第19卷 第2期　　力 学 进 展　　Vol. 19 №2
1989年5月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1989

缺陷连续统理论及其在本构方程研究中的应用*

II. 缺陷的规范场理论

段祝平　黄迎雷
中国科学院力学研究所，北京（邮政编码100080）

王文标
中国科学院研究生院，北京（邮政编码100039）

提要　详细评述了缺陷连续统的规范场理论，该理论是近代材料科学和固体力学中新发展起来颇有意义的一个分支.首先强调了Noether定理及其逆定理在构造缺陷规范场理论中的重要性.同时基于Yang-Mills普适规范场构造，包括对SO(3)▷T(3)群的最小替换和最小耦合原理，系统地介绍了Golebiewska-Lasota，Edelen，Kadic和Edelen等人的原始性工作及他们的贡献.本文表明，Kadic和Edelen的理论是基于一组缺陷动力学的线性连续性方程发展起来的，不能和关于缺陷场的现有几何理论完全协调起来.考虑到这一点，本文提供了另一种方法来建立非线性弹性规范场的相应理论，这里考虑了Poincaré规范群SO(3)▷T(3).采用类似于研究引力场理论的Kibble方法，导出了缺陷连续统的拉氏密度.非完整坐标变换和非欧联络系数在数学上完全等价于子Poincaré群SO(3)▷T(3)的规范场.因此，本文的规范场理论和4维物质流形$\overline{M}_4$的缺陷场的非线性几何理论是完全一致的，并证明在弱缺陷条件下，可以简化到Kadic和Edelen的结果.

关键词　缺陷连续统；物质流形；规范场论；本构方程；位错；旋错

1　引言——理论概述

1.1　如何建立缺陷场的动力学方程

本文第I部分基于三构形方法对缺陷连续统的运动学和变形几何学作了详细描述[1]，尤其是运用4维物质流形$\overline{M}_4$上的Cartan结构方程推导了缺陷场的协变形式的非线性连续方程.这时，独立场量有27个：宏观运动y^a，半度规A^a_μ和非黎曼联络$\Gamma^{\tilde{i}\tilde{j}}_a$($a=1,2,3$;

* 中国科学院非线性连续介质力学开放实验室和国家自然科学基金资助研究课题.

$\underset{\sim}{\mu},\underset{\sim}{i},\underset{\sim}{j}=1,2,3,4$)，且非黎曼联络的上标是反对称的1)．当无旋错时，半度规 $\mathbf{A}$ 可以完全决定联络，独立场量减为15个（比经典塑性理论多3个）．这样，构造这些场量的动力学方程便成为缺陷场论的一个中心课题．

在不计热耗散效应时，场的动力学方程可从构造相应 Lagrange 函数，并利用最小作用量原理求得，然后运用 Noether 定理建立缺陷场的各种守恒量及相应的守恒定律．近10年来，用规范场的理论和方法来构造相应的 Lagrange 函数获得了成功，并且可用以研究缺陷场和其他场，如电磁场等的相互作用．这样，缺陷的规范场理论成为建立缺陷场动力学方程的一种最自然，最严谨的方法，也成为缺陷连续统理论发展中继非线性几何理论后的又一重要进展．笔者认为，这也是近代物理、数学、力学和材料科学紧密结合推动科学发展的范例．

1.2 对称性破缺及规范场的引入

规范场作为解释自然界基本相互作用的基本理论早就为物理学家所熟悉[2-5]．但用规范场方法建立缺陷的连续统理论并寻求解决现代塑性本构关系及有关力学问题是近10年来的事．通过Golebiewska-Lasota[6]，Edelen[7,8]，Kadic 和Edelen[9] 等人的工作，规范场得到了力学家的关注．晚近，Edelen 和 Lagoudas[10] 对缺陷的规范场理论作了较系统的论述，尤其讨论了缺陷场和电磁场的相互作用．

一般讲，规范场的对象是具有某种对称性（在时空或场量变换下保持作用量不变的性质）的 Lagrange 系统．该系统的运动由拉氏量 $\mathbf{L}$ 描述．只要 $\mathbf{L}$ 具有这种连续的对称性，则从规范场方法可引导出比该系统原有场量更基本的且支配系统内部相互作用的新的场——规范场．这种由对称性产生相互作用的深刻思想已在自然界的四种基本相互作用力的探索中起了主导作用．事实上，强、弱、电磁和引力这四种基本作用不仅都有各自的规范场理论模型，而且可能在更一般的对称性考虑下，用规范场理论将其统一起来，这就是所谓的大统一理论．如该理论获得成功，规范场理论便成为解释自然的最基本理论了．

就塑性本构理论研究而言，目前绝大多数工程理论是半经验的，缺乏统一可靠的理论基础．随科学的发展，人们正从细观和微观层次揭示塑性的本质，这需要了解材料内部缺陷的分布和运动规律．直观上，无缺陷的理想连续统具有某种整体的空间对称性，而缺陷的出现使整体对称性产生了破缺．位错和旋错分别使整体的空间平移对称性和转动对称性发生了变化，这与考虑系统对称性及其破缺为主要特征的规范场理论不谋而合．如果我们以无缺陷的理想连续统——弹性场作为系统的基态，则缺陷就是基态场的整体对称性发生变化所产生的规范场，它代表了弹性场和缺陷场的相互作用．经典弹性力学仅研究弹性基态场的运动，缺陷连续统是对它的一个发展．缺陷是弹性场的内部“物质”，如同基本粒子之间的介子或胶子一样，同属于产生相互作用的规范场．

近代规范场的发展要追溯到挪威数学家 E.Noether 的工作[11]，她首先认识到对称性局部化这样一般的概念．由 Weyl 在1920年的工作[12]，从企图解释电磁相互作用出发而奠定了这一理论的基本形式．Yang 和 Mills[13] 在1954年的工作是里程碑性的．他们将规范场用于解释具有同位旋对称性的基本粒子的相互作用，成功地得到了非 Abel 群下规范场的

1） 在下面推导中，已将符号 $A^a_{\underset{\sim}{\mu}}$ 改成 $\Phi^a_{\underset{\sim}{\mu}}$．

一般形式。Utiyama[14]和Kibble[15]等将规范场用于解释引力作用，从另一角度得到并发展了爱因斯坦的广义相对论。60年代后，规范场理论用来作为建立强、弱和电磁相互作用的理论的主要工具，许多重要的理论结果被实验所证实，而且，一个包括引力场在内的自然界的四种基本相互作用的"大统一"理论也正在逐渐形成[16-18]。人们对规范场理论的热情至今方兴未艾，缺陷的规范场理论就是在这种背景下产生、发展起来的。

1.3 缺陷规范场理论研究概况

缺陷的规范场理论发展仅仅是近10年内的事情。1979年波兰女学者Golebiewska-Lasota发表了一篇经典性的工作[6]，她把线性位错场与电磁场相比较并讨论了它们的Abel规范变换。这一工作直接引起了缺陷规范场理论的迅速发展。首先是Lasota和Edelen[7]将上述思想推广到一般线性位错和旋错缺陷连续统的情形。Edelen[8]用外微分将线性缺陷场方程组表示为4维时空框架中用微分形式表示的方程组，清楚地表明它具有45重Abel规范群，并对其加以适当规范条件的限制可使问题大为简化。虽然这些Abel规范群并不能象前面所说的那样从对称性导出缺陷规范场，但把缺陷场和电磁场作比较并提出缺陷场也具有规范不变性的观点是有创造性的，意义深远的，它启发并促进了缺陷规范场理论的发展。如Kadic和Edelen[9]以转动群SO(3)和平移群T(3)的半直积SO(3)▷T(3)作为对称群建立了以线弹性场作为基态的缺陷规范场理论，用Yang-Mills最小替换和最小耦合原理导出缺陷场的拉氏量，考虑了弹性场和缺陷场的相互作用，建立了完备的缺陷连续统的动力学方程组。

但是正如Edelen和Lagoudas最近著作指出的[10]，许多不同的作者，从不同的出发点并采用不同的基本假定建立了各种关于缺陷场的规范理论。这取决于作者们是如何运用Yang-Mills的基本结构的。其中包括段一士和段祝平[19]，Gairola[20]，Gunther[21]，Kleinert[22,23]，Kröner[24]，Kunin I.A.和Kunin B.I.[25]，Turski[26]等人的工作。另外，也有不少作者[27-29]从缺陷的拓扑结构和性质去讨论缺陷场的理论。

规范场的吸引力不仅来自它的物理和哲学上的质朴性，而且来自其数学上的成熟和优美结构。现代微分几何的纤维丛理论可以用来成功地完满解释规范场的方法[3]。对缺陷规范场，它正好对应于自然态（详见本文第I部分）上的活动标架所构成的主切丛上的联络和半度规，这与非线性缺陷连续统的三构形几何理论完全一致。这样，把缺陷场的运动学和动力学统一在一个大的几何理论框架内的努力是有希望成功的。

1.4 本文讨论的内容

本文第2节讨论一般场的Lagrange理论和给出一般形式的Noether定理，看一看规范场方法和Noether定理及其反定理是如何联系起来的。第3节介绍线性缺陷场的Abel规范变换，看一看人们如何从线性位错场基本方程和电磁场基本方程的比较而引出缺陷的规范变换思想的。第4节进一步说明以各向同性线弹性为基态场而发展起来的缺陷规范场理论，这里考虑了非Abel变换，给出了Yang-Mills规范场的一般表达并用Yang-Mills最小耦合和最小置换原理构造了相应的拉氏量，不但获得了缺陷连续统的连续性方程而且建立了完整的动力学方程组，包括了缺陷场和弹性场的相互作用。第5节讨论关于非线性弹性场的规范场的一些结果，这是笔者利用Kibble理论得到的。并简要指出缺陷规范场理论进一步发展所需解决的问题。

2 Lagrange场论和Noether定理

2.1 Lagrange场和最小作用原理

在4维时空 $E_4(z^{\tilde a}, \tilde a=1,2,3,4)$中具有一定分布特征的一组物理量$\Psi^A=\Psi^A(z^{\tilde a})$称为场量，空间的度量张量取为$\eta^{\tilde a\tilde b}$且$\eta^{11}=\eta^{22}=\eta^{33}=-1$，$\eta^{44}=+1$，其余为零. 这里场量指标$A=A_1,A_2,\cdots$可以是任意阶张量场. 设由场量$\Psi^A$描述的力学系统对应于一个作用量泛函

$$\mathrm{I}(\Psi^A)=\int_\Omega L(z^{\tilde a},\Psi^A,\Psi^A_{\tilde a},\Psi^A_{\tilde a\tilde b})d^4z-\int_{\partial\Omega}[p_A\Psi^A+p^{\tilde a}_A\Psi^A_{\tilde a}]d^3s \tag{2.1}$$

其中，L是该系统的拉氏量（体积密度），d^4z是4维体积元，d^3s是3维面积元. Ω是对应的体积而$\partial\Omega$是Ω的边界. 而p_A和$p^{\tilde a}_A$是广义边界力. 并定义符号

$$\Psi^A_{\tilde a}\equiv\partial\Psi^A/\partial z^{\tilde a};\quad \Psi^A_{\tilde a\tilde b}\equiv\partial^2\Psi^A/\partial z^{\tilde a}\partial z^{\tilde b} \tag{2.2}$$

例如，无限非线性弹性体，若无穷远处应力为零，则相应有

$$\mathrm{I}(y^a)=\int L_0(x^{\tilde\mu},y^a,y^a_{\tilde\mu})\,d^4x\ (a=1,2,3;\ \tilde\mu=1,2,3,4) \tag{2.3}$$

其中$y^a=y^a(x^{\tilde\mu})$表示运动，$x^{\tilde\mu}(\tilde\mu=1,2,3,4)$是4维参考构形的坐标，$L_0=T-U-W$是拉氏量，而$T$，$U$和$W$分别是动能，应变能和外力场势能的体积密度. 下面讨论时，一般取Ω为E_4，而在$\partial\Omega$上，边界条件均为零.

一般讲，当场量和时空结构发生变化时，总存在某些量对场量和时空的变换具有某种不变性质，称这些量为守恒量，对应的物理定律为守恒定律. 对由场量$\Psi^A(A=A_1,A_2,\cdots)$确定的保守系统，从Hamilton最小作用量原理可知：存在形如（2.1）的作用量泛函使其对真实的运动有

$$\delta\mathrm{I}=0 \tag{2.4}$$

其中$\delta\mathrm{I}$是场量改变时，$\Psi^A\to\Psi^A+\delta\Psi^A$作用量$\mathrm{I}$的变分. 可以证明与变分方程（2.4）对应的Euler-Lagrange方程及相应的初、边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&\delta L/\delta\Psi^A\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\partial L/\partial\Psi^A-S^{\tilde a}_{A,\tilde a}+S^{\tilde a\tilde b}_{A,\tilde a\tilde b}=0\qquad(A=A_1,A_2,\cdots)\\&(S^{\tilde a}_A-S^{\tilde a\tilde b}_{A,\tilde b})n_{\tilde a}=p_A,\quad S^{\tilde a\tilde b}_An_{\tilde a}=p^A_{\tilde b}\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

这里，为方便起见引进了记号

$$S^{\tilde a}_A\equiv\partial L/\partial\Psi^A_{\tilde a},\ S^{\tilde a\tilde b}_A\equiv\partial L/\partial\Psi^A_{\tilde a\tilde b} \tag{2.6}$$

而称$\delta L/\delta\Psi^A$为拉氏量L相对于场量Ψ^A的Lagrange导数.

2.2 时空变换群和规范变换群

现在提出这样一个问题：在引进时空和场量的无穷小变换

$$\tilde z^{\tilde a}=z^{\tilde a}+\Delta z^{\tilde a}(z^{\tilde a},\epsilon^1,\cdots,\epsilon^r),\qquad \tilde\Psi^A=\Psi^A+\Delta\Psi^A(z^{\tilde a},\Psi^A,\cdots,\epsilon^1,\cdots,\epsilon^r) \tag{2.7}$$

后，在什么样的条件下可使作用量泛函（2.1）保持不变，即有

$$\delta\mathrm{I}=\tilde{\mathrm{I}}(\tilde\Psi^A)-\mathrm{I}(\Psi^A)=0 \tag{2.8}$$

这里，Δz^a 和 $\Delta\Psi^A$ 是时空和场量的变分依赖于 r 个无穷小独量参数 ϵ^k，当它们不明显依赖于时空时称为整体变换，否则称为局部变换或定域变换。显然，所有变换的集合组成一个群，分别称为时空变换群和场量变换群，而反映内部对称性的场量变换又称为规范变换。

由群的表示定理[30,31]可知，时空和场量的无穷小变换可以写成

$$\Delta z^{\tilde{a}} = \eta^{\tilde{a}}(z) + \epsilon^k \mathbf{X}_k z^{\tilde{a}}, \quad \Delta\Psi^A = \lambda^A(z,\Psi^A) + \epsilon^k \mathbf{I}_k \Psi^A \tag{2.9}$$

其中 $\eta^{\tilde{a}}$ 表示时空的局部平移群，有 $\eta^{\tilde{a}}(z) = \Delta z^{\tilde{a}}\Big|_{\epsilon^k=0}$ 而 λ^A 是规范平移群，有 $\lambda^A = \Delta\Psi^A\Big|_{\epsilon^k=0}$，$\mathbf{X}_k$ 和 $\mathbf{I}_k$ 分别表示时空群和规范群的生成元，它们有两种等价形式表示：微分形式和矩阵形式，如

$$\mathbf{X}_k = \frac{\partial \Delta z^{\tilde{a}}}{\partial \epsilon^k}\Bigg|_{\epsilon=0} \frac{\partial}{\partial z^{\tilde{a}}} \sim \mathbf{X}_k = \left(\mathbf{X}_k{}^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}\right) \tag{2.10}$$

一般讲，当时空和场量发生变换时，场量变换由两部分组成：

$$\Delta\Psi^A = \underset{\sim}{\Delta}\Psi^A + \Delta_*\Psi^A = \Psi^A_{\tilde{a}}\,\Delta z^{\tilde{a}} + \Delta_*\Psi^A \tag{2.11}$$

其中 $\underset{\sim}{\Delta}\Psi^A = \Psi^A_{\tilde{a}}\,\Delta z^{\tilde{a}}$ 是由时空变换引起的而 $\Delta_*\Psi^A$ 纯粹由场量函数结构改变引起的 Ψ^A 的变化。由（2.9）—（2.11）可得

$$\underset{\sim}{\Delta}\Psi^A = \eta^{\tilde{a}}\Psi^A_{\tilde{a}} + \epsilon^k \mathbf{X}_k \Psi^A, \quad \Delta_*\Psi^A = \lambda^A - \eta^{\tilde{a}}\Psi^A_{\tilde{a}} + \epsilon^k \mathbf{I}^*_k \Psi^A \tag{2.12}$$

其中 $\mathbf{I}^*_k = \mathbf{I}_k - \mathbf{X}_k$ 表示 $\Delta_*\Psi^A$ 的生成元。在 $\eta^{\tilde{a}} = \lambda^A = 0$ 条件下，无穷小变换群（2.7）称为无穷小有限群，用 G_r 表示：

$$\tilde{z}^{\tilde{a}} = z^{\tilde{a}} + \epsilon^k \mathbf{X}_k z^{\tilde{a}}, \quad \tilde{\Psi}^A = \Psi^A + \epsilon^k \mathbf{I}_k \Psi^A \tag{2.13}$$

$$\Delta_*\Psi^A = \epsilon^k \left[\mathbf{I}_k \Psi^A - \Psi^A_{\tilde{a}} \mathbf{X}_k z^{\tilde{a}}\right] \tag{2.14}$$

它们只依赖于无穷小参数 $\epsilon^k(k=1,2,\cdots,r)$。由群的表示式可知，即使参数 ϵ^k 是时空依赖的函数，上述有限群 G_r 的表示（2.13）仍然成立。在这情形下，还存在一种无穷小无限群 $G_{r\infty}$

$$\tilde{z}^{\tilde{a}} = z^{\tilde{a}} + \epsilon^k \mathbf{X}_k z^{\tilde{a}}, \quad \tilde{\Psi}^A = \Psi^A + \underset{k}{H^A}\epsilon^k + \underset{k}{B^{A\tilde{a}}}\,\partial\epsilon^k/\partial z^{\tilde{a}} \tag{2.15}$$

在理论物理中有广泛的应用。在 $G_{r\infty}$ 中时空变换和 G_r 相同，但规范变换是 ϵ^k 和 $\partial\epsilon^k/\partial z^{\tilde{a}}$ 的线性组合。

2.3 一般 Noether 定理和场的守恒性质

如果由（2.7）表示的无穷小变换群是关于场量 $\Psi^A(A=A_1,A_2,\cdots)$ 的一个对称群，则该变换群、场量 Ψ^A 和拉氏量之间需满足什么关系，这就是著名的 Noether 定理要解决的问题。（详见[2]）

Noether 定理 在无穷小变换群（2.7）下，作用量泛函（2.1）保持不变的充要条件是下列基本方程成立：

$$\frac{\delta L}{\delta \Psi^A}\delta_* \Psi^A + J^{\tilde{a}}{}_{,\tilde{a}} = 0 \tag{2.16}$$

这里，$\delta L/\delta\Psi^A$ 表示拉氏量对场量的 Lagrange 导数，由 $(2.5)_1$ 定义，而$J^{\tilde{a}}(\tilde{a}=1,2,3,4)$ 是4维"流"密度，一般有两种形式：

$$J^{\tilde{a}} = L\delta z^{\tilde{a}} + \left[S^{\tilde{a}}_A - S^{\tilde{a}\tilde{b}}_{A,\tilde{b}}\right]\delta_*\Psi^A + S^{\tilde{a}\tilde{b}}_A(\delta_*\Psi^A)_{,\tilde{b}} \tag{2.17}$$

或

$$J^{\tilde{a}} = B^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}\delta z^{\tilde{b}} + \left(S^{\tilde{a}}_A - S^{\tilde{a}\tilde{b}}_{A,\tilde{b}}\right)\delta\Psi^A + S^{\tilde{a}\tilde{b}}_A\,\delta\Psi^A_{\tilde{b}} - S^{\tilde{a}\tilde{b}}_A\,\Psi^A_{\tilde{c}}(\delta z^{\tilde{c}})_{,\tilde{b}} \tag{2.18}$$

而 $B^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}$ 为4维能量动量张量：

$$B^{\tilde{a}}_{\tilde{b}} = L\delta^{\tilde{a}}_{\tilde{b}} - S^{\tilde{a}}_A\Psi^A_{\tilde{b}} + S^{\tilde{a}\tilde{c}}_{A,\tilde{c}}\Psi^A_{\tilde{b}} - S^{\tilde{a}\tilde{c}}_A\Psi^A_{\tilde{c}\tilde{b}} \tag{2.19}$$

在拉氏量只依赖于场量的一阶导数时，$S^{\tilde{a}\tilde{b}}_{b}=0$，(2.17) — (2.19) 简化很多：

$$J^{\tilde{a}} = L\delta z^{\tilde{a}} + S^{\tilde{a}}_A\delta_*\Psi^A = B^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}\delta z^{\tilde{b}} + S^{\tilde{a}}_A\,\delta\Psi^A \tag{2.20}$$

而能动张量为

$$B^{\tilde{a}}_{\tilde{b}} = L\delta^{\tilde{a}}_{\tilde{b}} - S^{\tilde{a}}_A\Psi^A_{\tilde{b}} \tag{2.21}$$

关于上述定理的详细证明可参阅[2, 32, 33]. 这里，我们给一简单说明：在略去高阶小量后，通过运算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(\tilde{\Psi}^A) &= \int_{\tilde{\Omega}} L(\tilde{z}^{\tilde{a}}, \tilde{\Psi}^A, \tilde{\Psi}^A_{\tilde{a}}, \tilde{\Psi}^A_{\tilde{a}\tilde{b}})\,d^4\tilde{z} \\ &= \mathrm{I}(\Psi^A) + \int_{\Omega}\left[\frac{\delta L}{\delta\Psi^A}\delta_*\Psi^A + J^{\tilde{a}}{}_{,\tilde{a}}\right]d^4z + O(\delta z^2)\end{aligned} \tag{2.22}$$

这样，定理的充要条件便一目了然了。

这里给出的是最一般形式的 Noether 定理，首先，对场量 Ψ^A 及指标 A 没有任何限制；其次，拉氏量可以依赖于时空也可以依赖于场量以及它们的一阶导数和二阶导数；最后，对变换群 (2.7) 也未加任何限制. 因此，从这最一般形式的定理可以推出下列结果：

推论 1 当场量 Ψ^A 为泛函 (2.1) 的极值点时，变换群 (2.7) 为对称群的充要条件是4维"流"密度 J 具有守恒性质

$$J^{\tilde{a}}{}_{,\tilde{a}} = 0 \tag{2.23}$$

推论 2 在场量 Ψ^A 为泛函 (2.1) 的极值点同时只存在时空变换群而无规范变换群时，该时空变换群成为对称群的充要条件是

$$\left[B^{\tilde{a}}_{\tilde{b}}\delta\tilde{z}^{\tilde{b}} - S^{\tilde{a}\tilde{b}}_A\Psi^A_{\tilde{c}}(\delta z^{\tilde{c}})_{,\tilde{b}}\right]_{,\tilde{a}} = 0 \tag{2.24}$$

这就是由时空变换群所支持的各种守恒律的统一形式，在非线性弹性静、动力学中有相当广泛的应用[34,35]. 这里包括时间平移群支持的能量守恒律，空间平移群和转动群支持的动量和角动量守恒律，物质坐标平移群和转动群支持的物质动量和角动量守恒律，由此得到能量

动量张量的守恒性质及对称性质.

推论 3 在无穷小有限群 G_r 作用下，当 ϵ^k 参量为常数时作用量泛函（2.1）保持不变的充要条件是

$$\left(\mathrm{I}_k\Psi^A-\xi_k^{\tilde{a}}\Psi^A_{\tilde{a}}\right)\delta L/\delta\Psi^A=J^{\tilde{a}}_{k,\tilde{a}} \tag{2.25}$$

其中 $\xi_k^{\tilde{a}}=\partial\Delta z^{\tilde{a}}/\partial\epsilon^k\Big|_{\epsilon=0}$，且

$$\begin{aligned}J^{\tilde{a}}_k=&-L\xi_k^{\tilde{a}}+\left(S^{\tilde{a}\tilde{b}}_{A,\tilde{b}}-S^{\tilde{a}}_A\right)\left(\mathrm{I}_k\Psi^A-\xi_k^{\tilde{a}}\Psi^A_{\tilde{a}}\right)\\&-S^{\tilde{a}\tilde{b}}_A\left(\mathrm{I}_k\Psi^A_{\tilde{b}}-\xi_k^{\tilde{c}}\Psi^A_{\tilde{c}\tilde{b}}\right)\end{aligned} \tag{2.26}$$

这个推理又称第一 Noether 定理．当 L 中不出现场量的二阶导数时，（2.26）可以简化．再当场量 Ψ^A 是极值点时，方程（2.19）化为

$$J^{\tilde{a}}_{k,\tilde{a}}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,r) \tag{2.27}$$

这就是熟知的 4 维形式的能动张量守恒定律．Konoplcva 和 Popov 指出[2]还可将这一方程推广到更一般的形式.

这样，根据不同的时空变换群和规范群，只要它们是对称群，就可以得到不同形式的守恒律．例如，当无穷小无限群 $G_{r,\infty}$ 成为对称群时，也可以得到相应的守恒律．守恒律的具体形式和变换群的性质分不开，这正是 Lagrange 场论和粒子物理的一个基本出发点.

2.4 关于 Noether 反定理和 Lagrange 函数构造的一点说明

在上述 Noether 定理研究 Lagrange 场 Ψ^A 的守恒律时，一般必须给出 Lagrange 密度函数的形式和相应的变换关系，这样才能去判别这样给出的变换群是否为对称群．但有两个关键问题没有回答：第一，在场量 Ψ^A 的拉氏量给定后，如何去寻找相应的无穷小对称群？第二，能否在给出一定形式的无穷小时空变换群和规范变换群的条件下构造一个拉氏函数使它们变成对称群？换言之，Lagrange 函数能否由场量 Ψ^A 及其对称群完全决定？这就是 Noether 反定理要研究的问题．该问题是缺陷规范场理论的核心．在下面几节，我们将分别加以讨论.

3 线性缺陷场的 Abel 规范变换

3.1 缺陷规范场理论的产生

我国学者欧发，Lasota[6] 等人首先将线性位错场和电磁场相比较，并从电磁场存在Abel规范变换引出位错场也存在 Abel 规范变换的结论．这些经典工作促进了缺陷规范场理论的迅速发展．事实上，经典电磁场的 Maxwell 方程可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0, &&\nabla\cdot\mathbf{H}=0\\&\nabla\times\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, &&\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho_e\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

其中 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别表示电场和磁场，ρ_e 和 $\mathbf{j}$ 表示电荷密度和电流密度，c 是真空光速．另一方面在线性位错连续统（无旋错）时，按照本文第 I 部分的推导，场的基本方程是

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}+\nabla\times\mathbf{J}=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$$
$$\mathbf{J}=\dot{\boldsymbol{\beta}}-\nabla\otimes\mathbf{v}\qquad \boldsymbol{\alpha}=-\nabla\times\boldsymbol{\beta}\tag{3.2}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathbf{J}$ 是位错密度和位错流密度. $\boldsymbol{\beta}$ 是畸变张量，$\mathbf{v}$ 是不协调宏观“速度”场满足平衡方程

$$\rho\dot{\mathbf{v}}-\nabla\cdot(\mathbf{C}:\boldsymbol{\beta})=0\tag{3.3}$$

这里 ρ 是质量密度，而 $\mathbf{C}$ 是 4 阶弹性常数.

比较（3.1）和（3.2）可看出，电磁场中的物理量 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 相当于位错密度张量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和位错流张量 $\mathbf{J}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathbf{J}$ 可以看成是使 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathbf{v}$ 变成不协调的源. 另一方面，我们知道，$\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 可以用一个标量势 ϕ 和一个矢量势 $\mathbf{A}$ 来表示：

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi-(1/c)\dot{\mathbf{A}},\quad \mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}\tag{3.4}$$

如果将 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 变换到 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}$，但使其对应的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 不变，则 Maxwell 方程（3.1）仍然不变. 具体地有如下的 Abel 规范变换：

$$\tilde{\phi}=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\quad \tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}+\nabla f\tag{3.5}$$

其中 f 是一任意标量函数. 将（3.5）代入（3.4）就可以看出电磁场 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 是保持不变的. 我们用下列 Lorentz 规范条件来选择电磁势 ϕ 和 $\mathbf{A}$：

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{A}=0\tag{3.6}$$

将（3.5）代入（3.6）有

$$\Box f=\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f=0\tag{3.7}$$

则电磁势方程简化为

$$\Box\mathbf{A}=-(4\pi/c)\mathbf{J},\quad \Box\phi=-4\pi\rho\tag{3.8}$$

其中 $\Box$ 表示 4 维 Laplace 算子.

相应地，我们研究 $(3.2)_3$—$(3.2)_4$，将畸变张量 β 和速度 v 作如下 Abel 规范变换：

$$\tilde{\mathbf{v}}=\mathbf{v}+\dot{\mathbf{f}},\quad \tilde{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}+\nabla\otimes\mathbf{f}\tag{3.9}$$

可使位错密度 $\boldsymbol{\alpha}$ 和位错流密度 $\mathbf{J}$ 保持不变. 其中 $\mathbf{f}$ 是任意矢量函数.

在 Abel 规范变换（3.9）下，平衡方程（3.3）成为对 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\mathbf{v}$ 的 Lorentz 规范条件，与（3.7）相对应，$\mathbf{f}$ 必须满足下列条件：

$$\rho\ddot{\mathbf{f}}-\nabla\cdot(\mathbf{C}:\nabla\otimes\mathbf{f})=0\tag{3.10}$$

或简记为

$$\hat{\Box}\mathbf{f}=0\tag{3.11}$$

其中 $\hat{\Box}=\rho(\partial^2/\partial t^2)-\nabla\cdot(\mathbf{C}:\nabla\otimes)$ 为一 4 维线性算子. 这样，对应于方程 $(3.2)_{1,2}$，有

$$\hat{\Box}\mathbf{v}=-\tilde{\mathbf{b}},\quad \hat{\Box}\boldsymbol{\beta}=-\mathbf{J}^*\tag{3.12}$$

其中 $\tilde{\mathbf{b}}$ 和 $\mathbf{J}^*$ 由 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathbf{J}$ 决定：

$$\tilde{\mathbf{b}}=-\mathbf{C}:\nabla\otimes\mathbf{J},\quad \mathbf{J}^*=\nabla\times(\mathbf{C}:\boldsymbol{\alpha})-\rho\dot{\mathbf{J}}\tag{3.13}$$

它们与电磁场中的电流和电荷密度相当.

从以上推导和比较看出，位错场与电磁场的相似性十分明显，尤其是它们的规范性质. 由此可得到结论：电磁理论可由规范场来解释，那么位错场或缺陷场当然也有其规范理论. 顺便提一句：电磁场方程和广义相对论有密切关系，因此缺陷规范场及其几何理论和广义相对论方法必然存在自然的联系[36,37].

3.2 一般线性缺陷场的45重Abel规范群

基于Losata的上述思想，Edelen[8]作了更一般的推广，证明了在计及旋错条件下，存在45重Abel规范变换群，其中考虑了使得缺陷场方程保持不变的对所有场量（包括缺陷源）的所谓第二类Abel规范变换. 通过施加规范条件使得缺陷场的可测量——Burgers矢量和Frank矢量保持不变. 现简述如下. 在本文的第Ⅰ部分，我们已经得到了在线性条件下缺陷场的基本方程（见该文（4.11），（4.12）和（4.15）），用外微分形式可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\partial_4\alpha^a+\bar{d}J^a=-S^a,\ \bar{d}\alpha^a=Q^a\\&\partial_4Q^a+\bar{d}S^a=0,\ \bar{d}Q^a=0\end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

其中$\bar{d}$是3维外微分算子，对参考构形坐标$\{x^\mu,\mu=1,2,3\}$而言，（3.14）中的符号分别表示

$$\alpha^a=\alpha^{\mu a}\omega_\mu=\text{位错密度 2 形},\ J^a=J^a_\mu dx^\mu=\text{位错流 1 形}$$
$$S^a=S^{\mu a}\omega_\mu=\text{旋错流 2 形},\ Q^a=q^a\omega=\text{旋错密度 3 形}$$

通过对外微分的运算，可以引进下列非源场量

$$\beta^a=\beta^a_\mu dx^\mu=\text{畸变 1 形},\ v^a=\text{畸变速度 0 形}$$
$$\kappa^a=\kappa^{\mu a}\omega_\mu=\text{弯扭 2 形},\ \omega^a=\omega^a_\mu dx^\mu=\text{旋转 1 形}$$

使得下列势方程成立：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{d}\beta^a+\kappa^a=\alpha^a,\ \partial_4\beta^a-dv^a+\omega^a=-J^a\\&\bar{d}\kappa^a=Q^a,\ \partial_4\kappa^a-\bar{d}\omega^a=-S^a\end{aligned}\right\}\tag{3.15}$$

这可以看成是（3.14）的首次积分. 该方程在形式上和本文第Ⅰ部分[1]的方程（2.19）相当，而（3.14）和该文的方程（2.20）相当. 此外，我们还有宏观动量守恒方程

$$\partial_4p_a=\bar{d}\sigma_a\tag{3.16}$$

其中

$$\sigma_a=\sigma^\mu_a\omega_\mu=\text{P-K应力 2 形},\ p_a=p_a\omega=\text{动量 3 形}$$

如果引进4维场量

$$D^a=\alpha^a+J^a\wedge dt=\text{位错 2 形},\ \Omega^a=Q^aS^a\wedge dt=\text{旋错 3 形}$$
$$B^a=\beta^a+v^a\wedge dt=\text{畸变-速度 1 形},\ K^a=\kappa^a-\omega^a\wedge dt=\text{扭-旋 2 形}$$

则（3.14），（3.15）可以更简洁地写成

$$\left.\begin{aligned}&dD^a=\Omega^a,\qquad dΩ^a=0\\&dB^a+K^a=D^a,\quad dK^a=\Omega^a\end{aligned}\right\}\tag{3.17}$$

这里的d是4维外微分运算，$d\equiv dx^{\tilde\mu}\wedge\partial_{\tilde\mu}=dx^\mu\wedge\partial_\mu+dt\wedge\partial_t$. 对微观量$D^a,\Omega^a,B^a$和$K^a$，存在如下Abel规范变换：

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{D}^a=D^a-\varphi^a-dF^a,\ \widetilde{\Omega}^a=\Omega^a-d\varphi^a\\ \widetilde{B}^a=B^a-dh^a-F^a+G^a,\ \widetilde{K}^a=K^a-\varphi^a+dG^a\end{aligned}\right\}\tag{3.18}$$

使得基本方程（3.17）保持不变．其中

$$2\text{形}\ \varphi^a=\varphi^a_\mu dx^\mu\wedge dt+\varphi^{\mu a}\omega_\mu,\quad 1\text{形}\ F^a=f^a dt+F^a_\mu dx^\mu$$
$$1\text{形}\ G^a=g^a dt+G^a_\mu dx^\mu,\qquad 0\text{形}\ h^a$$

是任意函数，共有45个分量．这就说明在有旋错条件下，共有45重Abel规范群．在该变换下，4维位错密度和旋错密度保持不变，从而Burgers矢量场和Frank矢量场也保持不变．

Edelen[38]通过方程（3.17）与电磁场方程相比较，认为一般线性缺陷连续统理论与具有磁荷和磁流的电磁理论相似，位错场相当于电荷和电流，而旋错场相当于磁荷和磁流．

4 线性缺陷规范场理论的进一步发展

4.1 规范场方法和缺陷动力学方程组的建立

上面推导的基本方程（3.16）和（3.17），当缺陷源 D^a 和 Ω^a 给定时，在线弹性本构关系假设下可以得到畸变场或应力场，这正如本文第I部分2.6节讨论过的那样．但是，实际上缺陷源的分布和运动不能预先给定，它们和弹性场的运动是相互作用，耦合在一起的．为了求解这一耦合过程，还必须知道缺陷本身服从什么样的运动方程．

为此目的有几种途径可供选择．一是可将缺陷场 D^a 和 Ω^a 看成内变量，这样利用含内变量的本构理论给出应力-弹性应变的本构关系，尔后用经验的唯象方法构造内变量的演化方程且满足缺陷场的连续性方程（3.14）．但这样的理论体系并不漂亮．二是将缺陷场 D^a 和 Ω^a 看成和弹性场耦合在一起的Lagrange场并构造该场的作用量，用最小作用量原理获得所必需的缺陷动力学方程，而规范场方法恰恰是构造所需要的Lagrange函数的有力武器．这是一个优美的理论结构，能否从它得到令人满意的缺陷运动规律确是很诱人的，从而值得进一步研究．

另一方面，从缺陷连续统的发展来看，早期的理论集中在变形几何学方面，我们已经证明 D^a 和 Ω^a 就是4维非欧物质流形上的挠率和曲率．由此看来，规范场也可以从纯几何的角度来研究，它与4维时空的流形上的纤维丛结构有密切关系，可以说缺陷场的发展是几何理论的自然延拓．80年代以来，用几何化的方法来研究规范场及其与基态场的相互作用已有了大量著作，文献[2,3]中作了较详细说明，可参阅．

在用规范场方法构造缺陷动力学方程的研究中，Kadic和Edelen的工作[9]是比较系统的．下面将重点阐述这一理论．为了作准备，对Yang-Mills的理论作一概述．

4.2 规范场理论的一般Yang-Mills表达

考虑一个在4维时空流形 $E_4\{x^{\tilde\mu},\tilde\mu=1,2,3,4\}$ 中的运动系统，其状态可由 N 个场 $\Psi=\{\Psi^a,a=1,2,\cdots,N\}$ 确定．为方便将其表示成矩阵形式

$$\Psi=\{\Psi^1,\Psi^2,\cdots,\Psi^N\}^T\tag{4.1}$$

T 表示矩阵转置，设该系统有拉氏量及相应的作用量分别为

$$\mathbf{L}_0=\mathbf{L}_0(x^{\tilde{\mu}},\psi,\psi_{\tilde{\mu}}) \tag{4.2}$$

$$\mathbf{I}=\int_{E_4}\mathbf{L}_0(x^{\tilde{\mu}},\psi,\psi_{\tilde{\mu}})d^4x \tag{4.3}$$

其中 $\Psi_{\tilde{\mu}}\equiv\partial\Psi/\partial x^{\tilde{\mu}}$. 再设该系统的对称群 G_0 是具有 r 个参数的李群，生成元为$\{\mathbf{I}_k,\ k=1,2,\cdots,r\}$，$\mathbf{I}_k$一般是 $N\times N$ 矩阵．由李群理论可知

$$\mathbf{A}=\exp(\epsilon^k I_k),\ \forall\mathbf{A}\in G_0 \tag{4.4}$$

其中 ϵ^k 是 r 个实参数．如 ϵ^k 是无穷小参数，则有

$$\mathbf{A}=\mathbf{I}_0+\epsilon^k\mathbf{I}_k \tag{4.5}$$

$\mathbf{I}_0$是单位变换．所有$\mathbf{I}_k$构成一个 r 维李代数，其基本运算是如下对易关系：

$$[\mathbf{I}_k,\mathbf{I}_l]\equiv\mathbf{I}_k\mathbf{I}_l-\mathbf{I}_l\mathbf{I}_k=\mathrm{C}^m_{kl}\mathbf{I}_m\equiv\mathbf{S}_{kl} \tag{4.6}$$

C^m_{kl} 是李群 G_0 的结构常数，当其为零时，G_0 是可交换的 Abel 群，反之 G_0 是非 Abel 群．定义 G_0 的 Cartan-Killing 度量是

$$\eta_{ij}=(1/2)\mathrm{C}^k_{il}\mathrm{C}^l_{jk}\qquad(i,j,k,l=1,2,\cdots,N) \tag{4.7}$$

它可用来作有关量的群空间指标$i,j,\cdots$的升降运算．在 G_0 作用下场量及其导数变换显然为

$$\widetilde{\Psi}=\mathbf{A}\Psi,\quad\widetilde{\Psi}_{\tilde{\mu}}=\mathbf{A}\Psi_{\tilde{\mu}},\ \partial_{\tilde{\mu}}\mathbf{A}=0,\ \forall\mathbf{A}\in G_0 \tag{4.8}$$

由于 G_0 是系统的对称群，故有

$$L_0(x^{\tilde{\mu}},\widetilde{\Psi},\partial_{\tilde{\mu}}\widetilde{\Psi})=L_0(x^{\tilde{\mu}},\mathbf{A}\Psi,\mathbf{A}\Psi_{\tilde{\mu}})=L_0(x^{\tilde{\mu}},\Psi,\Psi_{\tilde{\mu}}) \tag{4.9}$$

这样，由第 2 节讨论的 Noether 定理可推导相应的守恒律．

规范场论的关键思想是考虑系统在与整体对称群 G_0 所对应的局部对称群，以此引进新的场量——规范场来构造相应的拉氏函数．正如第 1 节所说 Yang-Mills 的工作是里程碑性的，他们在研究具有同位旋对称性的基本粒子相互作用时，成功地得到了非 Abel 群下规范场的一般形式．他们的方法有两个基本要点，一是最小替换，即在拉氏量中用规范协变导数代替普通导数；二是最小耦合，以此构造规范场自身的拉氏函数，并使其耦合到基态场上去．

Yang-Mills **最小替换原理**　在局部变换群G的作用下，场量及其导数变为

$$\widetilde{\Psi}=\mathbf{A}(\tilde{x})\Psi,\quad\partial_{\tilde{\mu}}\widetilde{\Psi}=\mathbf{A}(\tilde{x})\partial_{\tilde{\mu}}\Psi+(\partial_{\tilde{\mu}}\mathbf{A})\Psi\quad\forall\mathbf{A}\in G \tag{4.10}$$

从而，(4.9) 不再满足．为了保证在上述局部规范群下，拉氏量保持不变，可以引进一协变导数代替普通偏导数：

$$D_{\tilde{\mu}}\Psi=\partial_{\tilde{\mu}}\Psi+\Gamma_{\tilde{\mu}}\Psi \tag{4.11}$$

其中 $\Gamma_{\tilde{\mu}}$是一个 $N\times N$ 的矩阵，称为规范联络．它在G下具有如下变换形式：

$$\widetilde{\Gamma}_{\tilde{\mu}}=\mathbf{A}\Gamma_{\tilde{\mu}}\mathbf{A}^{-1}-(\partial_{\tilde{\mu}}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\qquad\forall\mathbf{A}\in G \tag{4.12}$$

利用 (4.10) — (4.12) 很容易证明

$$\widetilde{D}_{\tilde{\mu}}\widetilde{\Psi}:=\partial_{\tilde{\mu}}\widetilde{\Psi}+\widetilde{\Gamma}_{\tilde{\mu}}\widetilde{\Psi}=\mathbf{A}D_{\tilde{\mu}}\Psi \tag{4.13}$$

这样，如果将拉氏函数中的普通导数改成由（4.11）定义的协变导数，即

$$L_0 = L_0(x^{\tilde{\mu}}, \Psi, D_{\tilde{\mu}}\Psi) \tag{4.14}$$

则在局部群G作用下，根据（4.9），我们有

$$L_0(x^{\tilde{\mu}}, \tilde{\Psi}, \tilde{D}_{\tilde{\mu}}\Psi) = L_0(x^{\tilde{\mu}}, \Psi, D_{\tilde{\mu}}\Psi) \tag{4.15}$$

这就是Y-M最小替换原理，在其中，我们引进了新的场量——规范联络$\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mu}}$.

Yang-Mills **最小耦合原理**　如将规范联络$\Gamma_{\tilde{\mu}}$按李代数基I_k展开

$$\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mu}} = \Gamma^k_{\tilde{\mu}} \mathbf{I}_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, N) \tag{4.16}$$

我们称这里的展开系数$\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$为规范场.

我们自然会问：规范场$\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$有什么物理意义，它和基态场Ψ的关系如何？规范场自己的运动规律是什么，如何构造关于$\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$的拉氏量？事实上，规范场是表示系统相互作用的更基本的场，对不同的系统有不同的物理含义. 对缺陷连续统而言，基态场是弹性场而规范场表示缺陷场及其与基态场的相互作用. 另外，我们可利用Y-M最小耦合法则来构造规范场的拉氏量，根据这一法则，总的拉氏量可写成

$$L = L_0(x^{\tilde{\mu}}, \Psi, D_{\tilde{\mu}}\Psi) + s_1 L_1(x^{\tilde{\mu}}, \Gamma^k_{\tilde{\mu}}, \partial_{\tilde{\nu}} \Gamma^k_{\tilde{\mu}}) \tag{4.17}$$

其中s_1是耦合常数而L_1是规范场$\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$自己的拉氏量，它和基态场Ψ是独立的.

Utiyama[14]等解决了拉氏量L_1的构造问题. 由于L_1在群G下也必须保持不变，故有

$$L_1 = L_1\left(F^i_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right) \tag{4.18}$$

换言之，L_1只能依赖于Y-M规范势$F^i_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$：

$$F^i_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \equiv \partial_{\tilde{\mu}} F^i_{\tilde{\nu}} - \partial_{\tilde{\nu}} F^i_{\tilde{\mu}} + C^i_{jk} \Gamma^j_{\tilde{\mu}} \Gamma^k_{\tilde{\nu}} \tag{4.19}$$

其中C^i_{jk}是李群的结构常数，由（4.6）所定义. 在最为简单的情形下，可设

$$L_1 = (1/2) F^i_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} F^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_i = (1/2)\eta_{ij} F^i_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} g^{\tilde{\mu}\tilde{\sigma}} g^{\tilde{\nu}\tilde{\rho}} F^j_{\tilde{\sigma}\tilde{\rho}} \tag{4.20}$$

这就是Y-M场的最小耦合原理的简洁表示. 这里，η_{ij}是SO(3)群的Cartan-Killing度量，$g^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, g^{44})$，$g^{44}$是一调节参数.

4.3　线性弹性场的规范群 SO(3)$\triangleright$T(3)

Kadic 和 Edelen[9]将上述Y-M规范理论用于构造线性弹性场（作为基态）的规范场获得了成功. 我们简要介绍如下. 设$\mathbf{y} = \{y^a, (a = 1, 2, 3)\}$是物质点的瞬时笛卡儿坐标矢，参考坐标是$\{x^{\tilde{\mu}}\}$，$y^a = y^a(x^{\tilde{\mu}})$表示运动，则对均匀弹性场，其拉氏量为

$$L_0 = L_0(y^a_{\tilde{\mu}}) = T - U(C_{\mu\nu}) \tag{4.21}$$

不计及外力场，其中T是动能，U是应变能，而$C_{\mu\nu}$是Cauchy应变张量，即

$$T = (\rho/2)\partial_4 y^a \delta_{ab} \partial_4 y^b = (\rho/2)\partial_4 \mathbf{y}^T \partial_4 \mathbf{y} \tag{4.22}$$

$$C_{\mu\nu}=\delta_{ab}\partial_\mu y^a\partial_\nu y^b=\partial_\mu \mathbf{y}^T\partial_\nu \mathbf{y} \tag{4.23}$$

设 $\mathbf{y}=\{y^1,y^2,y^3\}^T$，$T$表示转置.

大家知道，在经典弹性力学中，根据客观性原理，在整体规范变换下

$$\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{y}+\mathbf{b}(t),\qquad \mathbf{A}(t)\in SO(3)_0,\ b\in T(3)_0 \tag{4.24}$$

拉氏量保持不变. 这里 **A** 和 **b** 可以是时间依赖的.

由于存在空间平移群，我们把（4.24）表示的变换群称为 $SO(3)_0$和 $T(3)_0$的半直积 $SO(3)_0 \triangleright T(3)_0$。

按规范场的程序，下面我们将整体变换（4.24）局部化，即

$$\tilde{\mathbf{y}}=\mathbf{A}(x^{\tilde{\mu}})\mathbf{y}+\mathbf{b}(x^{\tilde{\mu}}),\qquad \mathbf{A}(x)\in SO(3),\ \mathbf{b}(x)\in T(3) \tag{4.25}$$

A和 **b** 是时空 $x=\{x^{\tilde{\mu}},\tilde{\mu}=1,2,3,4\}$的函数. 显然，由(4.25)表示的局部群是 $SO(3)\triangleright T(3)$. 在该群的作用下，拉氏函数（4.21）不再保持不变. 为了使上述 $SO(3)\triangleright T(3)$ 变成对称群，按 Y-M 最小替换原理，必须将 L_0 中的普通导数变换成某种协变导数. Kadic 和 Edelen 证明规范导数的形式应为

$$D^*_{\tilde{\mu}}\mathbf{y}=\partial_{\tilde{\mu}}\mathbf{y}+\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mu}}\mathbf{y}+\mathbf{\Phi}_{\tilde{\mu}}\equiv D_{\tilde{\mu}}\mathbf{y}+\mathbf{\Phi}_{\tilde{\mu}} \tag{4.26}$$

其中

$$\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mu}}=\Gamma^k_{\tilde{\mu}}\mathbf{l}_k,\quad \mathbf{\Phi}_{\tilde{\mu}}=\Phi^a_{\tilde{\mu}}\mathbf{t}_a\qquad (k,a=1,2,3) \tag{4.27}$$

分别是对应于 SO(3)群和 T(3)群的规范联络，具有 24 个分量 $\Gamma^i_{\tilde{\mu}}$和 $\Phi^a_{\tilde{\mu}}$. 在（4.27）中，$\mathbf{t}_a=(\delta_{a1},\delta_{a2},\delta_{a3})^T$是 T（3）群的生成元矩阵. 同时，为了保证由（4.26）定义的导数的协变性质，规范联络的变换式必须是

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{\tilde{\mu}}=\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mu}}\mathbf{A}^{-1}-(\partial_{\tilde{\mu}}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1},\qquad \tilde{\mathbf{\Phi}}_{\tilde{\mu}}=\mathbf{A}\mathbf{\Phi}_{\tilde{\mu}}-\partial_{\tilde{\mu}}\mathbf{b}-\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{\tilde{\mu}}\mathbf{b} \tag{4.28}$$

这样，在此理论框架下，缺陷连续统共有 27 个基本场量y^a，$\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$，$\Phi^k_{\tilde{\mu}}$（$a,k=1,2,3,\tilde{\mu}=1,2,3,4$），它们与缺陷密度的关系及用规范场中最小替换和最小耦合原理构造完整的动力学方程组成了缺陷规范场的基本内容. 首先，在把 $\mathbf{\Gamma}_{\tilde{\mu}}$和 $\mathbf{\Phi}_{\tilde{\mu}}$作为规范场的基本变量后，Kadic 和 Edelen 利用外微分系统理论和线性同伦算子理论，以及 Y-M 最小替换和耦合原理，求得了（3.17）中定义的缺陷场和规范场的关系，它们是

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{D}=\mathbf{\Theta}\mathbf{y}+d\mathbf{\Phi}+\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{\Phi},\quad \mathbf{\Omega}=d(\mathbf{\Theta}\mathbf{y}+\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{\Phi})\\&\mathbf{B}=d\mathbf{y}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{y}+\mathbf{\Phi},\quad \mathbf{K}=\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{B}\end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

这是弹性缺陷规范场的基本关系之一. 其中 **Θ** 表示 2 形曲率张量，定义为

$$\mathbf{\Theta}=d\mathbf{\Gamma}+\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{\Gamma} \tag{4.30}$$

这里 d 是 4 维外微分算子：$d\equiv dx^{\tilde{\mu}}\wedge\partial_{\tilde{\mu}}$. 由方程组（4.29），我们不难推导出

$$\left.\begin{aligned}&d\mathbf{\Gamma}=\mathbf{\Theta}-\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{\Gamma},\qquad d\mathbf{\Theta}=\mathbf{\Theta}\wedge\mathbf{\Gamma}-\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{\Theta}\\&d\mathbf{B}=\mathbf{D}-\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{B},\qquad d\mathbf{D}=\mathbf{\Theta}\wedge\mathbf{B}-\mathbf{\Gamma}\wedge\mathbf{D}\end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

这就是缺陷场的 Cartan 结构方程. 从（4.31）可知，给定规范联络 **Γ** 和畸变张量 **B** 后，可唯一确定缺陷密度**D** 和 **Θ**. 从物理上可想象，连续统的整体平移群的变化对应于位错而旋转

对称性的变化对应于旋错．因此，如果不考虑旋转群SO(3)，即令 $\Gamma=0$，则从（4.29）可得无旋错时的位错场表达式

$$\mathbf{D}=d\mathbf{\Phi},\quad \mathbf{B}=d\mathbf{y}+\mathbf{\Phi},\quad \mathbf{\Omega}=\mathbf{K}=0 \tag{4.32}$$

分量形式是

$$\left.\begin{aligned} &B^a_\mu=\partial_\mu y^a+\Phi^a_\mu, && \nu^a=\partial_4 y^a+\Phi^a_4 \\ &\alpha^{\mu a}=\varepsilon^{\mu\nu\sigma}(\partial_\nu\Phi^a_\sigma-\partial_\sigma\Phi^a_\nu), && J^a_\mu=\partial_\mu\Phi^a_4-\partial_4\Phi^a_\mu \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

这时的基本场量共15个：y^a和$\Phi^a_{\tilde\mu}(a=1,2,3,\ \tilde\mu=1,2,3,4)$，计算起来，比较简洁．

从缺陷场的Cartan结构方程来看，如果给定规范联络 Γ 和畸变张量 $\mathbf{B}$，缺陷密度 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{\Theta}$ 可唯一被确定．但反过来，缺陷场 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{\Theta}$ 给定后，并不能立刻求得 Γ 和 $\mathbf{B}$，这需要建立相应的缺陷场的动力学方程．下面将讨论这一问题．

4.4 弹性缺陷场的 Lagrange 函数和动力学方程

把线性各向同性弹性场作为基态场，则其拉氏函数为

$$L_0(y^a_{\tilde\mu})=T-U=\frac{\rho}{2}\partial_4 y^a\delta_{ab}\partial_4 y^b-\frac{1}{8}[\lambda(e_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu})^2+2\mu e_{\mu\nu}e^{\mu\nu}] \tag{4.34}$$

其中 $$e_{\mu\nu}=(1/2)(C_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu})=(1/2)[\partial_\mu y^a\delta_{ab}\partial_\nu y^b-\delta_{\mu\nu}]$$
是Green应变张量．λ和μ是Lamé系数．这样，在规范群SO(3)$\triangleright$T(3)下，由最小替换

$$\partial_{\tilde\mu}y^a\rightarrow D^*_{\tilde\mu}y^a\equiv B^a_{\tilde\mu}=\partial_{\tilde\mu}y^a+\Gamma^k_{\tilde\mu}(I_k)^a{}_b y^b+\Phi^a_{\tilde\mu} \tag{4.35}$$

的具有规范不变性的新的 L_0 为

$$L_0=L_0(B^a_{\tilde\mu})=\frac{\rho}{2}B^a_4B^a_4-\frac{1}{8}[\lambda(E_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu})^2+2\mu E_{\mu\nu}\delta^{\mu\sigma}\delta^{\nu\rho}E_{\sigma\rho}] \tag{4.36}$$

其中

$$E_{\mu\nu}=\delta_{ab}B^a_\mu B^b_\mu-\delta_{\mu\nu} \tag{4.37}$$

在（4.36）中，通过畸变1形张量 $B^a_{\tilde\mu}$引进了缺陷场$\Phi^a_{\tilde\mu}$，$\Gamma^k_{\tilde\mu}$与宏观弹性场$y^a_{\tilde\mu}$的相互作用．

此外，通过最小耦合原理可构造出规范场$\Phi^a_{\tilde\mu}$和$\Gamma^k_{\tilde\mu}$的各自独立的拉氏量为

$$L_1=L_1(\Phi^a_{\tilde\mu},\partial_{\tilde\mu}\Phi^a_{\tilde\nu}),\quad L_2=L_2(\Gamma^k_{\tilde\mu},\partial_{\tilde\mu}\Gamma^k_{\tilde\nu}) \tag{4.38}$$

根据（4.19），（4.20），我们可具体地取

$$L_1=(1/2)\delta_{ab}D^a_{\tilde\mu\tilde\nu}K^{\tilde\mu\tilde\sigma}K^{\tilde\nu\tilde\rho}D^b_{\tilde\sigma\tilde\rho} \tag{3.39}$$

$$L_2=(1/2)\eta_{ij}F^i_{\tilde\mu\tilde\nu}g^{\tilde\mu\tilde\sigma}g^{\tilde\nu\tilde\rho}F^i_{\tilde\sigma\tilde\rho} \tag{4.40}$$

其中$D^a_{\tilde\mu\tilde\nu}$是位错密度 $\mathbf{D}$ 的分量而$F^i_{\tilde\mu\tilde\nu}$是旋错 $\mathbf{\Theta}$ 的分量．η_{ij}是Cartan-Killing度量系数，而

$$\left.\begin{aligned} &F^i_{\tilde\mu\tilde\nu}=\partial_{\tilde\mu}\Gamma^i_{\tilde\nu}-\partial_{\tilde\nu}\Gamma^i_{\tilde\mu}+C^i_{jk}\Gamma^j_{\tilde\mu}\Gamma^k_{\tilde\nu} \\ &D^a_{\tilde\mu\tilde\nu}=\partial_{\tilde\mu}\Phi^a_{\tilde\nu}-\partial_{\tilde\nu}\Phi^a_{\tilde\mu}+(I_k)^a{}_b(\Gamma^k_{\tilde\mu}\Phi^b_{\tilde\nu}-\Gamma^k_{\tilde\nu}\Phi^b_{\tilde\mu}+F^k_{\tilde\mu\tilde\nu}y^b) \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

在（4.39），（4.40）中，我们引进了两个4维度量

$$\{g^{\tilde\mu\tilde\sigma}\}=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,g^{44}),\quad K^{\tilde\mu\tilde\nu}=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,K^{44}) \tag{4.42}$$

这里有两个待定常数 g^{44} 和 K^{44}，并不象相对论中代表光速，而是称为“传播参数”.

这样，弹性缺陷场的总的拉氏量由（4.36），（4.39）和（4.40）组成：

$$L=L_0-s_1L_1-s_2L_2 \tag{4.43}$$

这样，全部理论有四个可调参数：s_1 和 s_2 是最小耦合系数，而 g^{44} 和 K^{44} 是两个“传播参数”.

在得到缺陷场的总的拉氏量（4.43）后，由最小作用量原理（2.4）可得到相应的Euler-Lagrange 方程. 如略去具体推导过程，可写出：

对 y^a 的变分得到

$$\partial_4 p_a-\partial_\mu \sigma^\mu_a=(I_k)^b_a(\Gamma^k_4 p_b-\Gamma^k_\mu\sigma^\mu_b+F^k_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_b) \tag{4.44}$$

对 $\Phi^a_{\tilde{\mu}}$ 的变分得到两组方程

$$\partial_{\tilde{\mu}}R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_a-(I_k)^b_a\Gamma^k_{\tilde{\mu}}R^{\tilde{\mu}\nu}_b=\frac{1}{2}\sigma^\nu_a,\quad \partial_\mu R^{\mu 4}_a-(I_k)^b_a\Gamma^k_\mu R^{\mu 4}_b=\frac{1}{2}p_a \tag{4.45}$$

对 $\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$ 的变分得到

$$\partial_{\tilde{\mu}}G^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_k-C^m_{jk}\Gamma^j_{\tilde{\mu}}G^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_m=(I_k)^a_b R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_a B^b_{\tilde{\mu}} \tag{4.46}$$

其中，引进了二阶和三阶广义应力场

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^\mu_a\equiv-\partial L/\partial B^a_{\tilde{\mu}},\qquad p_a=-\partial L/\partial B^a_4\\&R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_a\equiv\partial L/\partial D^a_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}},\qquad G^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_k=\partial L/\partial F^k_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

实质上，这就是缺陷场的本构方程. 将（4.43）代入（4.47），可得到具体的表达式，详见 Kadic 和 Edelen[9]，Edelen 和 Lagoudas[10] 的推导.

值得指出，方程组（4.44）—（4.46）是一组完备的方程组，共 27 个，决定 27 个独立的场量 y^a，$\Phi^a_{\tilde{\mu}}$ 和 $\Gamma^k_{\tilde{\mu}}$. 同时，根据第 2 节的 Noether 定理，可以对 SO(3) 和 T(3) 群，分别构造出相应的 4 维流密度 $J^{\tilde{\mu}}$ 的守恒律.

在无旋错只有位错的情形下，方程组（4.44）—（4.47）简化成

$$\left.\begin{aligned}&\partial_4 p_a-\partial_\mu\sigma^\mu_a=0\\&s_1\delta_{ba}\delta^{\nu\rho}[\partial^\mu(\partial_\mu\Phi^a_\rho-\partial_\rho\Phi^a_\mu)-K^{44}\partial_4(\partial_4\Phi^a_\rho-\partial_\rho\Phi^a_4)]=(1/2)\sigma^\nu_b\\&s_1K^{44}\delta_{ab}\partial^\mu(\partial_\mu\Phi^a_4-\partial_4\Phi^a_\mu)=(1/2)p_b\end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

而广义动量和应力可写成

$$\left.\begin{aligned}&p_a=\rho_0\delta_{ab}(\partial_4 y^b+\Phi^b_4)\\&\sigma^\mu_a=(\lambda/2)\delta^\mu_\nu\delta_{ab}(\partial_\sigma y^b+\Phi^b_\sigma)(\delta^{\nu\sigma}\delta^{\lambda\rho}E_{\lambda\rho}+(2\mu/\lambda)\delta^{\zeta\nu}\delta^{\pi\sigma}E_{\zeta\pi})\\&E_{\mu\nu}=(\partial_\mu y^a+\Phi^a_\mu)\delta_{ab}(\partial_\nu y^b+\Phi^b_\nu)-\delta_{\mu\nu}\end{aligned}\right\} \tag{4.49}$$

方程组（4.48）有 15 个方程而有 15 个独立的未知量 y^a 和 $\Phi^a_{\tilde{\mu}}$，而本构关系（4.49）$_{1,2}$ 是线弹性基态本构关系的直接推广，即将 $\partial_{\tilde{\mu}}y^a$ 换成 $\partial_{\tilde{\mu}}y^a+\Phi^a_{\tilde{\mu}}$ 的最小替换.

4.5 场方程线性化近似

用缺陷规范场理论推导的基本方程（4.44）—（4.47）是一组非线性偏微分方程，在某些

情形下可以进行线性化近似．首先，由（4.26）给出的规范导数中，我们对补偿场 $\Gamma_{\tilde{\mu}}$ 和 $\Phi_{\tilde{\mu}}$ 作为 SO(3) 群和 T(3) 群没有加以任何限制．如假定 $\Gamma_{\tilde{\mu}}$ 和 $\Phi_{\tilde{\mu}}$ 是无穷小变换群的元素，可将变换（4.26）改写成

$$B_{\tilde{\mu}}^{a}=D_{\tilde{\mu}}^{*}y^{a}=\partial_{\tilde{\mu}}y^{a}+\epsilon\,\Gamma_{\tilde{\mu}}^{k}(I_{k})^{a}{}_{b}y^{b}+\epsilon\,\Phi_{\tilde{\mu}}^{a} \tag{4.50}$$

其中 ϵ 是确定位错和旋错的小参数．群的结构常数 C_{mn}^{k} 和 Cartan-Killing 度量也需作变换

$$C_{mn}^{k}\to\epsilon C_{mn}^{k},\quad \eta_{kl}\to\epsilon^{2}\eta_{kl},\quad \eta^{kl}\to\eta^{kl}/\epsilon^{2} \tag{4.51}$$

这样，我们把基本场量 y^{a}（用 u^{a} 代替），$\Phi_{\tilde{\mu}}^{a}$ 和 $\Gamma_{\tilde{\mu}}^{k}$ 作展开：

$$\left.\begin{aligned}
&u^{a}\equiv y^{a}-\delta_{\tilde{\mu}}^{a}x^{\tilde{\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}\underset{(n)}{u^{a}}\epsilon^{n}\\
&\Phi_{\tilde{\mu}}^{a}=\sum_{n=0}^{\infty}\underset{(n)}{\Phi^{a}}{}_{\tilde{\mu}}\,\epsilon^{n},\quad \Gamma_{\tilde{\mu}}^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}\underset{(n)}{\Gamma^{k}}{}_{\tilde{\mu}}\,\epsilon^{n}
\end{aligned}\right\} \tag{4.52}$$

将其代入基本方程（4.44）—（4.47），便可得到关于场量各阶近似的方程．在初始参考构形不存在缺陷的条件下，可得到

$$\underset{(0)}{u^{a}}=\underset{(0)}{\Phi^{a}}{}_{\tilde{\mu}}=\underset{(0)}{\Gamma^{k}}{}_{\tilde{\mu}}=\underset{(1)}{\Gamma^{k}}{}_{\tilde{\mu}}=0$$

故方程（4.50）改写成

$$\begin{aligned}
B_{\tilde{\mu}}^{a}=&\;\delta_{\tilde{\mu}}^{a}+\epsilon\partial_{\tilde{\mu}}\underset{(1)}{u^{a}}+\epsilon^{2}(\partial_{\tilde{\mu}}\underset{(2)}{u^{a}}+\underset{(1)}{\Phi^{a}}{}_{\tilde{\mu}})\\
&+\epsilon^{3}(\partial_{\tilde{\mu}}\underset{(3)}{u^{a}}+\underset{(2)}{\Phi^{a}}{}_{\tilde{\mu}}+(I_{k})^{a}{}_{b}\underset{(2)}{\Gamma^{k}}{}_{\tilde{\mu}}\delta_{\nu}^{b}x^{\nu})+\cdots
\end{aligned} \tag{4.53}$$

计算表明：一阶近似，是弹性基态场的方程；二阶近似，只有平移群 $\underset{(1)}{\Phi^{a}}{}_{\tilde{\mu}}$ 和基态场的耦合而无旋错的影响；在三阶近似下，同时存在位错和旋错的影响，这表明形成旋错的能量要比位错大得多．

值得指出，上述理论框架已经得出了一些和经典位错理论符合的结果．主要研究的是无限域的问题．对有限体的问题，需要得到相应的初、边界条件，这方面的理论并不成熟．另外，由于利用上述方程组来求解的问题还很少，即使对静态刃型和螺型位错的结果，近场解和经典结果一致，但远场解却比经典理论衰减得快．最近，Edelen 和 Logoudas[10,39,40] 用以研究波的色散关系也得到了一些结果．今后也许要给出更多的具体应用以便对上述理论框架作出考验．规范场理论本身还必须完善．下面我们将介绍当 Lorentz 群和规范群同时存在时缺陷规范场理论的一些结果，看一下规范场理论和 4 维非线性几何理论的一致性．

5 非线性弹性规范场的一些结果

5.1 基态弹性场的 Poincaré 对称群

上面介绍的理论是基于将 SO(3)和 T(3)以半直积 SO(3)▷T(3) 群的形式作用于基态弹性场 y^{a} 上的，该群不能在某一向量空间上得到真实的矩阵表示，在数学形式上不完满，也不能直接和缺陷连续统的几何理论相比较．这与一般规范场理论都有着对应的纤维丛几何解释不符．所以发生这种情形，主要是 Kadic 和 Edelen 的理论是从基本方程（3.17）出发而推

导的. 段祝平和黄迎雷的近期工作[41,42]表明，这组方程（3.17）也许是弱缺陷场的近似结果. 缺陷规范场可与几何理论完全对应，而缺陷规范场就是4维物质流形 $\overline{M}_4$（见[1]）的切丛的非欧联络和半度规张量.

为了形成这一规范场理论，我们先讨论一下非线性弹性场的整体对称群. 事实上，将非线性弹性场的作用量泛函（2.3）改成

$$\mathrm{I}(y^a)=\int_{E_4} L_0(\partial_{\underset{\sim}{\mu}} y^a)d^4x \tag{5.1}$$

其中假定拉氏量 L_0 只依赖于4维变形梯度张量，它有形式

$$L_0(\partial_{\underset{\sim}{\mu}} y^a)=(\rho/2)\delta_{ab}\dot{y}^a\dot{y}^b-U(E_{\mu\nu}) \tag{5.2}$$

其中$E_{\mu\nu}=(1/2)[\delta_{ab}y^a_\mu y^b_\nu-\delta_{\mu\nu}]$是 Green 应变张量.

根据对非线性弹性动力学守恒律的研究[33]，（5.2）有下列整体物质对称群及规范群：

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\mu&=x^\mu+\delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon^\mu_\nu x^\nu+\eta^\mu_0\\ \tilde{y}^a&=y^a+\delta y^a=y^a+\varepsilon^a_b y^b+b^a_0\qquad(a,\mu=1,2,3)\end{aligned} \tag{5.3}$$

而时间只有平移群

$$\tilde{t}=t+t_0$$

其中$\{\varepsilon^\mu_\nu\}$和$\{\eta^\mu_0\}$分别表示参考坐标的转动群$SO(3)_0$元和平移群$T(3)_0$元，而$\{\varepsilon^a_b\}$和$\{b^a_0\}$表示整体规范群和平移群的元，都是无穷小参数. 显然，有

$$\varepsilon^\mu_\nu=-\varepsilon^\nu_\mu,\quad \varepsilon^a_b=-\varepsilon^b_a \tag{5.4}$$

它们与 Levi-Civita 张量 $\varepsilon^\mu_{\lambda\nu}$ 有关：

$$\varepsilon^\mu_\nu=\varepsilon^\mu_{\lambda\nu}\epsilon^\lambda,\quad \varepsilon^a_b=\varepsilon^a_{cb}\epsilon^c \tag{5.5}$$

其中 ε^λ 和 ε^c 是无穷小参数. 从而（5.3）代表的是 Poincaré 群.

为了下面推导方便，我们将 $SO(3)_0$ 群的生成元改成

$$\mathbf{S}_{ij}=[\mathbf{I}_i,\mathbf{I}_j]=C_{ij}^{\ \ k}\mathbf{I}_k \tag{5.6}$$

这里，$SO(3)_0$ 群的结构常数是 $C_{ij}^{\ \ k}$，并且和 Levi-Civita 张量等价. 其 Cartan-Killing 度量是$\eta_{ij}=-\delta_{ij}$. 这样，为方便起见，可将 Poincaré 对称群的表示（5.3）改写成

$$\delta y^a=\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}(S_{ij})^a_b y^b+b^a_0,\quad \delta x^\mu=\frac{1}{2}\varepsilon^{ij}(S_{ij})^\mu_\nu x^\nu+\eta^\mu_0 \tag{5.7}$$

这样，我们假定 ε^{ij}，ε^a_b 和 ε^μ_ν 是相同的无穷小参数.

对于如上 Poincaré 变换，如不计规范平移群，不难求得$\partial_{\underset{\sim}{\mu}}\mathbf{y}$的变换

$$\delta(\partial_{\underset{\sim}{\mu}}\mathbf{y})=(1/2)\varepsilon^{ij}\mathbf{S}_{ij}\partial_{\underset{\sim}{\mu}}\mathbf{y}-\delta^{\underset{\sim}{\mu}}_{\underset{\sim}{\mu}}\varepsilon^\nu_\mu\partial_\nu\mathbf{y} \tag{5.8}$$

且有

$$\partial_\mu\delta x^\mu=0 \tag{5.9}$$

下面，我们将讨论在把 Poincaré 群局部化后，使其仍满足对称性要术的条件.

5.2 局部 Poincaré 群和最小替换

现在，我们将上述 Poincaré 群局部化，这时，ε^{ij} 和 η^μ都成为时空的函数，有

$$\delta x^\mu=\varepsilon^\mu_\nu(x)x^\nu+\eta^\mu(x)\equiv\zeta^\mu(x),\qquad \delta\mathbf{y}=(1/2)\varepsilon^{ij}(x)\mathbf{S}_{ij}\mathbf{y} \tag{5.10}$$

显然在该局部群作用下，作用量（5.1）不再具有不变性．为了找到新的具有不变性的拉氏量，必须用某一规范协变导数来替代偏导数$\partial_{\tilde{\mu}}y$．然而，时空如参与变换，则仅作 Y-M最小替换还不能满足对称性要求．Kibble[15]曾证明，还必须在拉氏量前面乘上一个反映坐标变换的因子，才能使方程（2.16）得到满足，从而保证在局部 Poincaré 群（5.10）下保持不变．（论证较冗长，有兴趣的读者可参看 Kibble 的原文）

这样，在不计局部规范平移群时，最终所需要的规范协变导数是

$$D_{\tilde{k}}y^a \equiv \Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}D_{\tilde{\mu}}y^a = \Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}\left[\partial_{\tilde{\mu}}y^a + \frac{1}{2}\Gamma^{ij}_{\tilde{\mu}}(S_{ij})^a_b y^b\right] \quad (\tilde{k},\tilde{\mu}=1,2,3,4) \tag{5.11}$$

$\Gamma^{ij}_{\tilde{\mu}}$ 是新引进的 SO(3)群的规范场，对李群的指标 i,j 是反对称的，且具有变换性质

$$\delta\Gamma^{ij}_{\tilde{\mu}} = \varepsilon^i_k\Gamma^{kj}_{\tilde{\mu}} + \varepsilon^j_k\Gamma^{ik}_{\tilde{\mu}} - \partial_{\tilde{\mu}}\zeta^{\nu}\Gamma^{ij}_{\nu} - \partial_{\tilde{\mu}}\varepsilon^{ij} \tag{5.12}$$

这里，称 $\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}$ 为半度规（vierbein），它有逆变换 $\Phi^{\tilde{k}}_{\tilde{\mu}}$ 使得

$$D_{\tilde{\mu}}y^a = \Phi^{\tilde{k}}_{\tilde{\mu}}D_{\tilde{k}}y^a \tag{5.13}$$

且服从变换

$$\delta\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}} = \delta^{\tilde{\nu}}_{\mu}(\partial_{\tilde{\nu}}\xi^{\mu})\Phi^{\tilde{\nu}}_{\tilde{k}} - \delta^{j}_{\tilde{k}}\varepsilon^i_j\Phi^{\tilde{\mu}}_i \tag{5.14}$$

由于采用牛顿-伽利略时空而不考虑相对论效应，故要求 $\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}$满足非相对论条件

$$\Phi^4_{\tilde{k}} = \delta^4_{\tilde{k}}, \quad \Phi^4_{\tilde{\mu}} = \delta^4_{\tilde{\mu}} \tag{5.15}$$

这样 $\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}$只有12个独立分量，故最小替换（5.11）总共有27个场量：y^a，$\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}$和 $\Gamma^{ij}_{\tilde{\mu}}$．这与上述 Edelen 的规范场理论及 3 构形几何理论是一致的．

如不考虑 SO(3)群，即不计旋错效应，我们有 $\Gamma^{ij}_{\tilde{\mu}}=0$，从而（5.11）简化为

$$D_{\tilde{k}}y^a = \Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}\partial_{\tilde{\mu}}y^a \tag{5.16$_1$}$$

或

$$\partial_{\tilde{\mu}}y^a = D_{\tilde{k}}y^a\,\Phi^{\tilde{k}}_{\tilde{\mu}} \tag{5.16$_2$}$$

这相当于不考虑场量变换而只考虑坐标变换的情形，它只产生位错．值得指出：如果把（5.16$_2$）和弹塑性有限应变中的乘法分解（即 $F=F_eF_p$）比较，可以看出，规范协变导数起着弹性梯度的作用，而最小替换原理相当于基态拉氏量只和弹性应变有关，为了满足（2.16），必须将拉氏量作下列变换：

$$L_0(\partial_{\tilde{\mu}}y^a)\to G\,L_0(D_{\tilde{k}}y^a) \tag{5.17}$$

其中 $G=\left[\det\ (\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}})\right]^{-1}$ 且满足

$$\delta G + [\partial_{\mu}\xi^{\mu}]G = 0 \tag{5.18}$$

这里，不妨将（5.11）定义的协变导数和 Kadic 和 Edelen 的公式（4.26）作一比较．在弱缺陷场的情形下，将 $\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}$ 展开：

$$\Phi^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}} = \delta^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}} + \hat{\Phi}^{\tilde{\mu}}_{\tilde{k}}, \qquad \partial_{\tilde{\mu}}y^a = \delta^a_{\tilde{\mu}} + \partial_{\tilde{\mu}}u^a$$

而将$\partial_{\tilde{\mu}} u^a$，$\hat{\Phi}_{\tilde{k}}^{\tilde{\mu}}$和$\Gamma_{\tilde{\mu}}^{ij}$视为一阶小量，则在忽略二阶小量时，(5.11) 简化为

$$D_{\tilde{k}} y^a = \partial_{\tilde{k}} y^a + (\Gamma_{\tilde{k}})^a_{\ b} y^b + \hat{\Phi}_{\tilde{k}}^{\ a} \tag{5.19}$$

其中

$$\partial_{\tilde{k}} y^a = \delta_{\tilde{k}}^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}} y^a, \quad \mathbf{\Gamma}_{\tilde{k}} = (1/2)\delta_{\tilde{k}}^{\tilde{\mu}} \Gamma_{\tilde{\mu}}^{ij} \mathbf{S}_{ij}$$

(5.19) 和 (4.26) 具有相同的形式，但指标集不一样，下面讨论可知，指标集$\{\tilde{i},\tilde{j},\cdots\}$是自然构形上的关于局部坐标系的指标，这就表明，从上面的规范场出发自然地得到了缺陷连续统 3 构形的几何描述，而第 4 节讨论的 Kadic 和 Edelen 理论可看作一种弱缺陷场的近似。

5.3 几何意义的进一步说明

本文的第 1 部份用 3 构形和 4 维物质流形$\overline{M}_4$系统建立了非线性缺陷场的几何理论。这时，位错和旋错分别对应于 4 维自然态上的挠率和曲率。该自然态有非欧的切丛联络，而表示主切丛的正交标架场与自然切向量场之间的变换通过半度规来实现。我们看一下，这里给出的规范场理论和上述几何理论是如何统一起来的。为了具体实现这一点，首先通过规范场 (5.11) 中的半度规$\Phi_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$定义 4 维物质流形$\overline{M}_4$（见[1]第 4 节）的基本 1 形

$$\Phi^{\tilde{i}} = \Phi_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}} dx^{\tilde{\mu}} \quad \text{或} \quad dx^{\tilde{\mu}} = \Phi_{\tilde{i}}^{\tilde{\mu}} \Phi^{\tilde{i}} \tag{5.20}$$

不难看出，与这个基本 1 形对偶的切向量基是

$$\mathbf{e}_{\tilde{i}} = \Phi_{\tilde{i}}^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}} \quad \text{且} \quad \langle \Phi^{\tilde{i}}, \mathbf{e}_{\tilde{j}} \rangle = \delta_{\tilde{j}}^{\tilde{i}} \tag{5.21}$$

这样$\overline{M}_4$中任一点的切空间T_p中的矢量微元可表示成

$$\delta \mathbf{R} = dx^{\tilde{\mu}} \partial_{\tilde{\mu}} = \Phi^{\tilde{i}} \mathbf{e}_{\tilde{i}}$$

一般讲$\{\mathbf{e}_{\tilde{i}}\}$是非完整系统的坐标，可以把它看成是$\overline{M}_4$上的一个局部正交标架场。故$\Phi_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$又可看成是从参考态到自然态的非完整变换。而且由 (5.15) 可知，$\Phi^4 = dt$。

这样可设 4 维物质流形$\overline{M}_4$有下列度量结构：

$$\eta_{\tilde{i}\tilde{j}} = \mathbf{e}_{\tilde{i}} \cdot \mathbf{e}_{\tilde{j}} = \mathrm{diag}(-1, -1, -1, 1/\zeta) \tag{5.22}$$

其中ζ是一待定参数，故有

$$\partial_{\tilde{\mu}} \cdot \partial_{\tilde{\nu}} \equiv g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \Phi_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}} \Phi_{\tilde{\nu}}^{\tilde{j}} \eta_{\tilde{i}\tilde{j}} \tag{5.23}$$

根据本文第 1 部分的讨论，通过切向量平移法可定义切丛的联络结构

$$D\mathbf{e}_{\tilde{i}} = {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{i}}^{\tilde{j}} \mathbf{e}_{\tilde{j}} = {}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}\tilde{i}}^{\ \tilde{j}} \mathbf{e}_{\tilde{j}} dx^{\tilde{\mu}} \tag{5.24}$$

${}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}\tilde{i}}^{\ \tilde{j}}$是新引进的联络系数。如对该切丛联络要求有$\mathbf{e}_4$在平行平移中保持不变，切矢$\mathbf{e}_i (i=1,2,3)$平移时在$\mathbf{e}_4$上不会产生投影，则如此得到的${}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}\tilde{j}}^{\ \tilde{i}}$满足非相对论性条件

$${}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}\tilde{j}}^{\ \tilde{i}} = \delta_i^{\tilde{i}} \delta_{\tilde{j}}^{j} \Gamma_{\tilde{\mu}j}^{\ i} \tag{5.25}$$

这样，从 (5.15) 和 (5.22) 可证明${}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}j}^{\ i}$具有反对称关系

$${}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}j}^{\ i} = -{}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}i}^{\ j} \tag{5.26}$$

由此可知，(5.24) 中的联络系数 ${}^{(n)}\Gamma_{\tilde{\mu}\,i}^{\;\;j}$ 和 (5.11) 中引进 SO(3) 群的规范场具有**完全相同的性质**，这样可将两者等同起来。

根据上述的对应关系，可以证明规范势和 $\overline{M}_4$ 流形的挠率和曲率有完全相同的结构。但我们知道，流形 $\overline{M}_4$ 的挠率和曲率确定了缺陷的密度和流密度，因此规范势也就自然而然地表示缺陷的密度和流密度了。这个结论在用规范场理论构造弹性缺陷场的拉氏量时有重要的意义。为了将这一观点具体化，先求出二阶规范导数

$$[D_{\tilde{k}},D_{\tilde{l}}]\mathbf{y}\equiv(D_{\tilde{k}}D_{\tilde{l}}-D_{\tilde{l}}D_{\tilde{k}})\mathbf{y}=(1/2)R_{\tilde{k}\tilde{l}}^{\;\;ij}S_{ij}\mathbf{y}-T_{\tilde{k}\tilde{l}}^{\;\;i}D_i\mathbf{y} \tag{5.27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&R_{\tilde{k}\tilde{l}}^{\;\;ij}=\Phi_{\tilde{k}}^{\tilde{\mu}}\Phi_{\tilde{l}}^{\tilde{\nu}}R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{\;\;ij},\quad R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{\;\;ij}=2\left(\partial_{[\tilde{\mu}}\Gamma_{\tilde{\nu}]}^{\;\;ij}-\Gamma_{[\tilde{\mu}\,|m|}^{\;\;i}\Gamma_{\tilde{\nu}]}^{\;\;jm}\right)\\&T_{\tilde{k}\tilde{l}}^{\;\;i}=2\Phi_{\tilde{k}}^{\tilde{\mu}}\Phi_{\tilde{l}}^{\tilde{\nu}}D_{[\tilde{\mu}}\Phi_{\tilde{\nu}]}^{\;\;i},\quad D_{\tilde{\mu}}\Phi_{\tilde{\nu}}^{\;\;i}=\partial_{\tilde{\mu}}\Phi_{\tilde{\nu}}^{\;\;i}+\Gamma_{\tilde{\mu}j}^{\;\;i}\Phi_{\tilde{\nu}}^{\;\;j}\end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

若用 SO(3) 群的 Cartan-Killing 度量 η_{ij} 定义指标 $i,j,\cdots$ 的升降，我们有

$$\Gamma_{\tilde{\mu}j}^{\;\;i}=\Gamma_{\tilde{\mu}}^{\;\;il}\eta_{lj},\quad R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}j}^{\;\;\;\;i}=R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{\;\;il}\eta_{lj}$$

从而有

$$R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}j}^{\;\;\;\;i}=2\left(\partial_{[\tilde{\mu}}\Gamma_{\tilde{\nu}]j}^{\;\;i}+\Gamma_{[\tilde{\mu}\,|l|}^{\;\;i}\Gamma_{\tilde{\nu}]j}^{\;\;l}\right) \tag{5.29}$$

我们称 $R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{\;\;ij}$ 和 $T_{\tilde{k}\tilde{l}}^{\;\;i}$ 为规范势。

另一方面，若将由 (5.24) 确定的联络系数定义 $\overline{M}_4$ 上的挠率和曲率：

$$\begin{aligned}&D_{e_{\tilde{i}}}\mathbf{e}_{\tilde{j}}-D_{e_{\tilde{j}}}\mathbf{e}_{\tilde{i}}-[\mathbf{e}_{\tilde{i}},\mathbf{e}_{\tilde{j}}]\equiv-T_{\tilde{i}\tilde{j}}^{\;\;\tilde{k}}\mathbf{e}_{\tilde{k}}\\&[D_{e_{\tilde{i}}},D_{e_{\tilde{j}}}]\mathbf{e}_{\tilde{k}}-D_{[e_{\tilde{i}},e_{\tilde{j}}]}\mathbf{e}_{\tilde{k}}\equiv R_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}}^{\;\;\;\;\tilde{l}}\mathbf{e}_{\tilde{l}}\end{aligned} \tag{5.30}$$

通过运算，可发现这里定义的挠率 $T_{\tilde{i}\tilde{j}}^{\;\;\tilde{k}}$ 和曲率 $R_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}}^{\;\;\;\;\tilde{l}}$ 跟 (5.28) 具有完全相同的表示。

此外，我们还可证明联络系数 Γ 和半度规 Φ 的变换关系和规范场理论中的表示(5.12)和 (5.14) 完全一致。这样，也就说明了本节给出的 Peincaré 群的规范场和 4 维物质流形 $\overline{M}_4$ 上切丛的联络和非完整变换的一致性，规范变换表示的是切丛标架场 $\{\mathbf{e}_i\}$ 的局部转动变换，它相应地把切丛的一个截面变换到另一个截面，而截面上的联络和半度规也随之变换。我们可以看到，原先抽象的规范变换在纤维丛几何的解释下具体化了，缺陷规范场的优点不但在于它和 $\overline{M}_4$ 上几何理论的一致性，而且规范场理论通过最小替换和最小耦合原理构造出缺陷规范场的拉氏函数，从而求得缺陷场的完备的动力学方程。

5.4 非线性弹性缺陷场 Lagrange 函数的构造

为了在本节理论框架内求得完备的动力学方程，需讨论有关拉氏量（即拉氏函数）的构造。按规范场理论，系统的总的拉氏函数由三部分组成：弹性基态场的贡献 (5.17)；规范场 $\Phi_{\tilde{\mu}}^{\tilde{i}}$ 对拉氏函数的贡献 $\mathscr{L}_1$；规范联络 $\Gamma_{\tilde{\mu}\tilde{j}}^{\;\;\tilde{i}}$ 对拉氏函数的贡献 $\mathscr{L}_2$。由最小耦合原理 (4.18)—(4.20) 可知

$$\mathscr{L}=G\,L_0(D_{\tilde{k}}y^a)+s_1\mathscr{L}_1+s_2\mathscr{L}_2 \tag{5.31}$$

其中仿照（4.20）可得

$$\mathscr{L}_1 = (1/4)GT^{i}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{i}, \quad \mathscr{L}_2 = (1/4)GR^{ij}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{ij} \tag{5.32}$$

其中 $T^{i}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$，$T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{i}$，$R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{ij}$ 分别由（5.28）定义的规范势通过 Cartan-Killing 度量 η_{ij} 或 $g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ 进行指标的升降得到：

$$\left.\begin{aligned} &T^{i}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = T^{i}_{\tilde{j}\tilde{k}}\Phi^{\tilde{j}}_{\tilde{\mu}}\Phi^{\tilde{k}}_{\tilde{\nu}} = 2D_{[\tilde{\mu}}\Phi^{i}_{\tilde{\nu}]} \\ &T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{i} = \eta_{ij}T^{j}_{\tilde{\lambda}\tilde{\sigma}}g^{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}}g^{\tilde{\nu}\tilde{\sigma}}, \quad R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{ij} = \eta_{ik}\eta_{jl}R^{kl}_{\tilde{\lambda}\tilde{\sigma}}g^{\tilde{\mu}\tilde{\lambda}}g^{\tilde{\nu}\tilde{\sigma}} \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

进一步，类似于广义相对论的方法，从曲率张量 $R^{ij}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ 可以构造一个更简洁的不变量，称为标量曲率

$$R = \Phi^{\lambda}_{i}\Phi^{\sigma}_{j}R^{ij}_{\lambda\sigma} \tag{5.34}$$

这是一个规范不变量，由于不包含有第 4 个分量的贡献，实质上它是一个“静态场”，相应的拉氏量可写成

$$\mathscr{L}_{12} = (1/4)GR \tag{5.35}$$

这样，联立（5.31）—（5.34）可以求得非线性弹性缺陷场的总的拉氏函数为

$$\mathscr{L} = G\left[L_0(D_{\tilde{k}}y^a) + \frac{s_1}{4}T^{i}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}T^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{i} + \frac{s_2}{4}R^{ij}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}R^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{ij} + \frac{s_{12}}{4}\Phi^{\lambda}_{i}\Phi^{\sigma}_{j}R^{ij}_{\lambda\sigma}\right] \tag{5.36}$$

其中包含有三个最小耦合常数 s_1, s_2 和 s_{12}。

值得指出，由规范场理论构造的拉氏函数（5.36）在形式上和直接通过弹性应变、位错密度和旋错密度张量的不变量构造的拉氏量完全相当，后者在准静态条件下由段一士和段祝平详细讨论过[19]．事实上，（5.36）中的第一项表示弹性应变场贡献；第二项表示位错的贡献，它是位错密度张量的第二不变量；而第三项表示旋错的贡献，它是旋错密度的第二不变量；而第四项反映了规范场之间的交互作用，由曲率张量的第一不变量表示．从这里可知，缺陷的规范场理论和缺陷连续统的 Lagrange 函数理论又等价起来了，这种优美的理论结构和体系在近代固体力学中是不多见的．在以后的文章中对拉氏函数构造还要详细讨论．

5.5 一点小结

有了拉氏函数，通过最小作用量原理可建立关于27个独立场量 y^a，$\Phi^{i}_{\tilde{\mu}}$，$\Gamma^{i}_{\tilde{\mu}j}$ 的完备动力学方程组．限于篇幅，这里不再讨论，可详见黄迎雷和段祝平的最近文章[42]．

最后还要指出，我们这里建立的非线性弹性规范场的理论还是初步的，如在（5.10）中，当我们在引入局部 Poincaré 群时只考虑了场量的转动而没有计及场量的平动变换．现在还不清楚，这种局部平动是否已被时空的 Poincaré 群所包括了．另外在构成总的拉氏函数时，我们引进了 4 个普遍的常数 ζ, s_1, s_2 和 s_{12}，它们的物理意义不象粒子规范场理论那样明显，这需要通过对具体缺陷场的应用来进一步探讨．本文主要讨论无限域问题，引入规范场后如何对有限物体构造相应的边界条件、初始条件是一个重要而困难的问题，值得进一步探讨，本文第Ⅲ部分将作一介绍．

本文写作过程中，得到了郑哲敏教授的关心和支持，郭仲衡教授审阅了部分初稿，笔者在此一并表示感谢．

参 考 文 献

1 段祝平，黄迎雷，王文标．力学进展，**18** (1988)：433
2 Kanopleva N P, Popov N V. Gauge Field. Harwood Academic Publishers. Chur (1981)
3 Drechsler W, Mayer M E. Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories. Lecture Notes in Physics, **67** (1977)
4 Kunin I A, Kunin B I. Gauge theories in mechanics. in Proc. 6th Symp. on Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics. Lecture Notes in Physics, **249** (1986)
5 Rund H. *Aeq. Math.*, **24** (1982) : 121
6 Golebiewska-Lasota A A. *Int. J. Engng. Sci.*, **17** (1979) : 329
7 Golebiewska-Lasota A A, Edelen D G B. *Int. J. Engng. Sci.*, **17** (1979) : 335
8 Edelen D G B. *Int. J. Engng. Sci.*, **17** (1979) : 441
9 Kadic A, Edelen D G B. A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations. Lecture Notes in Physics (1983)
10 Edelen D G B, Lagoudas D C. Gauge Theory and Defects in Solids. North Holland (1988)
11 Noether E. *Nachr. Ges. Wiss. Goettingcn, Math.-Phys. KL.*, **2** (1918) : 235
12 Weyl H. Gravitation und Elektrizitat. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1918) ; *Z. Phys.*, **56** (1929) : 56
13 Yang C N, Mills R L. *Phys. Rev.*, **96** (1954) : 191
14 Utiyama R. *Phys. Rev*,, **101** (1956) : 1597
15 Kibble T W B. *J. Math. Phys.*, **2** (1961) : 212
16 Yang C N. *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974) : 445
17 Weinberg S. *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967) : 1264; A. Salam. in Proc. of the 8th Nobel Symp., Stockholm (1968) : 367
18 Weinberg S. *Rev. Mod. Phys.*, **46** (1974) : 255
19 段一士，段祝平. *Int. J. Engng. Sci.*, **24** (1986) : 67
20 Gairola B K D. Gauge invariant formulation of continuum theory of defects. in Continuum Models of Discrete Systems 4, Eds. Brulin O and Hsich R K T. North Holland (1981) : 55
21 Gunther H. *Ann. Physik*, **40** (1983) : 291
22 Kleinert H. *Lett. Nuovo Cimento*, **34** (1982) : 103
23 Kleinert H. *Phys. Lett.*, A **97** (1983) : 51
24 Kroner E. On gauge theory in defect mechanics. in Proc. 6th Symp. on Trends in Application of Pure Mathematics to Mechanics. Lecture Notes in Physics, **249** (1986)
25 Kunin I A, Kunin B I. Gauge theories in mechanics. *ibid*
26 Turski L. *Bulletin Polish Acad. Sci.*, **14** (1966) : 289
27 Dzyaloshinskii I. Gauge theories and densities of topological singularities. in Physics of Defects, Les. Houshes Session 35. North Holland (1981)
28 Julia B, Toulouse G. *J. Physique Lett.*, **40** (1979) L: 395
29 Mineev V P. *Soviet Sci. Rev.*, A **2** (1980) : 173
30 Barut A Raczka. Theory of Group Representations and Applications. Polish Scientific Publishers, Warsaw (1980)
31 DeWitt B. Dynamical Theories of Groups and Fields. Gordon and Breach, New York (1965)
32 Duan Z P (段祝平). *Int. J. Solids Structures*, **21** (1985) : 683
33 Duan Z P (段祝平). *Int. J. Eng. Sci.*, **25** (1986) : 963—985
34 Knowles J K, Sternberg E. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **44** (1972) : 187
35 Fletcher D C. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **60** (1976) : 329
36 Einstein A. The Meaning of Relativity. Princeton University Press (1950)
37 Weber J. General Relativity and Gravitational Waves. Interscience, New York (1961)
38 Edelen D G B. *Ann. Phys.*, **133** (1981) : 286
39 Lagoudas D C. Plane harmonic waves in the linearized gauge theory of dislocations. *Int. J. Engng. Sci.* (to appear)
40 Edelen D G B, Lagoudas D C. Dispersion relations for the linearized field equations of dislocation dynamics. *Int. J. Engng. Sci.* (to appear)
41 Duan Z P (段祝平), Huang Y L (黄迎雷). A four dimensional nonlinear geometric theory of defect continuum (1988) (Submitted to *Int. J. Engng. Sci.* for Publication)
42 黄迎雷，段祝平．基于Poincare群的非线性缺陷规范场理论．中国科学院力学研究所研究报告 (1988)

CONTINUUM THEORY OF DEFECTS AND ITS APPLICATION TO THE STUDY OF CONSTITUTIVE EQUATIONS

Ⅱ. Gauge Field Theories of Defects

Duan Zhu-ping Huang Ying-lei Wang Wen-biao
Institute of Mechanics, Academia Sinica Graduate School, Academia Sinica

Abstract The gauge field theory of defects as a newly-developed and emerging branch in modern solid mechanics and material science is reviewed in detail. Noether's theorem and its inverse theorem, which play a significant role in the construction of the defect gauge theory is first introduced. The original works and contributions due to Golebiewska-Lasota, Edelen, Kadic and Edelen, etc, are systematically brought in on the basis of Yang-Mills universal gauge theory construction, including the minimal replacement principle and minimal coupling principle for the group $SO(3)\triangleright T(3)$. Because Edelen, Kadic and Edelen's theories are developed by making use of a special set of linear continuity equations of defect dynamics, the theories seem not to be completely in harmony with the existing geometrical theory of gauge field. Considering this fact, an alternative way has been tried to establish a corresponding theory of a nonlinear elastic gauge field, where the sub-Poincaré gauge group $SO(3)\triangleright T(3)$ are taken into account to replace the mere gauge group $SO(3)\triangleright T(3)$ as adapted by Kadic and Edelen. Using a similar way as given by Kibble in his study of gravitation field theory, the Lagrangian density for the defect continuum is obtained. Because the anholonomic coordinate transformation and non-Euclidean connection coefficients of the moving frame in the natural state are shown to be equivalent in their geometrical structure to the representation of the sub-Poincaré group, the present gauge theory of defects is completely consistent with the nonlinear geometric theory of defect field within the framework of 4-dimensional material manifold $\overline{M}_4$, and it can be reduced to the theory of Edelen, Kadic and Edelen in the case of small deformation and weak defect approximation.

Keywords *defect continuum; material manifold; gauge field theory; constitutive equations; dislocation; disclination*