$$= \frac{i\alpha z}{|z|^3} \cdot |z|^2 \cdot \dot{\varphi} = i\alpha e^{i\varphi} \cdot \dot{\varphi} \quad (10)$$

A 中的第二项对 t 求导为

$$\frac{d}{dt}(-\alpha e^{i\varphi}) = -i\alpha e^{i\varphi}\dot{\varphi} \quad (11)$$

由(10),(11)两式立即得

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad (12)$$

2. Kepler 运动的轨道方程

质点在牛顿力场中的轨道为一椭圆，这就是著名的 Kepler 第二定律. 我们可以很方便地用复变量形式的 Runge-Lenz 矢量守恒性推得这一结果.

记 $A = A_0 e^{i\varphi_0}$, $z = re^{i\varphi}$, 则有

$$A \cdot \bar{z} = A_0 \cdot re^{-i(\varphi-\varphi_0)} \quad (13)$$

式中 A_0, φ_0 均为不随时间变化的恒量，于是有

$$R_e\{A \cdot \bar{z}\} = A_0 \cdot r \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (14)$$

由(5)有

$$A \cdot \bar{z} = -\{im\dot{z}I_m(\bar{z} \cdot \dot{z}) + \alpha e^{i\varphi}\} \cdot \bar{z} \quad (15)$$

因有

$$R_e(im\dot{z}\bar{z}) = -I_m\{m\bar{z} \cdot \dot{z}\} = -L$$

$$R_e(\alpha e^{i\varphi} \cdot \bar{z}) = R_e(\alpha r) = \alpha r$$

代入(15)中即得

$$R_e\{A \cdot \bar{z}\} = \frac{L}{m} - \alpha r \quad (16)$$

于是由(14)即可推得

$$r = \frac{L^2/\alpha m}{1 + \frac{A_0}{\alpha}\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$= \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (17)$$

这正是众所周知的结果. 从这个推导还可以看到，轨道的离心率 e 由 Runge-Lenz 矢量的模 A_0 来决定. 由不同的初始条件 (A_0)，分别有 $e \gtreqless 1$ 的不同情形，相当于在牛顿力场中的运动轨道分别为双曲线，抛物线和椭圆三种不同的情形.

参考文献

[1] 汤昌仪，复变量在一般力学中的应用，鞍山钢院学报，1 (1985)，15—20.

[2] H. 戈得斯坦，经典力学，第二版，科学出版社(1986).

(本文于1987年7月11日收到)

用 Symbolic Computation 计算毛细重力波六阶解

李家春 (中国科学院力学研究所)

提要: 本文首先运用 Symbolic Computation 在半物理平面 (x, ϕ) 上计算了毛细重力波的六阶解，得到了波形与色散关系，低阶解与 Hogan 结果一致.

关键词: 毛细重力波，遥感，破碎波，符号计算.

研究毛细重力波有双重意义: 首先，自1978年 SEASAT 海洋卫星测量海况后，遥感技术已被证明是有前途的海洋观测手段. 毛细重力波会通过 Bragg 散射机理对微波发射率产生重要影响[1]；另一方面，研究波浪破碎时要考虑陡波的情况，这时表面张力亦不可忽略.

1915年，Wilton[4]对毛细重力波进行过研究. 1957年 Crapper 得到了纯毛细波的精确解. 近年来，Hogan[3] 用摄动法对重力毛细波进行了计算，其中包括波形、相速度等物理量. 由于工作量随阶数增加而骤增，所以单凭手算不易得到高阶解.

我们首先采用了 W. H. Hui[2] 提出的重力波问题新的表述方式，但同时亦将表面张力效应考虑进去，得:

$$E.Q.\quad y_\phi^2 y_{xx} - 2y_x y_\phi y_{x\phi} + (1 + y_x^2)y_{\phi\phi} = 0 \quad (1)$$

$$B.C.\quad (1+y_x^2)y_\phi^{-2} + 2\delta_y - 2\delta\kappa(1+y_x^2)^{-\frac{3}{2}}y_{xx} = 2C \qquad 在\ \phi = 0\ 上$$

$$y \sim \phi \qquad \phi \to -\infty \quad (2)$$

其中 x、y 分别为水平垂直坐标、ϕ 为流函数，$\kappa = \frac{Tk^2}{\rho g}$ 为无量纲数，T 为表面张力，k 为波数 ρ 为密度，g 为重力加速度. 若假设

$$y = \phi + \Sigma\varepsilon^{(l)}y^{(l)}(x, \phi) \quad (3)$$

$$y^{(l)} = \sum_{m=1}^{l} e^{m\phi} \sum_{n=0}^{m} A_{m,n}^{(l)} \cos nx \quad (4)$$

代入方程与边界条件，只要求出系数 $A_{m,n}^{(l)}$ 问题就迎刃而解. 在这里，我们采用了 Symbolic Computation 去完成大量公式推导，其关键是

表 4　$y^{(4)}(x,\phi)$ 的表达式

	const	cos2x	cos 4x
$e^{2\phi}$	$-\dfrac{9}{8(1-2\kappa)}$	$\dfrac{-(1-6\kappa)(10+5\kappa-23\kappa^2)}{16(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)}$	
$e^{4\phi}$	$\dfrac{\left(1-\dfrac{\kappa}{2}\right)^2}{(1-2\kappa)^2}$	$\dfrac{32+29\kappa-6\kappa^2}{24(1-2\kappa)(1-3\kappa)}$	$\dfrac{(1+\kappa)(16+77\kappa-248\kappa^2-12\kappa^3)}{48(1-2\kappa)^2(1-3\kappa)(1-4\kappa)}$

表 5　$y^{(5)}(x,\phi)$ 的表达式

	cos x	cos 3x	cos 5x
e^{ϕ}	$\dfrac{-(80+2553\kappa-2592\kappa^2-1660\kappa^3-240\kappa^4)}{384(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)}$		
$e^{3\phi}$	$\dfrac{-3(65-371\kappa+344\kappa^2+60\kappa^3)}{64(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)}$	$\dfrac{-(332-2631\kappa-12792\kappa^2+67004\kappa^3-33552\kappa^4-36000\kappa^5)}{768(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)^2(1-4\kappa)}$	
$e^{5\phi}$	$\dfrac{5(250-350\kappa+70\kappa^2+24\kappa^3)}{384(1-2\kappa)^2(1-3\kappa)}$	$\dfrac{5(125+115\kappa-880\kappa^2-96\kappa^3+144\kappa^4)}{384(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)(1-4\kappa)}$	$\dfrac{5(100+1249\kappa-1374\kappa^2-7772\kappa^3-2552\kappa^4+672\kappa^5)}{1536(1-2\kappa)^2(1-3\kappa)(1-4\kappa)(1-5\kappa)}$

表 6　$y^{(6)}(x,\phi)$ 的表达式

	const	cos 2x	cos 4x	cos 6x
$e^{2\phi}$	$\dfrac{163-3768\kappa+4050\kappa^2+1660\kappa^3+240\kappa^4}{384(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)}$	$(454-4590\kappa+41811\kappa^2-74917\kappa^3-219750\kappa^4+571308\kappa^5-262904\kappa^6-85920\kappa^7-11520\kappa^8)/768(1-2\kappa)^5(1-3\kappa)^2(1-4\kappa)$		
$e^{4\phi}$	$\dfrac{-(56-390\kappa+651\kappa^2-391\kappa^3+78\kappa^4)}{16(1-2\kappa)^4(1-3\kappa)}$	$(-1472+14181\kappa-25398\kappa^2-31052\kappa^3+64008\kappa^4-6336\kappa^5)/384(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)^2(1-4\kappa)$	$-(1472-11865\kappa-275229\kappa^2+2699644\kappa^3-7220604\kappa^4+1708560\kappa^5+15393104\kappa^6-12108096\kappa^7-2007360\kappa^8)/4608(1-2\kappa)^4(1-3\kappa)^2(1-4\kappa)^2(1-5\kappa)$	
$e^{6\phi}$	$\dfrac{27(64-176\kappa+153\kappa^2-44\kappa^3+4\kappa^4)}{512(1-2\kappa)^2(1-3\kappa)^2}$	$(5184-30336\kappa+44256\kappa^2+20544\kappa^3-70176\kappa^4+27072\kappa^5+3456\kappa^6)/1024(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)^2(1-4\kappa)$	$3(1728+7607\kappa-28618\kappa^2-27788\kappa^3+14104\kappa^4+5280\kappa^5)/2560(1-2\kappa)^2(1-3\kappa)(1-4\kappa)(1-5\kappa)$	$3(1+\kappa)(288+4693\kappa-38212\kappa^2+11331\kappa^3+323242\kappa^4-474100\kappa^5-40296\kappa^6+67680\kappa^7)/2560(1-2\kappa)^3\times(1-3\kappa)^2(1-4\kappa)(1-5\kappa)(1-6\kappa)$

要设计一个“过程”，使表达式按我们的要求去简化. 整个问题在 MAPLE 系统上计算，REDUCE 系统上校核完成的. 在中国科学院计算中心 IBM4341 机器上引进了上述软件.

我们将毛细重力波的摄动解延伸到六阶（详见表 1 至表 6）. 若令 $\phi=0$，便可求出波形. 相速度的结果为:

$$c^2=1+\kappa+\frac{8+\kappa+2\kappa^2}{8(1-2\kappa)}\varepsilon^2+\frac{160+82\kappa+201\kappa^2-422\kappa^3-596\kappa^4+24\kappa^5}{128(1-2\kappa)^3(1-3\kappa)}\varepsilon^4 \tag{5}$$

截断上述结果与 Hogan 低阶近似完全一致. 根据本文原则，可以导出更高阶近似. 这是利用 Symbolic Computation 成功地进行理论分析的又一实例[5].

致谢：宋涛同志校核了计算结果，谨此表示感谢.

表 1　$y^{(1)}(x,\phi)$ 表达式

	$\cos x$
e^{ϕ}	1

表 2　$y^{(2)}(x,\phi)$ 的表达式

	const	$\cos 2x$
$e^{2\phi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\kappa}{2(1-2\kappa)}$

表 3　$y^{(3)}(x,\phi)$ 的表达式

	$\cos x$	$\cos 3x$
e^{ϕ}	$\frac{-9}{8(1-2\kappa)}$	
$e^{3\phi}$	$\frac{9}{8(1-2\kappa)}$	$\frac{3(2+7\kappa+2\kappa^2)}{16(1-2\kappa)(1-3\kappa)}$

参 考 文 献

[1] Valenzuela, G. R., Microwave sensing of the ocean surface, in “The Ocean Surface, Wave Breaking, Turbulunt Mixing and Radio Probing” Edited by Y. Toba & H. Mitsnyasu (1985) 233—244.

[2] Hui W. H. et al, A new approach to steady flow with frec surfaces, ZAMP 33 (1982) 569—589.

[3] Hogan., S. J., Some ebbects of surface tension on steep water waves, *JFM* 96 (1980) 417—445.

[4] Wiltors, J. R., on ripples, *Phil. Mag.* **29**, 173 (1915) 688—700.

[5] Li J. C. (李家春), Hui, W. H. Teuti, G., Nonlinwearaves in weak shear blows ria Maple system, Proceedings of Int. Summer collogium on Nonlinear Dynamics of the atmosphere, Science Press, Beijing (1987) 399—406.

（本文于 1987 年 11 月 3 日收到）

边界元中奇异核的一种有效数值积分法

张玉岷　（北方车辆研究所，北京）

提要　本文用一般的 Laguerre-Gauss 积分公式来计算在边界元中常用奇异核的数值积分.

关键词　边界元、奇异核、数值积分.

在结构分析中，边界元法的计算精度在很大一部份上都取决于奇异积分的计算精度. 因此边界元中的奇异积分问题引起了人们广泛的重视. 虽然人们在这个问题上做了不少工作[1-4]，但结果还不能达到令人满意的程度. 本文所采用的方法在精度和运算速度上都有很大改进.

1. 对数奇异核的一维数值积分

边界元中奇异核的积分式一般为 $\int_{\Gamma_j}\ln r\,d\Gamma$. 这里 r 代表场点到原点的距离，Γ_j 是域的一小部分边界. 如果 s 和原点 Q 均满足 $s,Q\in\Gamma_j$，则上面积分是奇异的.

通过高斯变换，积分式可变成:

$$\int_{-1}^{1}N_i(\xi)\ln r(\xi)\,|J(\xi)|\,d\xi \tag{1}$$

其中 $N_i\ (i=1,2,3)$ 是插值函数. $|J|$ 是雅可比阵. 如果 $\xi=-1$（或 0, 1）是奇异点，利用坐标变换 $\xi=2e^{-x}-1$，且利用 Laguerre-Gauss