u} = d\mathbf{r} \cdot \beta$ , 所以利用 Stokes 定理, 可以得到

$$\oint_{C_r} d\mathbf{u} = \oint_{C_r} d\mathbf{r} \cdot \beta = \iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \beta) = 0 \quad (2.43)$$

即有

$$\nabla \times \beta = \nabla \times (\nabla \otimes \mathbf{u}) = 0 \quad (2.44)$$

这就是一阶微分形式的协调条件. 由于

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\beta + \beta^T) = (\nabla \otimes \mathbf{u})_{s,ym}$$

St. Venant 已证明了存在一个位移场  $\mathbf{u}$  使其满足 (2.44) 的充要条件是

$$\text{Inc } \mathbf{e} = \nabla \times \mathbf{e} \times \nabla = 0 \quad (2.45)$$

这里 Inc 表示一个非协调算子, 首先由 Kröner<sup>[2]</sup> 引进. 称 (2.45) 为二次微分形式的协调条件. 显而易见, 三种形式的协调条件 (2.42), (2.44) 和 (2.45) 是彼此等价的.

现将分解式 (2.17)<sub>1</sub> 代入 (2.45), 并定义

$$\eta \equiv \text{Inc } \mathbf{e}^c = \nabla \times \mathbf{e}^c \times \nabla \quad (2.46)$$

为非协调张量, 再利用 (2.18)<sub>1,2</sub> 可得到

$$\eta = -\nabla \times \mathbf{e}^b \times \nabla = (\alpha \times \nabla - \Theta^T)_{s,ym} \quad (2.47)$$

其中  $\Theta^T$  是  $\Theta$  的转置. 这就把非协调张量  $\eta$  和缺陷密度  $\alpha$  和  $\Theta$  联系起来, 它表明缺陷场的存在是弹性应变非协调之源. 再根据连续性方程 (2.20) 可以证明

$$\nabla \cdot \eta = 0 \quad (2.48)$$

从而, 非协调张量  $\eta$  沿一封闭曲面的积分为零, 这是非协调张量的守恒性质.

为了得到运动学的不协调方程, 我们由一个二阶张量场  $\mathbf{A}$  定义一个三阶张量场

$$\text{Dinc } \mathbf{A} = [ln, k] \mathbf{A} \quad (2.49)_1$$

其分量形式为

$$(\text{Dinc } \mathbf{A})_{nkl} = A_{nk,l} - A_{kl,n} - A_{ln,k} \quad (2.49)_2$$

利用速度  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}}$  和应变张量, 立即可得到二阶微分形式的运动学协调条件

$$\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{V} - \text{Dinc } \dot{\mathbf{e}} = 0 \quad (2.50)$$

这可改写为

$$\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{V}^c - \text{Dinc } \dot{\mathbf{e}}^c = \mathcal{F} \quad (2.51)$$

其中定义

$$\mathcal{F} = -\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{V}^p + \text{Dinc } \dot{\mathbf{e}}^p \quad (2.52)$$

称为三阶不协调流密度张量. 利用 (2.47) 和 (2.18)<sub>3,4</sub> 可得到

$$\dot{\eta} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{F}^{T_{23}}) \times \nabla, \quad \mathcal{F} = \text{Dinc } \mathbf{J}_{s,m} \quad (2.53)$$

其中  $\mathcal{F}^{T_{23}}$  表示  $\mathcal{F}$  对第 2 和第 3 个下标的转置. 这就建立了不协调流密度张量和位错流密度张量之间的关系, 即位错流密度的存在是动态不协调源.

## 2.6 线性非协调弹性场的求解

在上面关于缺陷的线性场讨论中, 我们引进了两类场量: 弹性场和缺陷场. 缺陷场的存在使得弹性变形成为非协调变形. 在上面的讨论中, 我们引进的缺陷场有  $\mathbf{V}^p, \Omega^p, \mathbf{e}^p$  和  $\mathbf{x}^p$ , 在它们给定后, 只要再知道总位移场  $\mathbf{u}$ , 弹性场就可以完全确定了. 这样一共有 27 个未知量. 在无旋错的条件下, 独立量可以取为  $\mathbf{u}, \mathbf{V}^p$  和  $\mathbf{e}^p$ . 显而易见, 运动学方程 (2.19) 和 (2.20) 本身不能提供求解这些独立场量的封闭方程组. 我们必须从物理和力学的普遍规律出发, 建立相应的动力学方程, 能量和质量守恒方程, 本构关系以及适当的定解条件.

上述任务并不能轻而易举地完成. 但在很多简化假定下, 人们仍然可进行一些研究. 这些假定有:

- ① Cauchy 应力原理仍然有效. 这里略去耦应力效应. 在不计旋错的情形下这总是对的.
- ② 弹性加速度场是 Cauchy 应力张量  $\boldsymbol{\sigma}$  的源, 并满足经典意义下的动力学方程.
- ③ 应力张量和弹性应变张量服从线弹性定律.
- ④ 缺陷场是给定的, 即设  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}$  和  $\mathbf{S}$  是时空的已知函数.
- ⑤ 在无穷处, 缺陷场引起的应力场以某种方式趋于零, 对有限物体, 经典边界条件仍然适用.

根据以上假定, 弹性应力场的求解可归结为下列定解问题:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \rho \dot{\mathbf{V}}^c, & \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} : \mathbf{e}^c \\ \mathbf{e}^c + \mathbf{e}^p &= (\nabla \times \mathbf{u})_{s,m}, & \mathbf{V}^c &= \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{V}^p \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

且初、边界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma \cdot n &= t_n^0, & \text{在 } \partial B \text{ 上} \\ \sigma &= \sigma_0, \quad V^c = V_0^c, \quad e^c = e_0^c, & \text{当 } t=0 \text{ 时} \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

在 (2.54)<sub>1</sub> 中  $f$  是已知的体力函数,  $D$  是弹性张量, 其中  $e^p$ ,  $\eta$  和  $V^p$  等可通过缺陷场  $\alpha$ ,  $J$ ,  $\Theta$  和  $S$  来决定. 这样, 问题 (2.54), (2.55) 的求解就完全归结为非协调线弹性动力学问题的求解. 从 (2.54) 不难导出总位移  $u$  满足的运动方程

$$\nabla \cdot [D : (\nabla \otimes u)] - \rho \ddot{u} = -\rho \dot{V}^p - \nabla \cdot (D : e^p) - f \quad (2.56)$$

当缺陷场给定时, (2.56) 右端项便是时空的给定函数. 由于问题是线性的, 可以发展各种数学技巧来求解上述问题. 事实上, 早在60年代, 人们对这类问题的求解就已进行了充分的研究, 尤其对静态问题已发展了不少成功的方法, 其中包括 Kröner 提出的应力函数方法<sup>[78]</sup>; 借用广义相对论中 Eddington 方法, Eshelby 提出一种寻找动力解的方法<sup>[79]</sup>; Mura<sup>[80]</sup> 利用 Green 函数方法, 给出了问题的完整解答.

在动态位错情形下, 也进行了不少工作. Kosevich<sup>[61]</sup> 通过适当变换把问题 (2.56) 分解成寻求三组各自独立的经典波动方程, 给出了问题的一般解. 对于位错和旋错共存的动力学问题, Kossecka 和 de Wit<sup>[77]</sup> 从 (2.56) 出发, 利用动态 Green 函数得到了问题的一般解, 尤其可以寻找到已知离散运动缺陷问题的 Green 函数解. 详细的讨论可以在有关书目和文献中找到, 如专著[25]中引证了详细的文献.

### 3 静态非线性缺陷连续统的变形几何学

#### 3.1 两个关键问题

在上一节中, 讨论了线性缺陷连续统问题, 由于考虑的是小变形、弱缺陷, 在建立场方程时, 没有区分参考构形和瞬时构形. 本节要讨论任意变形、任意缺陷的非线性缺陷场问题, 这时基于加法分解的线性理论就不成立了.

上节曾提到, 将位于  $r$  处的物质微元从瞬态构形通过“切割、放松”变换  $A$  变到自然状态. 所有这些处于自然态的物质小碎片组成缺陷连续统的自然构形. 显然, 由于缺陷的存在, 这些处于自然态的具有完整晶格结构的欧氏小碎片不可能在我们现实的 3 维欧氏空间中被拼合成一个整体, 它们之间必然有许多“缝隙”. 这样我们一般也就无法度量不同碎片之间的距离. 但是, 从微分几何角度来看, 我们可以想象, 所有欧氏小碎片在一个广义的非欧物质流形  $M_3$  中组成一个完整的连续的集合, 而每一个欧氏碎片则正好就是  $M_3$  中的一个局部切空间 (或一个小邻域). 这样, 对缺陷场的研究就成了几何学的研究, 但必须回答如下两个问题: ①该非欧物质流形有什么样的几何结构? ②它的几何性质与缺陷场是怎样的关系? 下面就针对这两个问题展开讨论. 关于微分几何的知识可参见[71].

#### 3.2 一些数学准备

3.2.1 仿射联络空间 设  $\mathcal{L}_B$  是由所有点  $P(y^a)$  组成的微分流形,  $\{y^a\}$  是它的一个坐标. 对每个点  $y^a$  可以给定一个三指标数  $\Gamma_{bc}^a$ , 它有 27 个分量, 对下标  $b, c$  不一定对称. 利用它可定义任一逆变矢量场  $u^a$  和协变矢量场  $v_a$  的协变微分:

$$\left. \begin{aligned} \delta u^a &= \partial_b u^a dy^b + \Gamma_{bc}^a u^c dy^b \equiv (\nabla_b u^a) dy^b \\ \delta v_a &= \partial_b v_a dy^b - \Gamma_{ba}^c v_c dy^b \equiv (\nabla_b v_a) dy^b \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中  $\nabla_b u^a$  和  $\nabla_b v_a$  为相应的协变导数。这时，我们称  $\Gamma_{ab}^c$  为流形  $\mathcal{L}_B$  的仿射联络，而称  $\mathcal{L}_B$  为一仿射联络空间，用  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c)$  表示。

3.2.2 联络的变换和空间挠率 如果  $\mathcal{L}_B$  有另一坐标系  $\{x^\mu\}$ ，在此坐标下的联络为  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ 。坐标  $\{y^a\}$  与  $\{x^\mu\}$  的变换为

$$y^a = y^a(x^\mu) \quad \text{或} \quad x^\mu = x^\mu(y^a) \quad (3.2)_1$$

$$dy^a = y_\mu^a dx^\mu \quad \text{或} \quad dx^\mu = x_a^\mu dy^a \quad (3.2)_2$$

其中  $y_\mu^a = \partial y^a / \partial x^\mu$ ， $x_a^\mu = \partial x^\mu / \partial y^a$ ，而  $a, \mu = 1, 2, 3$ 。则可证明

**定理** 若任意矢量场  $u$  在上述两个坐标系下的分量分别为  $u^a$  和  $u^\mu$ ，它们满足变换关系

$$u^a = y_\mu^a u^\mu, \quad u^\mu = x_a^\mu u^a \quad (3.3)$$

则其协变微分也满足此变换

$$\delta u^a = y_\mu^a \delta u^\mu, \quad \delta u^\mu = x_a^\mu \delta u^a \quad (3.4)$$

的充要条件是联络必须满足下列变换关系：

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= x_c^\alpha y_\mu^c y_\nu^b \Gamma_{ab}^c + x_c^\alpha y_{\nu\mu}^c \\ \Gamma_{ab}^c &= y_c^c x_a^\mu x_b^\nu \Gamma_{\mu\nu}^c + y_\mu^c x_{ab}^\mu \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

或

$$y_{\mu\nu}^c = \partial^2 y^c / \partial x^\mu \partial x^\nu, \quad x_{ab}^\mu = \partial^2 x^\mu / \partial y^a \partial y^b$$

这个定理只要将协变微分的定义代入 (3.4) 并利用 (3.3) 就可得证。

(3.5) 表示联络的变换。显然它并不满足张量的变换性质。但是如果引进

$$T_{ab}^c = \frac{d}{dt} \Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} (\Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c) \quad (3.6)$$

容易验证，它满足张量的变换法则。称其为  $\mathcal{L}_B$  的挠率张量。

3.2.3 矢量的平行平移 设流形  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c)$  内有一曲线  $c(t)$ ，其参数方程是

$$c: \quad y^a = f^a(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.7)$$

则定义

$$\frac{\delta u^a}{\delta t} = (\nabla_b u^a) \frac{df^b}{dt}, \quad \frac{\delta v_a}{\delta t} = (\nabla_b v_a) \frac{df^b}{dt}, \quad y^a \in c(t) \quad (3.8)$$

为逆变场  $u^a$  和协变场  $v_a$  沿曲线  $c(t)$  的内禀导数。若  $u^a$  或  $v_a$  沿  $c(t)$  的内禀导数处处为零，则称  $u^a$  或  $v_a$  沿  $c(t)$  是平行矢量场。显然，在 3 维欧氏空间中，内禀导数成为普通导数，因而平行矢量场必定是常矢量场。

对一个沿  $c(t)$  的非平行矢量场  $u^a(y^b)$ ，设它在  $y^b + dy^b$  处的值为  $u^a(y^b + dy^b)$ ，而将  $u^a$  从  $y^b$  点平行移动到点  $y^b + dy^b$  的值为  $u^a + \delta u^a$ ，它与  $u^a(y^b + dy^b)$  相差

$$(u^a + \delta u^a) - u^a(y^b + dy^b) = \Gamma_{bc}^a u^c dy^b \quad (3.9)_1$$

从而在一般仿射联络空间中， $u^a$  从  $y^b$  点平行移动到点  $y^b + dy^b$  的值并不等于  $u^a$  在点  $y^b + dy^b$  的值。也就是说，在一般仿射联络空间中常矢量场并不是平行的。类似地有

$$(v_a + \delta v_a) - v_a(y^b + dy^b) = -\Gamma_{ca}^d v_d dy^c \quad (3.9)_2$$

有了平行移动的概念，很快可以给出空间挠率的几何意义。矢量元  $dy^c$  沿  $dy^c$  方向平行移动得到的矢量是  $dy^c + \Gamma_{ab}^c dy^b dy^a$ ，而矢量元  $dy^c$  沿  $dy^c$  方向平行移动得到的矢量为  $dy^c + \Gamma_{ab}^c dy^b dy^a$ 。则这四个矢量组成的四边形是不封闭的，把它们封闭起来的矢量是

$2T_{ab}^c dy^a dy^b$ . 因此, 挠率  $T_{ab}^c$  表示了空间扭曲程度.

3.2.4 联络分解和曲率张量 空间  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c)$  一般是没有度量的, 但如果我们给任一对称张量  $g_{ab}$  及其逆  $g^{ab}$ , 并由  $\Gamma_{ab}^c$  来定义  $g_{ab}$  的协变导数并记为

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma_{cb}^d g_{ad} - \Gamma_{ca}^d g_{db} - Q_{abc} \quad (3.10)$$

则不难证明, 在一般情形下, 联络系数可以分解为

$$\Gamma_{ab}^c = g^{cd} ([ad, b] - (1/4)\hat{T}_{adb} + (1/2)\hat{Q}_{adb}) \quad (3.11)$$

其中  $[ad, b]$  是度量张量  $g_{ab}$  的第一类黎曼-克氏符号, 而

$$\hat{T}_{adb} = T_{adb} - T_{dba} - T_{bda}, \quad \hat{Q}_{adb} = Q_{adb} - Q_{dba} - Q_{bda} \quad (3.12)$$

这样  $\mathcal{L}_B$  就成了具有度量结构的仿射联络空间, 记为  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c, g_{ab})$ , (3.11) 表示其联络的分解, 是一个基本公式. 当  $Q_{abc} \equiv 0$  时, 即  $\nabla_c g_{ab} \equiv 0$  时, 称  $\mathcal{L}_B$  为度量联络空间.

在一般仿射联络空间  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c)$  上对任意逆变矢量  $u^c$  或协变矢量  $v_c$  取二次协变导数, 可得到

$$\left. \begin{aligned} \nabla_b \nabla_a u^c - \nabla_a \nabla_b u^c &= -(1/2)R_{ab}^c{}^d u^d - T_{ab}^d \nabla_d u^c \\ \nabla_b \nabla_a v_c - \nabla_a \nabla_b v_c &= -(1/2)R_{ab}^d{}^c v_d - T_{ab}^d \nabla_d v_c \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

其中

$$(1/2)R_{ab}^c{}^d = \partial_{[a} \Gamma_{b]d}^c - \Gamma_{[a}^c{}_{[d} \Gamma_{b]}^e \quad (3.14)$$

这里  $[ab]$  表示对  $a, b$  指标取反对称, 利用联络的坐标变换法则, 很容易证明由 (3.14) 定义的  $R_{ab}^c{}^d$  是一个张量, 称其为流形  $\mathcal{L}_B$  的曲率张量. 当曲率为零时, 称  $\mathcal{L}_B$  是平坦联络空间.

### 3.3 非黎曼物质流形的构造

3.3.1 怎样构造缺陷场所对应的非黎曼空间 上面我们讨论了度量联络空间  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c, g_{ab})$  的基本几何结构. 历史上曾将挠率为零的度量联络空间称为黎曼空间, 而将挠率不为零的度量联络空间称为非黎曼空间. 位错连续统恐怕是非黎曼空间这个纯数学概念在物理、力学领域中找到一个应用, 而黎曼空间则早在 1915 年就被 Einstein 应用到它的时空几何学-广义相对论中去了. 在现代微分几何教科书中, 一般将具有度量结构的流形统称为黎曼流形. 本文仍采用历史的叫法, 通过在与缺陷连续统所对应的物质流形  $M_3$  上引进相应的辅助度量和仿射联络使之成为一个非黎曼物质流形  $\mathcal{L}_B$ , 它正好可以描述缺陷连续统的变形几何学.

为此, 我们采用 Cartan 的活动标架法<sup>[71]</sup>, 在物质流形  $M_3$  上的每一点  $P(y^a)$  引进一个直角标架  $\{e_k(P), k=1, 2, 3\}$ , 它有通常的内积  $e_k \cdot e_l = \delta_{kl}$ . 对于不同的点有不同的局部直角标架, 它们分属于不同的切空间, 从而它们一般不能进行直接的比较. 我们注意 (2.7) 中的放松变换  $A$  是将瞬时构形上的微元矢量  $dr$  变换到物质流形  $M_3$  中的矢量微元  $\delta R$  的双点张量, 利用  $M_3$  的活动标架, 可以将  $A$  表示成

$$A = A_a^k e_k \otimes l^a, \quad B = A^{-1} = B_k^a l_a \otimes e^k \quad (3.15)$$

它将瞬时构形上的欧氏基矢  $l_a$  变为

$$g_a = A \cdot l_a = A_a^k e_k, \quad g^a = l^a \cdot B = B_k^a e^k \quad (3.16)$$

它可以看成是相应于  $l_a$  的  $M_3$  上的随动标架。其内积为

$$\left. \begin{aligned} g_{ab} &\stackrel{d}{=} \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}_b = \delta_{kl} A_a^k A_b^l = A_a^k A_b^k \\ g^{ab} &\stackrel{d}{=} \mathbf{g}^a \cdot \mathbf{g}^b = B_i^a B_i^b \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

显然，通过  $M_3$  上的直角活动标架的内积定义， $M_3$  自然成为一度量空间。另外，通过平行移动法则可以定义  $M_3$  的联络  $\Gamma$ ，如

$$\Delta \mathbf{g}_c \stackrel{d}{=} \Gamma_b^a \mathbf{g}_a dy^b \quad (3.18)$$

通过它我们就可以比较  $M_3$  上不同点的切空间中的矢量。必须注意，这里定义的联络  $\Gamma_{bc}^a$  与度量  $g_{ab}$  一般是相互独立的。

**3.3.3 非黎曼流形  $M_3$  上的 Cartan 结构方程** 上面通过在物质流形  $M_3$  上引进度量和联络而使其成为一个仿射联络空间  $\mathcal{A}_B$ 。另外通过变换  $\mathbf{A}$  还可引进  $M_3$  上的一个非完整坐标  $\delta z^k$ ：

$$\delta z^k \stackrel{d}{=} A_a^k dy^a, \quad dy^a = B_i^a \delta z^i \quad (3.19)$$

利用它并用 (3.16) 可以将平移法则 (3.18) 写成

$$\Delta \mathbf{e}_k = \Gamma_{mk}^l \delta z^m \mathbf{e}_l \quad (3.20)$$

其中  $\Gamma_{mk}^l$  是非完整坐标下的联络系数，它与完整坐标下的联络系数  $\Gamma_{bc}^a$  之间有变换关系

$$\Gamma_{bc}^a = B_i^a B_j^b B_k^c \Gamma_{mnl}^i + B_i^a A_{c,s}^i \quad (3.21)$$

另一方面，根据 (2.7)，(3.15) 和 (3.19)， $M_3$  中的矢量微元  $\delta \mathbf{R}$  可表示为

$$\delta \mathbf{R} = \delta z^k \mathbf{e}_k \equiv A^k \mathbf{e}_k \quad (3.22)$$

这表明  $\delta z^k = A^k$  正是与标架矢量  $\mathbf{e}_k$  对偶的微分 1 形。这样，物质流形  $M_3$  的基本微分结构由如下两个微分 1 形所决定：

$$A^k \equiv \delta z^k = A_a^k dy^a, \quad \Gamma_{mk}^l \equiv \Gamma_{mk}^l \delta z^m \quad (3.23)$$

它们分别称为  $M_3$  上的连接 1 形和联络 1 形。(3.22) 和 (3.20) 可写成

$$\delta \mathbf{R} = A^k \mathbf{e}_k, \quad \Delta \mathbf{e}_k = \Gamma_{ik}^l \mathbf{e}_l \quad (3.24)$$

对它沿瞬时构形中的回路  $C_r$  积分，并用 Stokes 定理得

$$\oint_{C_r} \delta \mathbf{R} = \oint_{C_r} A^k \mathbf{e}_k \equiv \iint_{S_r} D^k \mathbf{e}_k \quad (3.25)$$

$$\oint_{C_r} \Delta \mathbf{e}_k = \oint_{C_r} \Gamma_{ik}^l \mathbf{e}_l \equiv 2 \iint_{S_r} \Theta_{ik}^l \mathbf{e}_l \quad (3.26)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} D^k &= dA^k + \Gamma_i^k \wedge A^i \stackrel{d}{=} D_{m1}^k A^m \wedge A^1 \\ \Theta_{ik}^l &= d\Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \wedge \Gamma_{jk}^m \stackrel{d}{=} (1/2) \Theta_{mn}^l A^m \wedge A^n \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

分别称为挠率 2 形和曲率 2 形， $\wedge$  表示外积符号。(3.27) 称为 Cartan 结构方程。挠率和曲率形式的分量分别为 (在非完整坐标系  $\{\mathbf{e}_k\}$  中)

$$\left. \begin{aligned} D_{m1}^k &= \Gamma_{[m1]}^k + B_{[m}^a B_{1]}^b A_{b,a}^k \\ \Theta_{mn}^l &= 2(B_{[m}^a B_{n]}^b \partial_b \Gamma_{ak}^l + \Gamma_{[m1]j}^l \Gamma_{k]}^j) \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

将 (3.27) 和 (3.28) 代入 (3.25) 和 (3.26)，并利用联络的变换关系可得完整坐标

系 $\{y^a\}$ 中有

$$\oint_{C_r} \delta R = \iint_{S_r} T_{bc}^a g_a dy^b \wedge dy^c \quad (3.29)$$

$$\oint_{C_r} \Delta e_k = \iint_{S_r} R_{bc}^a B_k^a g_a dy^b \wedge dy^c \quad (3.30)$$

其中  $T_{bc}^a$  和  $R_{bc}^a$  分别是非黎曼物质流形  $M_3$  在坐标  $\{y^a\}$  中挠率和曲率的分量。

利用外微分运算法则, 从 (3.27) 得到

$$dD^k = \Theta_k^i \wedge A^i - \Gamma_i^k \wedge D^i \quad (3.31)$$

$$d\Theta_k^i = \Theta_m^i \wedge \Gamma_k^m - \Gamma_m^i \wedge \Theta_k^m \quad (3.32)$$

这是挠率和曲率所满足的 Bianchi 恒等式, 它和 Cartan 结构方程 (3.27) 一起是描述非线性缺陷连续统的基本方程, 是线性连续性方程 (2.19) 和 (2.20) 在非线性场论中的推广。

### 3.4 经典的非线性位错连续统理论

3.4.1 平坦度量空间和位错密度的几何表征 如果假定  $M_3$  上的活动标架场  $\{e_k\}$  是处处平行的, 从而  $e_k$  在平行移动中是常矢量, 从 (3.20) 即有

$$\Delta e_k \equiv 0, \quad \Gamma_{bc}^k \equiv 0 \quad (3.33)$$

用 (3.21) 可得

$$\Gamma_{bc}^k = E_k^a \partial_b A_c^k \quad (3.34)$$

这样, 仿射联络就完全由变换  $A$  和其逆所决定。将 (3.34) 代入 (3.14), 经过直接的运算, 可得  $M_3$  的曲率张量为零, 即

$$R_{abcd} \equiv 0 \quad (3.35)$$

这时称  $M_3$  是平坦空间。而  $M_3$  的挠率为

$$T_{bc}^a = \Gamma_{[bc]}^a = B_k^a \partial_{[b} A_{c]}^k \quad (3.36)$$

改写成张量形式就是

$$\mathbf{T} = (1/2)[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla_r)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.37)$$

显然位错场的 Burgers 矢量可用 (3.29) 定义, 它是线性情形 (2.24) 的推广。将 (3.37) 代入 (3.29) 得

$$\mathbf{b} = \frac{d}{C_r} \oint \delta \mathbf{R} = \iint_{S_r} d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{A} \times \nabla_r] \quad (3.38)$$

定义真位错密度张量为

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} \times \nabla_r \quad (3.39)$$

则有

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta S} \quad (3.40)$$

这与线性位错场相似。另外我们定义

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla_r) \quad (3.41)$$

为局部位错密度。与它对应可定义三阶位错密度张量  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ :

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} \equiv (1/2) \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = (1/2)[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \nabla_r)] \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.42)$$

显然, 它正是  $M_3$  的挠率张量 (3.37)。将位错等同于物质流形  $M_3$  的挠率这正是 50—60 年代位错场论研究中的基本思想。我们将看到, 这在动态缺陷场中仍然适用。

3.4.2 一般度量联络空间中的位错和旋错 现在考虑  $M_3$  是一般的度量联络空间。由 3.1.1 中的定义可知这时由 (3.17) 所给出的度量的协变导数为零, 从而联络分解 (3.11) 就成为

$$\Gamma_{ab}^c = g^{cd} \left( [ad, b] - \frac{1}{4} \hat{T}_{adb} \right) \quad (3.43)$$

且 
$$\partial_c g_{ab} = \Gamma_{cb}^d g_{ad} + \Gamma_{ca}^d g_{db} = 2\Gamma_{c(ab)} \quad (3.44)$$

$$T_{cab} = \Gamma_{c[ab]} \quad (3.45)$$

这样, (3.43) 可改写成

$$\Gamma_{cab} = \Gamma_{c[ab]} + \Gamma_{c(ab)} = T_{cab} + (1/2)\partial_c g_{ab} \quad (3.46)$$

从而一般度量联络空间的联络由其挠率和度量决定。其挠率和曲率仍由 (3.28) 给出, 如果它不具有 (3.33) 给出的平坦性质, 则其曲率不为零。而 (3.29) 仍给出它的位错 Burgers 矢量的定义, (3.30) 则给出其旋错的 Frank 矢量的定义。现在让我们简单地讨论一下这两个基本定义的几何意义。

在瞬时构形中取一封闭回路  $C_r$ , 它经由起始点  $P$ , 设  $P_0 = P, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = P$  是  $C_r$  上相互邻近的一系列物质点。与之相应在物质流形  $M_3$  (放松后的自然构形) 中也有这些点。如果在  $M_3$  中我们作从  $P_k$  点的切空间  $T_{P_k}$  到  $P_{k+1}$  点的切空间  $T_{P_{k+1}}$  的映射,  $k=0, 1, \dots, n-1$ , 这一映射最终将  $T_{P_0}$  映射到自身  $T_{P_n} = T_{P_0}$ 。设  $T_P$  的原点被映射到点  $\Delta y^a g_a \in T_{P_n}$ , 而将某一矢量  $Y^a g_a \in T_P$  映射为  $(Y^a + \Delta Y^a) g_a \in T_{P_n}$ , 则用 (3.29) 和 (3.30) 可证明

$$\Delta y^a = \iint_{S_r} T_{bc}^a dS^{bc}, \quad \Delta Y^a = \frac{1}{2} Y^d \iint_{S_r} R_{bc}^a dS^{bc} \quad (3.47)$$

其中  $dS^{bc}$  是有向面积元。Amari<sup>[81]</sup> 称  $\Delta y^a$  和  $\Delta Y^a$  分别代表 Burgers 回路  $C_r$  的位错和旋错。关于这一点, 文[3]给出了更为明确的定义, 可参阅。

我们必须指出, 如果只限于描述缺陷场的变形几何和运动学, 则对物质流形  $M_3$  赋予度量结构是多余的, 只要从 (3.23) 所定义的连接 1 形和联络 1 形, 我们就可得出缺陷场的全部连续性方程。而只有在讨论缺陷连续统的应变张量时才需要引进度量。这一点本文不打算继续讨论, 可参阅[81]。

### 3.5 缺陷场的 Euler 表示和 Lagrange 表示

在建立非线性缺陷场论时, 如同在非线性弹性力学中一样, 我们可以用两种描述法。一是 Euler 描述法, 这在上面的讨论中已经熟悉, 所建立的非黎曼联络空间为  $\mathcal{L}_B(y^a, \Gamma_{ab}^c, g_{ab})$ ; 另一种是 Lagrange 描述法, 对应的空间是  $\mathcal{L}_B(x^\mu, \Gamma_{\mu\nu}^\sigma, g_{\mu\nu})$ 。它们之间的坐标变换由宏观运动 (2.1) 给出, 对于运动情形, 它以时间为参数。度量和联络的变换是

$$g_{\mu\nu} = y_\mu^a y_\nu^b g_{ab}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\sigma = x_c^\alpha y_\mu^a y_\nu^b \Gamma_{ab}^c + x_c^\alpha y_{\nu\mu}^c \quad (3.48)$$

而挠率和曲率的变换关系是

$$T_{\mu\nu}^{\sigma} \stackrel{d}{=} \Gamma_{[\mu\nu]}^{\sigma} = x_c^{\sigma} y_{\mu}^a y_{\nu}^b T_{ab}^c \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} \stackrel{d}{=} \partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]}^{\rho} - \Gamma_{[\mu}^{\lambda} \Gamma_{\nu]}^{\rho} - \Gamma_{[\mu}^{\lambda} \Gamma_{\nu]}^{\rho} = \frac{1}{2} x_c^{\rho} y_{\mu}^a y_{\nu}^b y_{\sigma}^d R_{abcd} \quad (3.50)$$

同样可通过这些变换关系确定出 Lagrange 表示下的缺陷密度。一般说来，以 Lagrange 表示，即初始参考构形为基准来建立缺陷场的运动和动力学方程是比较方便的。

另外对缺陷连续统物质流形  $M_3(t)$ ，我们上面还用了另一种表示，即非完整的活动标架表示，可记为  $\mathcal{L}_B(\delta z^k, \Gamma_{ij}^k, g_{ij} = \delta_{ij})$ 。这三种表示与缺陷连续统的 3 构形描述（见第 2.1 节）正好相应。

## 4 非线性缺陷场的 4 维几何理论

### 4.1 理论的意义和方法

这部分内容有两个意义。一是将小变形、弱缺陷下的线性运动缺陷场理论推广到适用于任意变形、任意缺陷的非线性运动缺陷场论；二是将静态非线性场论推广到动态情形。这对于建立大变形下的塑性本构理论是必要的一步。

理论的方法是将静态的 3 维空间几何直接推广为 4 维的时空几何。在每个时刻  $t$ ，将瞬时构形  $\bar{E}_3(t)$  作“放松”变换，得到这时的自然构形  $M_3(t)$ 。设  $R$  表示 1 维欧氏时间流形，则

$$\bar{E}_4 = \bar{E}_3(t) \times R \quad \text{和} \quad M_4 = M_3(t) \times R$$

就定义了两个 4 维流形  $\bar{E}_4$  和  $M_4$ ，分别称为 D 流形 (Deformed manifold) 和 N 流形

(Natural manifold)。当然还可定义 4 维参考流形  $E_4$ ，或 R 流形，它由参考构形和时间的直积组成。这三个 4 维流形描述相同的物质点及时间。R 流形到 D 流形的变换给出物体的宏观变形和运动，是欧氏-欧氏的变换；而 D 流形到 N 流形，或 R 流形到 N 流形的变换就是所谓“放松”变换，它给出缺陷的变形运动，是欧氏-非欧的变换。与静态不同的是，这时的“放松”变换是在 4 维时空中进行的，时间维上的线元  $dt$  的进入，使得这种变换包括了物体和缺陷运动的贡献。例如，即使 D 流形中的空间线元长度为零（一个物质点），但只要  $dt \neq 0$ ，它放松到 N 流形中后就变成既有空间长度又有时间长度的线元。同样，在引进联络时，对时间这 1 维的联络又正反映了运动，缺陷流正与它们有关。另外由于理论是非相对论的，时间是绝对的，这一假设又给各量带来了一些限制条件。这一理论主要是段祝平和黄迎雷的近期工作，详情可参阅[3]。

### 4.2 三构形和 4 维物质流形 $\bar{M}_4$

设缺陷变形体的 D 流形  $\bar{E}_4$ ，R 流形  $E_4$  分别被表示为

$$\bar{E}_4 = \{y^{\tilde{a}}\} = \{y^a, y^4 = t\}, \quad \tilde{a} = 1, 2, 3, 4; \quad a = 1, 2, 3$$

$$E_4 = \{x^{\tilde{\mu}}\} = \{x^{\mu}, x^4 = t\}, \quad \tilde{\mu} = 1, 2, 3, 4; \quad \mu = 1, 2, 3$$

则物体的宏观变形运动由函数

$$y^{\tilde{a}} = y^{\tilde{a}}(x^{\tilde{\mu}}) = \begin{cases} y^a = y^a(x^{\tilde{\mu}}) \\ y^4 = x^4 \end{cases} \quad (4.1)$$

或

$$dy^{\tilde{a}} = y_{\mu}^{\tilde{a}} dx^{\mu} \quad (4.2)$$

来描述, 其中  $y_{\mu}^{\tilde{a}} = \partial y^{\tilde{a}} / \partial x^{\mu}$  是 4 维变形梯度. D 流形上的矢量微元为

$$dr = dy^{\tilde{a}} \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} = dx^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = y_{\mu}^{\tilde{a}} \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} \quad (4.3)$$

在 N 流形  $M_4$  上, 由于其物质点与  $E_4$  或  $\bar{E}_4$  中的物质点是一一对应的. 故仍可取  $\{x^{\mu}\}$  或  $\{y^{\tilde{a}}\}$  作为其嵌入坐标. 由于  $M_4$  是非欧流形, 为了研究其结构. 最方便的是用 Cartan 方法, 在  $M_4$  上引进正交活动标架场  $\{e_{\tilde{i}}\}$

$$P \rightarrow \{e_{\tilde{i}}(P), \quad \tilde{i} = 1, 2, 3, 4\}$$

其中  $P$  是  $M_4$  上的任一点,  $\{e_{\tilde{i}}\}$  是一组正交的切矢量. 设其对偶 1 形为

$$A^{\tilde{i}} = A_{\tilde{a}}^{\tilde{i}} dy^{\tilde{a}} = A_{\mu}^{\tilde{i}} dx^{\mu} \quad (4.4)$$

则  $M_4$  中的矢量微元  $\delta R$  可表示为

$$\delta R = A^{\tilde{i}} e_{\tilde{i}} = dx^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = dy^{\tilde{a}} \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} \quad (4.5)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = A_{\mu}^{\tilde{i}} e_{\tilde{i}}, \quad \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} = A_{\tilde{a}}^{\tilde{i}} e_{\tilde{i}} \quad (4.6)$$

在变换 (4.4), (4.5) 的意义下, 也可将  $\{A^{\tilde{i}}, e_{\tilde{i}}\}$  看成  $\bar{E}_4$  或  $E_4$  的非完整坐标系. 显然, 在自然坐标基  $\partial/\partial x^{\mu}$  或  $\partial/\partial y^{\tilde{a}}$  的表示下, (4.3) 中 D 流形中的矢量元  $dr$  与 N 流形中的矢量元  $\delta R$  有完全相同的形式. 可见, 如果没有进一步的联络结构, 我们不能区分  $\bar{E}_4$ , ( $E_4$ ) 和  $M_4$  这两个流形, 它们只是同样一些物质点 (和时间) 的不同坐标而已. 我们将这个只由物质点 (时间点) 及其不同坐标系所组成的但没有其他 (如联络) 结构的原始流形叫做 4 维物质流形  $\bar{M}_4$ . 而 D 流形  $\bar{E}_4$  和 N 流形  $M_4$  的区别则在于  $\bar{M}_4$  上的不同联络结构.  $\bar{E}_4$  具有欧氏联络  $\nabla$ , 或相应的联络 1 形  ${}^{(d)}\Gamma$ , 即

$$\nabla \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} = {}^{(d)}\Gamma_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{b}}}, \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = {}^{(d)}\Gamma_{\mu}^{\tilde{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{\nu}}}, \quad \nabla e_{\tilde{i}} = {}^{(d)}\Gamma_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} e_{\tilde{j}} \quad (4.7)$$

由它所决定的  $\bar{E}_4$  上的挠率  ${}^{(d)}D$  和曲率  ${}^{(d)}\Theta$  都必须为零, 它由如下的 Cartan 结构方程给出

$${}^{(d)}D_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} = {}^{(d)}\Gamma_{\tilde{b}}^{\tilde{c}} \wedge dy^{\tilde{c}} \equiv 0, \quad {}^{(d)}\Theta_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} = d {}^{(d)}\Gamma_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} - {}^{(d)}\Gamma_{\tilde{b}}^{\tilde{c}} \wedge {}^{(d)}\Gamma_{\tilde{c}}^{\tilde{a}} \equiv 0 \quad (4.8)$$

反之,  $M_4$  具有非欧联络 D 或相应的联络 1 形  ${}^{(n)}\Gamma$

$$D \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{a}}} = {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \frac{\partial}{\partial y^{\tilde{b}}}, \quad D \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = {}^{(n)}\Gamma_{\mu}^{\tilde{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{\nu}}}, \quad D e_{\tilde{i}} = {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} e_{\tilde{j}} \quad (4.9)$$

它一般给出  $M_4$  上的非零挠率和曲率  ${}^{(n)}D$  和  ${}^{(n)}\Theta$ :

$${}^{(n)}D_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} = {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{b}}^{\tilde{c}} \wedge dy^{\tilde{c}} \neq 0, \quad {}^{(n)}\Theta_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} = d {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{b}}^{\tilde{a}} - {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{b}}^{\tilde{c}} \wedge {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{c}}^{\tilde{a}} \neq 0 \quad (4.10)$$

这样, 在物质流形  $\bar{M}_4$  上, 我们使传统的 3 构形描述得到了统一。

### 4.3 缺陷密度、缺陷流密度的定义

从  $M_4$  的挠率 2 形  ${}^{(n)}D^a$  和曲率 2 形  ${}^{(n)}\Theta^a$  出发, 我们作如下分解和定义:

$${}^{(n)}D^a = \alpha^a + J^a \wedge dt = \text{位错 2 形}$$

$${}^{(n)}\Theta_b^a \wedge dy^b = Q^a - S^a \wedge dt = \text{旋错 3 形}$$

其中

$$\alpha^a = \alpha^{\mu a} \omega_\mu, \quad J^a = J_\mu^a dx^\mu \quad (4.11)$$

$$Q^a = q^a \omega, \quad S^a = S^{\mu a} \omega_\mu \quad (4.12)$$

分别定义了位错密度张量  $\alpha^{\mu a}$ , 位错流密度张量  $J_\mu^a$ , 旋错密度矢量  $q^a$  和旋错密度张量  $S^{\mu a}$ , 它们可以由挠率及曲率张量表示出来。式中

$$\omega = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \quad \text{和} \quad \omega_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \omega$$

分别是物质流形  $\bar{M}_4$  中的 3 维空间体积元和 2 维空间面积元, 符号  $\lrcorner$  表示矢量与微分形式之间的内积 [65]。

以上定义将位错归结于挠率, 而旋错归结于曲率, 这与过去的说法一致 [81]。由它们出发讨论位错的 Burgers 矢量和旋错的 Frank 矢量就有很清楚的几何意义。这儿不再详细讨论。在 [3] 中还定义了另一种 2 形旋错密度和流密度。

### 4.4 运动缺陷场连续性方程

缺陷场的连续性方程可通过  $M_4$  上的 Bianchi 恒等式

$$\left. \begin{aligned} d {}^{(n)}D^a + {}^{(n)}\Gamma_b^a \wedge {}^{(n)}D^b &= {}^{(n)}\Theta_b^a \wedge dy^b \\ d {}^{(n)}\Theta_b^a + {}^{(n)}\Gamma_c^a \wedge {}^{(n)}\Theta_b^c &= {}^{(n)}\Theta_c^a \wedge {}^{(n)}\Gamma_b^c \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

而得到。它们是

$$\left. \begin{aligned} {}^{(d)}\nabla_\mu \alpha^{\mu a} + \omega_{\mu b}^a \alpha^{\mu b} &= q^a \\ {}^{(d)}\nabla_4 \alpha^{\mu a} + \omega_{4 b}^a \alpha^{\mu b} + e^{\mu \nu \sigma} [{}^{(d)}\nabla_\nu J_\sigma^a + \omega_{\nu b}^a J_\sigma^b] &= -S^{\mu a} \\ {}^{(d)}\nabla_4 q^a + \omega_{4 b}^a q^b + {}^{(d)}\nabla_\mu S^{\mu a} + \omega_{\mu b}^a S^{\mu b} &= {}^{(n)}\Theta_{\mu b}^a \alpha^{\mu b} + {}^{(n)}\Theta_{\nu \sigma}^a J_\mu^b \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

其中  ${}^{(d)}\nabla_\mu$  ( $\mu=1,2,3,4$ ) 表示在欧氏联络  ${}^{(d)}\Gamma$  下求协变导数, 而

$$\omega_{\mu b}^a = {}^{(n)}\Gamma_{\mu b}^a - {}^{(d)}\Gamma_{\mu b}^a$$

表示物质流形  $\bar{M}_4$  上非欧联络与欧氏联络之差, 它是张量。而

$${}^{(n)}\Theta_{\mu b}^a = \frac{1}{2} ({}^{(n)}\Theta_{\mu 4 b}^a - {}^{(n)}\Theta_{4 \mu b}^a), \quad {}^{(n)}\Theta_{\nu \sigma}^a = e^{\mu \nu \sigma} {}^{(n)}\Theta_{\nu \sigma b}^a$$

是与旋错密度和流密度有关的量。  $e^{\mu \nu \sigma}$  是曲线坐标下的 Levi-Civita 符号。 (4.14) 给出了协变的非线性缺陷场运动连续性方程, 其中 (4.14)<sub>1</sub> 过去曾在静态理论中得到过 [46], 而另外两个动态方程是 [3] 得到的。从它们可见, 旋错仍然是位错的源, 但从 (4.14)<sub>3</sub> 看出, 旋错不再是无源的了, 它与位错之间的相互作用成为它的源。这个结论是过去不曾有过的, 它对旋错的生成机制的研究也许是重要的。 (4.14) 的协变性表现为它的张量形式, 它在任意 (非相对论) 的坐标变换下保持形式不变, 这包括对参考系  $\{x^\mu\}$ ,  $\{y^a\}$  及活动标架  $\{e_i\}$

的任意变换。由于这种协变性正是规范场理论的基本思想和出发点，故我们的理论与规范场是一致的，在本文的第Ⅱ部分要作详细介绍。

在小变形弱缺陷的近似下，以上非线性运动缺陷场论就简化为 2.2 节讨论过的线性理论。不难证明 (4.14) 这时化为如下线性方程<sup>[3]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mu} \alpha^{\mu a} &= q^a \\ \partial_{\lambda} \alpha^{\mu a} + \varepsilon^{\mu \nu \sigma} \partial_{\nu} J_{\sigma}^a &= -S^{\mu a} \\ \partial_{\lambda} q^a + \partial_{\mu} S^{\mu a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

这组方程与目前文献中常见的形式一样<sup>[66]</sup>，与本文中的方程 (2.20) 也是可以相互导出的。虽然对线性方程 (4.15) 已有不少研究结果，但对非线性方程 (4.14) 的基本性质目前还缺少研究。但这种研究又是非常迫切的，如对于位错和旋错的相互作用的研究就是很有挑战性，很有吸引力的。

### 参 考 文 献

- 1 Eshelby J D. *Phil. Tran. Roy. Soc.*, A244 (1951) : 37
- 2 Kroner E. in *The Physics of Defects*. Balian R(ed.). North-Holland, Amsterdam (1981)
- 3 段祝平, 黄迎雷. A four-dimensional nonlinear geometric theory of defect continuum. 中国科学院力学研究所报告 (1988) (待发表)
- 4 Weingarten G. *Atti. Accad. Naz. Lincei. Re.*, 10 (1951) : 57
- 5 Love E H. *A Treatise on the Math. Theo. of Elasticity*. Cambridge Univ., Cambridge (1920)
- 6 Orowan E. *Z. Phys.*, 89 (1934) : 605
- 7 Polanyi M. *Z. Phys.*, 89 (1934) : 660
- 8 Taylor G I. *Proc. Roy. Soc., London*, A145 (1934) : 362
- 9 Peierls R E. *Proc. Phys. Soc.*, 52 (1940) : 233
- 10 Nabarro F R N. *Proc. Phys. Soc., London*, 59 (1947) : 256
- 11 Frenkel J, Kontorova T. *Phys. Z. Sowj.*, 13 (1938) : 1
- 12 Frank F C, Read W T. *Phys. Rev.*, 79 (1950) : 722
- 13 Hirth J P. *Metal Trans. A*, 16A (1985) : 1985
- 14 Frank F C. *Phil. Mag.*, 42 (1951) : 309
- 15 Peach M O, Koehler J S. *Phys. Rev.*, 80 (1950) : 436
- 16 Nabarro F R N. *Advans. Phys.*, 1 (1952) : 269
- 17 Kroupa F. *Czech. J. Phys.*, 10E (1960) : 284
- 18 Stroh A N. *J. Math. Phys.*, 41 (1962) : 77
- 19 Read W T, Jr. *Dislocation in Crystals*, McGraw-Hill, New York, NY (1953)
- 20 Cottrell A H. *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*. Oxford University Press (1953)
- 21 Weertman J, Weertman J R. *Elementary Dislocation Theory*. Macmillan, New York, NY (1964)
- 22 Bullough R. *Dislocations*. Atomic Res. Estab., Harwell (1964)
- 23 Kroner E. *Kontinuum Theorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Springer, Berlin (1958)
- 24 Nabarro F R N. *Theory of Crystal Dislocations*. Oxford Univ. Press (1967)
- 25 Teodosiu C. *Elastic Models of Crystal Defects*. E. Academiei Bucuresti, Springer-Verlag (1982)
- 26 钱临照, 柯俊等. 晶体缺陷与金属强度 (上, 下册). 科学出版社 (1962)
- 27 钱临照等. 晶体中位错的观察. 科学出版社 (1962)
- 28 Hirsch P B. *Phil. Mag.*, 1 (1956) : 677
- 29 Bollmann W. *Phys. Rev.*, 103 (1956) : 1588
- 30 Amelinckx S. *Solid State Phys.*, Suppl. 6. Acad. Press, New York, NY (1964)
- 31 Amelinckx S. in *Dislocations in Solids*, Nabarro F R N (ed.). North-Holland, Amsterdam, 2 (1979) : 67
- 32 Johnston W G, Gilman J I. *J. Appl. Phys.*, 31 (1960) : 632
- 33 Bragg W L, Nye J F. *Proc Roy. Soc, London*, A190 (1947) : 474

- 34 Dash M C. *J. Appl. Phys.*, **27** (1956) : 1193
- 35 Nye J F. *Acta Metall.*, **1** (1953) : 153
- 36 Kondo K. RAAC Memoirs of the unifying study of the basic problem in eng. sci. by means of geometry. Tokyo, 1 (1955) : 453
- 37 Kondo K. Proc. Ind. Jap. Nat. Congr. Appl. Mech. (1952) : 41
- 38 Bilby B A, Smith E. *Proc. Roy. Soc.*, **A231** (1955) : 263
- 39 Bilby B A. 1954 Bristol Conf. on Defects in Crystalline Solids, London. The Phys. Society (1955) : 123
- 40 Kroner E. *Ergeb. Angew. Math.*, **5** (1958) : 1
- 41 Bullough R, Perrin P C. Battelle Colloquium on Dislocation Dynamics. Seattle Harrison (May, 1967)
- 42 Nabarro F R N. in Fundamental Aspects of Dislocation Theory. Simmons J A, et al. (eds.) . Spec. Publ. 317, 1 (1970) : 710
- 43 Kosevich A M. in Dislocations in Solids. Nabarro F R N (ed.) , 1 (1979) : 35
- 44 Eshelby J D. Boundary Problems, *ibid.*
- 45 Willis J R. *Phil. Mag.*, **21** (1970) : 77
- 46 Gairola B K D. in Dislocations in Solids. Nabarro F R N (ed.) , 1 (1979) : 224
- 47 Weertman J, Weertman J R. Moving dislocations, in Dislocations in Solids. Nabarro F R N (ed.), 3 (1980) : 1
- 48 Schock G. Thermodynamics and thermal activation of dislocations, *ibid.*
- 49 Indenbomand V L, Orlov A N. *Soviet Phys. Usp.*, **5** (1962) : 272
- 50 Mura T. *Phil. Mag.*, **8** (1963) : 343
- 51 Kosevich A M. *Soviet Phys., Solid State*, **7** (1965) : 22
- 52 Kroner E (ed.) . *Mechanics of Generalized Media*. Springer, Berlin (1968)
- 53 Willis J R. *Int. J. Engng. Sci.*, **5** (1967) : 171
- 54 Mura T. *Phil. Mag.*, **C** (1963) : 843
- 55 Eshelby J D. in *Solid State Physics*. Seitz F, et al (eds.) , New York, **3** (1956) : 79
- 56 Hirth J P, Lothe J. *Theory of Dislocations*. McGraw-Hill, New York, NY (1982)
- 57 Duan Z P (段祝平) . *Int. J. Solids Structure*, **21** (1985) : 633
- 58 Knowles J K, Sternberg E. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **44** (1972): 187
- 59 Fletcher D C. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **60** (1976) : 329
- 60 欧发, 哈尔滨工业大学学报, 3—4 (1978) : 196
- 61 Golebiewska-Lasota A A. *Int. J. Engng. Sci.*, **17** (1979) : 329
- 62 Edelen D G B. *Int. J. Engng. Sci.*, **18** (1980) : 1095
- 63 Edelen D G B. *Int. J. Engng. Sci.*, **17** (1979) : 441
- 64 Edelen D G B. *Ann. Phys. (N. Y.)*, **133** (1981) : 286
- 65 Kadic A, Edelen D G B. A gauge theory of dislocations and disclinations, Springer Lecture Notes in Phys., No 174, Berlin (1983)
- 66 龙期威, 董连科. 微观和宏观相结合的断裂力学 (上, 下). 应用数学和力学编委会和中国矿业学院北京研究部联合主办, 北京 (1986)
- 67 Duan Y S (段一士) , Duan Z P (段祝平) . *Int. J. Engng. Sci.*, **24** (1986) : 513
- 68 Asaro R J. 晶体塑性. 应用力学最新进展 (下册). 科学出版社, 龚尧南等译 (1987)
- 69 Nasser S N. 论结晶固体和地质材料的有限塑性流动. 同上.
- 70 Cartan E C R. *Acad. Sci.*, **174** (1922) : 593
- 71 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义. 北京大学出版社 (1985)
- 72 Sedov L I, Berdichevski V. A dynamic theory of dislocations. in *Mechanics of Generalized Media*, Kroner E. (ed.) (1968) : 214
- 73 Edelen D G B. *Int. J. Solids Structure*, **17** (1985) : 729
- 74 Kleman M. *Points, Lines and Walls*. A-Wiley Interscience Publication (1983)
- 75 Lee E H. *J. Appl. Mech.*, **39** (1969) : 1
- 76 Kossecka E, deWit R. *Arch. Mechaniki Stosowanej*, **29** (1977) : 633
- 77 Kossecka E, deWit R. *Arch. Mechaniki Stosowanej*, **29** (1977) : 749
- 78 Kroner E. *Z. Phys.*, **141** (1955) : 386
- 79 Eshelby J D. *Phil. Mag.*, **3** (1958) : 440
- 80 Mura T. *Phil. Mag.*, **8** (1963) : 834
- 81 Amari S I. *Int. J. Engng. Sci.*, **19** (1981) : 1581

# CONTINUUM THEORY OF DEFECT AND ITS APPLICATION TO THE STUDY OF CONSTITUTIVE EQUATIONS

## I. General Introduction, Kinematics and Geometric Theories of Deformation

Duan Zhu-ping Huang Ying-lei Wang Wen-biao  
(Institute of Mechanics, Academia Sinica) (Graduate School, Academia Sinica)

**Abstract** The continuum theory of defect, or the field theory of defect, is an important branch in modern solid mechanics and aims at building a bridge between macroscopic and microscopic researches of the elastic and inelastic behavior of materials. It is also considered a combined science developed from the interactions between solid mechanics, modern physics and modern mathematics. The present paper systematically introduces the main developments and up-to-date results in this field. It is divided into three parts. In the first part, the kinematics and geometric theories of deformation of a continuum with dislocations and disclinations are discussed including both earlier results by Nye, Kondo, Bilby and Kröner, etc. and our recent works on the derivation of nonlinear kinematic field equations in terms of Cartan equations of structure on 4-dimensional material manifold. In the second part, the gauge field theory of defect continuum is reviewed in detail stressing on the development of dynamic equations for the continuum. The third part of the paper is devoted to the application of the continuum theory of defect to the construction of constitutive equations of elasto-plastic materials.

**Keywords** *defect continuum; material manifold; gauge field theory; constitutive equations; dislocation; disclination*