第20卷 第1期 力 学 进 展 Vol. 20 No. 1
1990年2月25日 ADVANCES IN MECHANICS Feb. 25, 1990

有限弹塑性变形中应变及应变率的分解*

黄筑平
北京大学力学系（邮政编码100871）

段祝平
中国科学院力学研究所，北京（邮政编码100080）

提要 本文对有限弹塑性变形中关于应变及应变率的分解问题进行了系统的评述。在讨论各派理论的基础上提出了我们的观点，并从缺陷场论角度研究了不协调塑性场的应变率分解。

关键词 有限弹塑性变形；应变；应变率；应变及应变率分解

1 引 言

应变及应变率的分解是有限弹塑性变形理论中的一个基本问题，本构方程的建立将直接与此有关。20年来，国际上对这一问题的认识一直存在着较大的分歧。诸如引进中间构形的合理性问题，即中间构形选取的存在性，唯一性以及双重不变性要求；速度梯度的可加性分解问题；客观性导数中旋率的确定；Mandel和Onat关于结构张量选取问题上的区别等等。因此，对各派理论和观点予以较系统的阐述和总结，了解其分歧所在，将有助于使这一基本问题得到进一步的澄清。

现假定物体在 t_0 时刻，t 时刻和 τ 时刻的构形分别为 $\mathscr{B}_0$，$\mathscr{B}_t$ 和 $\mathscr{B}_\tau$，在 t_0 时刻处于X的物质点在 t 时刻和 τ 时刻的位置可分别写为 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X},\tau)$。如将 $\mathbf{X}$ 用 $\mathbf{x}$ 表出，还可有 $\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),\tau)=\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x},t;\tau)$。由此可定义相对变形梯度

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)=\partial\boldsymbol{\xi}/\partial\mathbf{x} \tag{1}$$

如把相对于 t_0 时刻的变形梯度记为 $\mathbf{F}(t)=\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$，$\mathbf{F}(\tau)=\partial\hat{\mathbf{x}}/\partial\mathbf{X}$，便有

$$\mathbf{F}(\tau)=\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)\cdot\mathbf{F}(t) \tag{2}$$

当仅仅考虑初始时刻构形 $\mathscr{B}_0$ 和 t 时刻构形 $\mathscr{B}_t$ 之间的关系时，$\mathbf{F}(t)$ 还可进一步简写为 $\mathbf{F}$。

在有限变形分析中，应变状态的描述总是关于某一个构形相对于另一个参考构形而言的。如以某个固定的构形（通常取为 $\mathscr{B}_0$）为参考构形，便得到 Lagrange 描述下的应变度量[1]

$$\mathbf{E}=\sum_{\alpha=1}^{3}f(\lambda_\alpha)\mathbf{N}_\alpha\otimes\mathbf{N}_\alpha \tag{3}$$

* 国家自然科学基金资助项目。

如以当前时刻 t 的构形 $\mathscr{B}_t$ 为参考构形，便得到 Euler 描述下的应变度量

$$\mathbf{e}=\sum_{\alpha=1}^{3} f(\lambda_\alpha)\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha=\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{R}^T \tag{4}$$

式（3）和式（4）中的 $f(\lambda_\alpha)$ 是满足 $f(1)=0$，$f'(1)=1$ 的光滑的单调递增函数；$\lambda_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 为极分解式 $\mathbf{F}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$ 中 $\mathbf{U}$ 或 $\mathbf{V}$ 的三个主值，$\{\mathbf{N}_\alpha\}$ 和 $\{\mathbf{n}_\alpha\}$ 为 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{V}$ 的单位主方向，分别称为 Lagrange 标架和 Euler 标架．特别当选取 Seth 度量类时，由 $f(\lambda)=(1/2n)(\lambda^{2n}-1)$，可定义 $\mathbf{E}^{(n)}$ 和 $\mathbf{e}^{(n)}$．例如有

$$\mathbf{E}^{(1)}=(\mathbf{C}-\mathbf{I})/2,\quad \mathbf{e}^{(-1)}=(\mathbf{I}-\mathbf{B}^{(-1)})/2 \tag{5}$$

其中

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{F},\quad \mathbf{B}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^T \tag{6}$$

在 Lagrange 描述下的应变率可由应变的物质导数 $\dot{\mathbf{E}}$ 表示，它满足 Hill 意义下的客观性要求[1]．在 Euler 描述下的应变率并不能简单地取为 $\mathbf{e}$ 的物质导数，因为它并不满足通常意义下的客观性要求．这就需要写出关于 $\mathbf{e}$ 的某种客观性导数．例如可取 $\mathbf{e}^{(-1)}$ 的 Oldroyd 导数来作为相应的应变率：

$$\mathbf{D}=\dot{\mathbf{e}}^{(-1)}+\mathbf{e}^{(-1)}\cdot\mathbf{L}+\mathbf{L}^T\cdot\mathbf{e}^{(-1)} \tag{7}$$

其中 $\mathbf{L}=\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}$ 为速度梯度张量．上式中的 $\mathbf{D}$ 实际上就是 $\mathbf{L}$ 的对称部分

$$\mathbf{D}=(\mathbf{L})_s \tag{8}$$

此外，如对相对变形梯度 $\mathbf{F}_t(\mathbf{x},\tau)$ 作极分解并取关于 τ 的物质导数，就有

$$\dot{\mathbf{F}}_t(\mathbf{x},\tau)=\mathbf{R}_t(\mathbf{x},\tau)\dot{\mathbf{U}}_t(\mathbf{x},\tau)+\dot{\mathbf{R}}_t(\mathbf{x},\tau)\mathbf{U}_t(\mathbf{x},\tau)$$

令 $\tau=t$，并注意到

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x},t)=\mathbf{R}_t(\mathbf{x},t)=\mathbf{U}_t(\mathbf{x},t)=\mathbf{I}$$

可得

$$\dot{\mathbf{F}}_t(\mathbf{x},t)=\mathbf{L}=\dot{\mathbf{U}}_t(\mathbf{x},t)+\dot{\mathbf{R}}_t(\mathbf{x},t) \tag{9}$$

因此，式（8）的 $\mathbf{D}$ 也可写为

$$\mathbf{D}=(\dot{\mathbf{F}}_t(\mathbf{x},t))_s=\dot{\mathbf{U}}_t(\mathbf{x},t) \tag{10}$$

这表明，取当前时刻 t 的构形为参考构形时，在 Lagrange 描述下的应变率就与 $\mathbf{D}$ 相同．可见关于 $\mathbf{D}$ 的分解问题是可以从不同角度来进行讨论的．

弹塑性物体的一个主要特征就是其变形过程在其弹塑性加载阶段和在其卸载阶段具有完全不同的响应．为了能在本构方程中反映出这种变形历史的依赖性，往往需要对应变和/或应变率作相应的分解，而实际上这就是根据变形的物理机制来合理地定义弹性应变（或弹性应变率）和非弹性应变（或非弹性应变率）的问题．不同研究者采用不同的定义会导致不同的理论．比较和评价各种理论时不仅要看上述分解在几何上是否合理，而且还要看由此构造的本构方程是否能反映实际材料的弹塑性性质．由此可见，关于应变和应变率的分解问题实质上是对物体变形过程中的弹塑性性质进行合理描述的问题，而不只是关于物体变形几何学的讨论．

应变及应变率的分解总是相对于某种应变度量和某个参考构形而言的．只要对一种应变

度量和参考构形作出了分解，那么根据Hill关于不变性关系的讨论[3,4]，原则上总是可以得到在其他应变度量和参考构形下相应的分解．因此下面我们先以一种应变度量和参考构形来进行讨论．

2 应变的分解

由于大多数文献只讨论关于 Green 应变 $\mathbf{E}^{(1)}$ 的分解问题，因此为了书写方便起见，本节将把 $\mathbf{E}^{(1)}$ 简单地写为 $\mathbf{E}$.

有限变形塑性本构理论的早期文献可参见[5]．该理论采用了一个称为塑性应变的 Lagrange 型的二阶对称张量 $\mathbf{E}''$ 来描述材料的塑性变形状态，并由此定义弹性应变为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \mathbf{E}'' \tag{11}$$

60年代后期，Lee[6,7] 强调了关于变形梯度的乘法分解公式

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p \tag{12}$$

的重要性．上式的含义可通过对一个物质微元的分析来加以说明．假定线元 $d\mathbf{X}$ 经过弹塑性变形后变为 $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$，并设想经过**弹性卸载**而变到无应力状态后该线元为 $d\mathbf{p}$，便可有 $d\mathbf{p} = \mathbf{F}_p \cdot d\mathbf{X}$ 和 $d\mathbf{x} = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{p}$．卸载后的构形通常称为无应力构形或中间构形．对于均匀变形状态，$\mathbf{F}_p$ 和 $\mathbf{F}_e$ 可理解为是由初始构形到中间构形和由中间构形到当前构形的变形梯度．但对于非均匀变形状态，因为卸载后的物体内通常还存在着残余应力分布，所以要使每一个微元都变为无应力状态就需要对物体进行“无穷小分割”，由此得到的各微元间是不协调的，即由初始构形到中间构形的映射是一种非协调变换．因此 $\mathbf{F}_p$ 和 $\mathbf{F}_e$ 一般应看作是满足 $\det(\mathbf{F}_p) > 0$，$\det(\mathbf{F}_e) > 0$ 的关于 $\mathbf{X}$ 的“点函数”．上述讨论也可用于率相关材料或计及温度变化过程的分析．这时的中间构形是由当前的应力值和温度值突然下降为零应力值和初始温度值来实现的（例如[24]）．由于这对应于一个热弹性过程，因此与卸载路径无关．在以后的讨论中，暂不考虑温度效应以及率无关材料与率相关材料的区别．

需要指出，式（12）并不能简单地看作是关于变形描述的纯几何学（或运动学）关系，因为该分解式是由材料的弹塑性性质和变形历史决定的．也就是说，对同样的 $\mathbf{F}$，由于材料性质和变形历史的不同，$\mathbf{F}_p$ 和 $\mathbf{F}_e$ 也可能不相同，这一点是需要特别注意的．

式（12）并不意味着先产生塑性变形然后再产生弹性变形．事实上在材料的变形过程中，可恢复的弹性变形和不可恢复的非弹性变形总是同时产生的．分解式

$$\mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}_p \cdot \overline{\mathbf{F}}_e \tag{13}$$

曾在[8]中作过讨论．其中 $\overline{\mathbf{F}}_e$ 是由初始构形到另一个中间构形的弹性变形梯度，$\overline{\mathbf{F}}_p$ 是由该中间构形到当前构形的塑性变形梯度．式(12)中 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的极分解式可写为 $\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{U}_e$ 和 $\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{U}_p$，式(13)中的 $\overline{\mathbf{F}}_e$ 和 $\overline{\mathbf{F}}_p$ 的极分解式可写为 $\overline{\mathbf{F}}_e = \overline{\mathbf{R}}_e \cdot \overline{\mathbf{U}}_e$ 和 $\overline{\mathbf{F}}_p = \overline{\mathbf{R}}_p \cdot \overline{\mathbf{U}}_p$．显然，当 $\mathbf{R}_e = \overline{\mathbf{R}}_p = \mathbf{R}$ 和 $\overline{\mathbf{U}}_e = \mathbf{U}_e$ 时，就一定有 $\overline{\mathbf{U}}_p = \mathbf{U}_p$ 和 $\overline{\mathbf{R}}_e = (\mathbf{R}_p)^T$．因此，如果无旋应力 $\mathbf{T}^{(R)} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$（其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力）仅由弹性应变 $\mathbf{U}_e$ 确定，且当 $\mathbf{R}_e = \mathbf{R}, \mathbf{R}_p = \mathbf{I}$ 时，分解式（12）和式（13）是等价的．

最早引进中间构形的有 Eckart[9]，在 Lee 的工作[7]之后，还有许多其他学者也都采用中间构形来建立相应的本构方程（例如，可参见[10]至[33]）．虽然这些学者对中间构形的理解和由此得到的本构方程形式并不完全相同，但他们都认为采用中间构形的描述要比采用初始构形为参考构形的描述更为合理和方便，其理由是材料的初始构形（即材料最初的原

始状态）一般是无法知道的．用实验手段只可能得到中间构形或当前构形的有关资料．因此基于初始参考构形的 Lagrange 描述所建立起来的本构方程就很难用实验来验证．在本文最后的讨论中将会看到，以上这种否定采用 Lagrange 描述的观点是很片面的．

针对分解式（12）以及相应的应变或应变率的分解问题，Green，Naghdi，Casey 等人和 Nemat-Nasser 都曾提出过不同的看法和批评，下面就其要点进行简单讨论．

2.1 *中间构形的存在性* 文献[34,35]认为，基于中间构形的分解式（12）并不总是存在的，因为在经受弹塑性变形之后的物质微元可能会呈现较强的**包氏效应**，这时应力空间的原点已有可能不在加载面（后继屈服面）之内．对于这种情况，当物质微元由当前构形的应力状态卸载到无应力状态之前就要先进入**反向屈服阶段**，故在无应力的中间构形下的**塑性变形已不能代表真实的相应于当前构形下的塑性应变．**

文献[11]曾对这一问题作了相应的解释，认为弹性变形主要对应于晶格的畸变，而塑性变形则对应于晶格中位错和缺陷的生成，运动和积累．这些原子仅占正常晶格的很小一部分．故当变形不很大时，材料的弹性性质相对于塑性变形并不敏感．因此，尽管表征弹性响应应力范围的加载面可能会有较大的变化，但表征材料弹性性质的自由能函数的形式仍然变化不大，并可用于加载面之外的应力状态．这样，无论是否反向屈服，弹性卸载规律仍可根据以上的自由能函数来进行计算．采用上述这种“外推”方法得到的无应力状态下的变形可用来作为当前应力状态下的塑性变形．当然，以上虚设的卸载过程只是一种定义当前应力状态下塑性变形的手段．因为已假想在这种“卸载过程”中的塑性变形机制已被“冻结”而无反向屈服，所以实际上它是不能实现的．

应该指出，文献[10,11]对金属弹塑性变形的微观解释主要是针对单晶体而作出的．实际上，大多数金属都是由多晶体组成．每个单晶体的变形总要受到其周围的取向随机排列的其他晶体的制约．因此，宏观上一个物质微元的无应力状态并不对应于每个单晶体的无应力状态．事实上，在宏观上一个物质微元的卸载过程中还可能有某些子结构产生附加的塑性变形．此外，对于一个经受过弹塑性变形的物质微元来说，由取向不同的单晶体的滑移变形及其相互制约所诱导的材料各向异性和弹塑性耦合也总是或多或少地存在着．于是，**弹性性质相对于塑性变形的不敏感性只能认为是一个十分近似的假设．**

2.2 *分解式（12）的唯一性* 式（12）中的 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 并不是唯一的．因为在无应力中间构形上叠加一个刚体运动后仍可得到一个无应力中间构形，所以式（12）也可写为

$$\mathbf{F}=\hat{\mathbf{F}}_e\cdot\hat{\mathbf{F}}_p \tag{14}$$

其中 $\hat{\mathbf{F}}_p=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{F}_p$，$\hat{\mathbf{F}}_e=\mathbf{F}_e\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T$，而 $\bar{\mathbf{Q}}$ 是一个行列式等于 1 的正交张量．

考虑到 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的极分解式，式（12）可写为

$$\mathbf{F}=(\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{R}_e)\cdot(\mathbf{R}_p\cdot\mathbf{U}_p)=\mathbf{V}_e\cdot\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{U}_p \tag{15}$$

其中 $\hat{\mathbf{R}}=\mathbf{R}_e\cdot\mathbf{R}_p$．上式相当于引入了两个无应力中间构形 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$[33]：先由初始构形经过无旋的塑性变形 $\mathbf{U}_p$ 达到中间构形 $\hat{\mathscr{B}}_1$，然后经过转动 $\hat{\mathbf{R}}$ 达到第二个中间构形 $\hat{\mathscr{B}}_2$，最后再经过无旋的弹性变形 $\mathbf{V}_e$ 达到当前构形．由 $\hat{\mathscr{B}}_1$ 转动到 $\hat{\mathscr{B}}_2$ 的任何一个中间状态都可作为分解式（12）的中间构形，但其中 $\hat{\mathscr{B}}_1$ 和 $\hat{\mathscr{B}}_2$ 这两个中间构形是完全可被确定的，对应于 $\hat{\mathscr{B}}_1$ 有 $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}_e\cdot\hat{\mathbf{R}}$，$\mathbf{F}_p=\mathbf{U}_p$，而对应于 $\hat{\mathscr{B}}_2$ 有 $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}_e$，$\mathbf{F}_p=\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{U}_p$．

避免上述分解不唯一性的办法一般有两种。一是引进一个称为“等倾”的无应力中间构形[13]，此构形的微结构对空间来说具有固定的取向，这相当于在式（14）中始终取 $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{I}$ 而使分解式（12）唯一。另一是以某种确定的方式人为地定义 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$。例如，E. H. Lee 等人取 $\hat{\mathscr{B}}_2$ 为中间构形，这时有 $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}_e=\mathbf{F}_e^T$。而文献[16,33]则取 $\hat{\mathscr{B}}_1$ 为中间构形，这时有 $\mathbf{F}_p=\mathbf{U}_p=\mathbf{F}_p^T$。显然，在后一种情况下也有 $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{I}$。

文献[34,35]认为，一切可能的无应力中间构形在物理上是无法区分的，因此并没有理由只选取其中某一个中间构形而不选取另一个中间构形。这就是说，由特定的中间构形所导出的本构理论并不具有普遍的意义。其实上述论点与分解式（12）并非关于变形的纯几何描述的论点相矛盾。因为对于一个均匀变形的物体来说，我们有理由认为不仅各物质微元的 $\mathbf{U}_p$ 相同，而且各物质微元的 $\mathbf{R}_p$ 也是相同的。对于一个非均匀变形的物体来说，由于各物质微元之间的相互联系和制约，$\mathbf{R}_p$ 的选取也不可能是完全独立和任意的。由于这一问题直接与所谓的“双重不变性”要求有关，因此我们先转入对下一个问题的讨论。

2.3 不变性要求（full invariance requirement） 现假设在两个作相对刚体运动的参考系中来考察同一个物体的弹塑性变形过程。相应的正交张量为 $\mathbf{Q}(t)$。此外，若假定与以上两个参考系相对应的中间构形也相差一个刚体转动 $\bar{\mathbf{Q}}(t)$，则由第一个参考系中的 $\mathbf{F}$ 变换到第二个参考系中的 $\mathbf{F}^+$ 时，有关系式

$$\mathbf{F}^+=\mathbf{F}_e^+\cdot\mathbf{F}_p^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}=(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}_e\bar{\mathbf{Q}}^T)\cdot(\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{F}_p) \tag{16}$$

其中 $\mathbf{F}_e^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}_e\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T$，$\mathbf{F}_p^+=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{F}_p$。利用关于 $\mathbf{F}$，$\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的极分解式

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{F}_e=\mathbf{R}_e\cdot\mathbf{U}_e=\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{R}_e,\quad \mathbf{F}_p=\mathbf{R}_p\cdot\mathbf{U}_p=\mathbf{V}_p\cdot\mathbf{R}_p$$

并定义

$$\mathbf{C}=\mathbf{U}^2,\quad \mathbf{C}_e=\mathbf{U}_e^2,\quad \mathbf{C}_p=\mathbf{U}_p^2$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{V}^2,\quad \mathbf{B}_e=\mathbf{V}_e^2,\quad \mathbf{B}_p=\mathbf{V}_p^2$$

就有

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R},\quad \mathbf{R}_e^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_e\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T,\quad \mathbf{R}_p^+=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{R}_p\\&\mathbf{U}^+=\mathbf{U},\quad \mathbf{C}^+=\mathbf{C},\quad \mathbf{U}_p^+=\mathbf{U}_p,\quad \mathbf{C}_p^+=\mathbf{C}_p\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{V}^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{Q}^T;\quad \mathbf{B}^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}^T,\quad \mathbf{V}_e^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{Q}^T,\quad \mathbf{B}_e^+=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}_e\cdot\mathbf{Q}^T\\&\mathbf{U}_e^+=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{U}_e\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T,\quad \mathbf{C}_e^+=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{C}_e\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T,\quad \mathbf{V}_p^+=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{V}_p\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T,\quad \mathbf{B}_p^+=\bar{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{B}_p\cdot\bar{\mathbf{Q}}^T\end{aligned} \tag{18}$$

Green，Naghdi 和 Casey 等人认为，在描述本构方程时应遵循“双重不变性要求”，即对两个作相对刚体运动的参考系来说，式（17）和式（18）的对应关系应适用于任意的正交张量 $\mathbf{Q}$ 和 $\bar{\mathbf{Q}}$。取定 $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{I}$ 或 $\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{Q}$（当取 $\hat{\mathscr{B}}_2$ 为中间构形时就是这种情形）都是不合理的。例如，根据双重不变性要求，当自由能函数 ϕ 可写为 $\mathbf{F}$，$\mathbf{F}_p$，温度 θ 以及其他内变量 ξ_α（$\alpha=1,2,\cdots,n$）的函数时，ϕ 也一定可写为 $\mathbf{C},\mathbf{C}_p,\theta$ 以及 ξ_α 的函数，因为可取 $\mathbf{Q}=\mathbf{R}^T,\bar{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}_p^T$。

Lee[11]则认为，不变性要求是根据本构关系所应遵循的客观性原理提出的，即对两个作相对刚体运动的观察者来说，所得到的本构规律应该是一致的。因此，对于一个弹塑性变形过程，只需讨论两个作相对刚体运动的参考系中各个变量间的转换关系。至于中间构形，这仅仅是为了选取合理的状态参量来描述弹塑性变形而提出的一种虚设的构形，**对这样的中间构形提出客观性要求是没有必要的**。文献[38]从客观性原理应从属于确定性原理的观点出发，认为双重不变性要求是不合理的。由于 $\mathbf{F}_p$（从而 $\mathbf{R}_p$）已由变形历史唯一地确定了，因此对一般的各向异性材料，在状态参量中随意除去 $\mathbf{R}_p$ 是不恰当的。文献[23,25—30]则不

仅指出了在等倾中间构形的本构方程中应给出 $\mathbf{F}_p$ 的演化规律，而且还强调了它们与描述材料各向异性性质的内部微结构定向之间的联系。为了更具体地说明上述这种联系，我们将列出文献[25—30]中的某些要点如下：

①中间构形的定向由镶嵌在材料内部微结构上的方向子（a triad director vectors）的定向所决定。

②材料微结构的转动和连续介质的塑性转动（即 $\mathbf{R}_p$）是两个不同的概念。

③在基于中间构形的本构方程中，变形率和有关量的旋率应该是相对于其微结构的定向而言的。故和 Lee 不同，$\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的时间变化率并不是其物质导数，而是通过中间构形微结构的旋率 $\boldsymbol{\omega}_u$ 来加以定义的。即有

$$\overset{\triangle}{\mathbf{F}}_e=\dot{\mathbf{F}}_e+\mathbf{F}_e\cdot\boldsymbol{\omega}_u,\quad \overset{\triangle}{\mathbf{F}}_p=\dot{\mathbf{F}}_p-\boldsymbol{\omega}_u\cdot\mathbf{F}_p \tag{19}$$

由此导出的应变率分解式将和 $\overline{\mathbf{Q}}$ 无关。

④内变量是定义在中间构形上的。由中间构形转换到当前构形时，内变量本身并没有改变，而只服从相应的张量变换规律（elastic embedding）。

⑤当弹性变形较小时，相应于构形 $\hat{\mathscr{B}}_2$ 的微结构定向的旋率 $\boldsymbol{\omega}_u$ 是连续介质中的物质旋率与 Dafalias 所定义的塑性旋率（plastic spin）之差。

⑥在本构方程中，应该同时给出塑性变形率和塑性旋率的演化方程。在等倾中间构形中，这也相当于同时给出 $\mathbf{U}_p$ 和 $\mathbf{R}_p$ 的演化方程。

不难看出，关于“双重不变性要求”的讨论实质上可归结为本构方程中状态参量的选取问题。如引进关于中间构形的第二 Piola-Kirchhoff 应力

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}=\det(\mathbf{F}_e)\mathbf{F}_e^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{F}_e^{-T}$$

并给出本构关系

$$\hat{\boldsymbol{\kappa}}=2\hat{\rho}(\partial\hat{\phi}/\partial\mathbf{C}_e) \tag{20}$$

（其中 $\hat{\phi}$ 是以 $\mathbf{C}$，$\mathbf{F}_p$，绝对温度 θ 和内变量 ξ_a 为状态参量的自由能函数，$\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力，$\hat{\rho}=\rho_0/\det(\mathbf{F}_p)$ 为中间构形上的密度），就有

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{2\rho_0}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}_e\cdot\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\mathbf{C}_e}\cdot\mathbf{F}_e^T \tag{21}$$

这也可等价地写为

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{2\rho_0}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\mathbf{C}}\cdot\mathbf{F}^T \tag{22}$$

从形式上看，上式与文献[5]中的表达式是一样的。只是[5]中的 $\hat{\phi}$ 仅依赖于 $\mathbf{C}$，$\mathbf{C}_p$，θ，ξ_a 而与 $\mathbf{R}_p$ 无关。如果不把 $\hat{\phi}$ 看作是其变量的各向同性函数，而是通过函数 $\hat{\phi}$ 的表达式本身来刻划材料的各向异性或物质对称性时，Green-Naghdi 的理论将和引入中间构形所得到的结果相一致。当然，根据 Boehler 和 Liu 的表示定理，也可引进描述材料各向异性的结构张量而将 $\hat{\phi}$ 表示为一个各向同性张量函数。但这并未改变问题的本质。

2.4 应变的可加性 如利用分解式（12）并分别定义弹性应变 $\mathbf{E}_e$ 和塑性应变 $\mathbf{E}_p$ 为

$$\mathbf{E}_e=(\mathbf{C}_e-\mathbf{I})/2,\quad \mathbf{E}_p=(\mathbf{C}_p-\mathbf{I})/2 \tag{23}$$

便有

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}_p^T\cdot\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{F}_p+\mathbf{E}_p\neq\mathbf{E}_e+\mathbf{E}_p \tag{24}$$

可见由上式定义的弹性应变和塑性应变之和并不等于总应变．但是，如果 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{U}_e$ 始终具有相同且固定不变的主方向 $\{\mathbf{N}_\alpha\}$ $(\alpha=1,2,3)$，而 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_e=\mathbf{R}_p=\mathbf{I}$ 时，就可能适当地定义应变使其满足可加性条件[10]．设 $\mathbf{U},\mathbf{U}_e$ 和 $\mathbf{U}_p$ 的主伸长分别为 $\lambda^{(\alpha)}$，$\lambda_e^{(\alpha)}$，$\lambda_p^{(\alpha)}$ $(\alpha=1,2,3)$，则式（12）可写为

$$\lambda^{(\alpha)}=\lambda_e^{(\alpha)}\cdot\lambda_p^{(\alpha)}\ (\text{不对}\ \alpha\ \text{求和})$$

现定义对数应变

$$\mathbf{E}^{(0)}=\sum_{\alpha=1}^{3}\ln\lambda^{(\alpha)}\mathbf{N}_\alpha\otimes\mathbf{N}_\alpha,\quad \mathbf{E}_e^{(0)}=\sum_{\alpha=1}^{3}\ln\lambda_e^{(\alpha)}\mathbf{N}'_\alpha\otimes\mathbf{N}'_\alpha,\quad \mathbf{E}_p^{(0)}=\sum_{\alpha=1}^{3}\ln\lambda_p^{(\alpha)}\mathbf{N}_\alpha\otimes\mathbf{N}_\alpha$$

就有 $\mathbf{E}^{(0)}=\mathbf{E}_e^{(0)}+\mathbf{E}_p^{(0)}$．上式中 $\mathbf{N}'_\alpha$ 为中间构形上的主方向 $\mathbf{N}'_\alpha=\mathbf{N}_\alpha$．如果物体变形是均匀的，对上式求物质导数后，可得 $\dot{\mathbf{E}}^{(0)}=\dot{\mathbf{E}}_e^{(0)}+\dot{\mathbf{E}}_p^{(0)}$．注意到 $\mathbf{n}_\alpha=\mathbf{N}_\alpha$，上式还可等价地写为

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}_e+\mathbf{D}_p \tag{25}$$

其中

$$\mathbf{D}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\dot\lambda^{(\alpha)}}{\lambda^{(\alpha)}}\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha,\quad \mathbf{D}_e=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\dot\lambda_e^{(\alpha)}}{\lambda_e^{(\alpha)}}\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha,\quad \mathbf{D}_p=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\dot\lambda_p^{(\alpha)}}{\lambda_p^{(\alpha)}}\mathbf{n}_\alpha\otimes\mathbf{n}_\alpha$$

文献[40]曾对式（25）提出了异议，认为式中的 $\mathbf{D}_e$ 与塑性应变率有关，故不能表示弹性应变率．为此该文企图通过弹性位移增量 $d\bar{\mathbf{u}}^e$ 来建立相应的方程：当把总位移增量 $d\mathbf{u}=(\mathbf{F}-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{X}$ 分解为塑性部分 $d\mathbf{u}^p=(\mathbf{F}_p-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{X}$ 和弹性部分

$$d\mathbf{u}^e=(\mathbf{F}_e-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{p}=(\mathbf{F}_e-\mathbf{I})\cdot\mathbf{F}_p\cdot d\mathbf{X}=(\bar{\mathbf{F}}_e-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{X}$$

之和后，就有

$$\mathbf{F}=\bar{\mathbf{F}}_e+\mathbf{F}_p-\mathbf{I} \tag{26}$$

再通过对式（26）求物质导数便可设法导出满足可加性条件的应变率分解式．这一结果曾得到文献[42]的支持．然而，文献[11]指出了以上这种作法的问题所在．说明了用弹性位移增量而不用弹性伸长率来描述弹性变形的不合理性．由于式（26）中的 $\bar{\mathbf{F}}_e=\mathbf{I}+(\mathbf{F}_e-\mathbf{I})\cdot\mathbf{F}_p$ 不仅与弹性变形有关，而且也与塑性变形有关，因此它并不能用来描述材料的弹性变形．

在[5]中，弹性应变 $\mathbf{E}'$ 是由式（11）定义的．这时应变 $\mathbf{E}$ 的可加性自然得到满足．如承认分解式(12)并取 $\mathbf{E}''=\mathbf{E}_p$，就有 $\mathbf{E}'=\mathbf{F}_p^T\cdot\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{F}_p$．采用这种定义的理由可解释如下：若设在初始构形中的协变基向量和逆变基向量分别为 $\{\mathbf{G}_A\}$ 和 $\{\mathbf{G}^A\}$，$(A=1,2,3)$，随着物体的变形，相应于中间构形和当前构形的随体协变基向量分别为 $\{\hat{\mathbf{C}}_A\}$ 和 $\{\mathbf{C}_A\}$，$(A=1,2,3)$，则由 $\mathbf{F}=\mathbf{C}_A\otimes\mathbf{G}^A$，$\mathbf{F}_p=\hat{\mathbf{C}}_A\otimes\mathbf{G}^A$，就可得到初始构形，中间构形和当前构形中随体坐标在基 $\{\mathbf{G}^A\}$ 下的度量张量

$$\mathbf{I}=G_{AB}\mathbf{G}^A\otimes\mathbf{G}^B,\quad \mathbf{C}_p=\hat{C}_{AB}\mathbf{G}^A\otimes\mathbf{G}^B,\quad \mathbf{C}=C_{AB}\mathbf{G}^A\otimes\mathbf{G}^B \tag{27}$$

其中

$$G_{AB}=\mathbf{G}_A\cdot\mathbf{G}_B,\ \hat{C}_{AB}=\hat{\mathbf{C}}_A\cdot\hat{\mathbf{C}}_B,\ C_{AB}=\mathbf{C}_A\cdot\mathbf{C}_B$$

塑性应变 $\mathbf{E}''$ 和弹性应变 $\mathbf{E}'$ 应由上述度量张量的差来确定

$$\mathbf{E}''=(\mathbf{C}_p-\mathbf{I})/2,\quad \mathbf{E}'=(\mathbf{C}-\mathbf{C}_p)/2 \tag{28}$$

这表明应变的可加性是满足的[43].

其实，在式（23）中，$\mathbf{E}_e$ 和 $\mathbf{E}_p$ 是分别对应于不同参考构形的 Lagrange 型张量，只有把它们变换到同一参考构形后，才有可能讨论其可加性问题. 若以

$$d\mathbf{X},\quad d\mathbf{p}=\mathbf{F}_p\cdot d\mathbf{X},\quad d\mathbf{x}=\mathbf{F}_e\cdot d\mathbf{p}$$

分别表示初始，中间和当前构形中的线元，则

$$d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}=d\mathbf{X}\cdot\mathbf{C}_p\cdot d\mathbf{X},\quad d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}=d\mathbf{p}\cdot\mathbf{C}_e\cdot d\mathbf{p}=d\mathbf{X}\cdot\mathbf{C}\cdot d\mathbf{X}$$

于是

$$d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}-d\mathbf{p}\cdot d\mathbf{p}=d\mathbf{p}\cdot(\mathbf{C}_e-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{p}=d\mathbf{X}\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{C}_p)\cdot d\mathbf{X}$$

故对于初始构形而言，弹性应变可由式（28）的第二式给出[34]. 上述这些论点也早被 Lee 本人所接受[11].

3 基于中间构形的应变率分解式

利用式（12），可将速度梯度表达式写为

$$\mathbf{L}=\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{F}^{-1}=\dot{\mathbf{F}}_e\cdot\mathbf{F}_e^{-1}+\mathbf{F}_e\cdot\dot{\mathbf{F}}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}\cdot\mathbf{F}_e^{-1}=\mathbf{L}_e+\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{L}_p\cdot\mathbf{F}_e^{-1} \tag{29}$$

式中 $\mathbf{L}_e=\dot{\mathbf{F}}_e\cdot\mathbf{F}_e^{-1}$, $\mathbf{L}_p=\dot{\mathbf{F}}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}$. 如果将 $\mathbf{L}$，$\mathbf{L}_e$，$\mathbf{L}_p$ 的对称部分分别记为 $\mathbf{D}$，$\mathbf{D}_e$，$\mathbf{D}_p$，而将相应的反对称部分分别记为 $\mathbf{W}$，$\mathbf{W}_e$，$\mathbf{W}_p$，便有

$$\mathbf{L}=\mathbf{D}+\mathbf{W}=\dot{\mathbf{F}}_e\cdot\mathbf{F}_e^{-1}+\mathbf{F}_e\cdot(\mathbf{D}_p+\mathbf{W}_p)\cdot\mathbf{F}_e^{-1} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D}&=\mathbf{D}_e+(\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{F}_e^{-1})_s+(\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{W}_p\cdot\mathbf{F}_e^{-1})_s\\ \mathbf{W}&=\mathbf{W}_e+(\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{F}_e^{-1})_a+(\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{W}_p\cdot\mathbf{F}_e^{-1})_a\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

上式括号右下方的 s 和 a 分别表示该量的对称和反对称部分. 可见，变形率 $\mathbf{D}$ 并不能简单地分解为弹性应变率 $\mathbf{D}_e$ 和塑性应变率 $\mathbf{D}_p$ 之和，即 $\mathbf{D}\neq\mathbf{D}_e+\mathbf{D}_p$. 考虑到 $\mathbf{D}_p$ 和 $\mathbf{W}_p$ 是相对于中间构形的，故将其转换到当前构形时，就很自然地会与弹性变形梯度相耦合.

因为弹塑性本构方程一般都是以率型形式给出的，所以对变形率（例如式（31）第一式的 $\mathbf{D}$）进行合理的分解就成了一个十分基本的问题. Lee 及其合作者在这方面的工作大致可分两个阶段. 在第一个阶段中，他们近似地假定了：①材料的弹性性质并不与以往的塑性变形历史相耦合；②弹性性质是各向同性的. 在第二个阶段中，他们考虑了由于塑性变形所诱导的材料的各向异性[44].

为了使叙述不过于繁琐，我们先来介绍 Lee 这一学派的新近结果，并在此基础上对采用中间构形的其他学者的工作进行相应的讨论.

将式（30）写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}}_e&=(\mathbf{D}+\mathbf{W})\cdot\mathbf{F}_e-\mathbf{F}_e\cdot(\mathbf{D}_p+\mathbf{W}_p)\\ \text{或}\quad\dot{\mathbf{F}}_e^T&=\mathbf{F}_e^T\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{W})-(\mathbf{D}_p-\mathbf{W}_p)\cdot\mathbf{F}_e^T\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

并分别对 $\mathbf{C}_e=\mathbf{F}_e^T\cdot\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{B}_e=\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{F}_e^T$ 求物质导数，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{C}_e &= 2F_e^T \cdot D \cdot F_e - C_e(D_p + W_p) - (D_p - W_p)\cdot C_e \\ \dot{B}_e &= B_e\cdot(D-W) + (D+W)\cdot B_e - 2F_e\cdot D_p\cdot F_e^T\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

现令

$$C_e^* = \dot{C}_e + C_e \cdot W_p - W_p \cdot C_e$$
$$\mathring{B}_e = \dot{B}_e + B_e \cdot W - W \cdot B_e$$

并设变形率 D 可作如下的两种分解：

$$D = D_e^* + D_p^* \quad 或 \quad D = \hat{D}_e + \hat{D}_p$$

其中 $\hat{D}_e$（或 D_e^*）为其弹性部分，$\hat{D}_p$（或 D_p^*）为其塑性部分，则式（33）可写为

$$C_e^* - 2F_e^T\cdot D_e^*\cdot F_e = 2F_e^T\cdot D_p^*\cdot F_e - C_e\cdot D_p - D_p\cdot C_e \tag{34}$$

$$\mathring{B}_e - B_e\cdot\hat{D}_e - \hat{D}_e\cdot B_e = B_e\cdot\hat{D}_p + \hat{D}_p\cdot B_e - 2F_e\cdot D_p\cdot F_e^T \tag{35}$$

若认为式（34）或式（35）的左端仅代表变形率弹性部分的贡献，而相应的右端仅代表变形率塑性部分的贡献，且其间没有耦合，则可分别令其为零．于是，由式（34）便得到如下的定义式：

$$\left.\begin{aligned}D_e^* &= F_e^{-T}\cdot C_e^*\cdot F_e^{-1}/2 = (\dot{F}_e\cdot F_e^{-1})_s + (F_e\cdot W_p\cdot F_e^{-1})_s \\ D_p^* &= (F_e\cdot D_p\cdot F_e^{-1})_s\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

由式（35）可得

$$\mathring{B}_e = B_e\cdot\hat{D}_e + \hat{D}_e\cdot B_e, \quad D_p = (F_e^{-1}\cdot\hat{D}_p\cdot F_e)_s \tag{37}$$

令 $F_e^{-1}\cdot\hat{D}_p\cdot F_e$ 的反对称部分为 $\Delta = (F_e^{-1}\cdot\hat{D}_p\cdot F_e)_a$，便有

$$F_e^{-1}\cdot\hat{D}_p\cdot F_e = D_p + \Delta$$

考虑到 $\hat{D}_p$ 的对称性，上式还可写为

$$C_e\cdot\Delta + \Delta\cdot C_e = -(C_e\cdot D_p - D_p\cdot C_e) \tag{38}$$

由此可求得 Δ 的表达式[45]

$$\begin{aligned}\Delta = \{&I^2(D_p\cdot C_e - C_e\cdot D_p) - I(D_p\cdot C_e^2 - C_e^2\cdot D_p) \\ &+ C_e\cdot(D_p\cdot C_e - C_e\cdot D_p)\cdot C_e\}/(\mathrm{I}\cdot\mathrm{II} - \mathrm{III})\end{aligned} \tag{39}$$

其中Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别为 C_e 的第一，第二和第三不变量．如果令

$$\overset{\shortparallel}{C}_e = C_e^* - C_e\cdot\Delta + \Delta\cdot C_e$$

便可推得

$$\left.\begin{aligned}\hat{D}_e &= F_e^{-T}\cdot\overset{\shortparallel}{C}_e\cdot F_e^{-1}/2 \\ \hat{D}_p &= D_p^* + F_e^{-T}(C_e\cdot\Delta - \Delta\cdot C_e)\cdot F_e^{-1}/2\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

上述分解具有如下几点性质：①当 $F_e = F_e^T = V_e$ 时，分解表达式（40）便化为文献[44]中的结果．②当材料的弹性性质和塑性性质都呈现各向同性时，即一方面 Cauchy 应力与 V_e 有相同的主方向，而另一方面塑性应变率 $\hat{D}_p$ 沿 Mises 屈服面的法向，则根据 V_e 和 $\hat{D}_p$ 有相同的主方向可知 $\Delta = 0$．这时，分解式（36）和（40）是一致的：$\hat{D}_e = D_e^*$，$\hat{D}_p = D_p^*$，并

退化为文献[12]的结果。这说明，当取 $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}_e$ 时，式（31）第一式右端的最后一项与屈服面相切，将其归为塑性应变率是不合理的。Lee 等人的早期文献如[7,11]对此曾作了充分的讨论。③和 $\mathbf{D}$ 一样，$\hat{\mathbf{D}}_e$ 和 $\hat{\mathbf{D}}_p$ 也是对称的和客观的张量。④上述分解与中间构形的定向无关，即在对中间构形 $\hat{\mathscr{B}}$ 施加一刚体转动后，关于 $\hat{\mathbf{D}}_e$ 和 $\hat{\mathbf{D}}_p$ 的表达式仍然不变。

应该指出，式（35）左右两端互不耦合是一个很强的假设。在 Dafalias 的工作中，塑性变形率 $(\mathbf{D})_p$ 和塑性旋率 $(\mathbf{W})_p$ 分别定义为

$$(\mathbf{D})_p=(\mathbf{F}_e\cdot\dot{\mathbf{F}}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}\cdot\mathbf{F}_e^{-1})_s,\quad (\mathbf{W})_p=(\mathbf{F}_e\cdot\dot{\mathbf{F}}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}\cdot\mathbf{F}_e^{-1})_a$$

如果将以上分解式中的 $\hat{\mathbf{D}}_p$ 与 $(\mathbf{D})_p$ 相对应，则不难看出，令式（35）为零就相当于要求 $(\mathbf{W})_p=0$，这在一般情况下并不成立。事实上，在 Lee 的本构框架中，始终取 $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}_e$ 而未采用等倾中间构形，故由 $\mathbf{F}_p$ 的物质导数所定义的 $\mathbf{W}_p=(\dot{\mathbf{F}}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1})_a$ 将由 $\mathbf{F},\mathbf{U}_p$ 以及 $\dot{\mathbf{F}},\dot{\mathbf{U}}_p$ 唯一地确定，无需再给出其演化方程。这自然就要求一个附加的条件。与 Lee 不同，Dafalias引入了一个待求的微结构定向的旋率 $\boldsymbol{\omega}_u$（当取 $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}_e$ 时，$\boldsymbol{\omega}_u$ 可写为 $\boldsymbol{\omega}$），因此还必须给出塑性旋率 $(\mathbf{W})_p$ 的演化方程。

除 E. H. Lee 学派，Dafalias 等人的工作外，采用中间构形的其他一些学者也曾各自地讨论过关于应变率的分解问题，下面仅简略地介绍其中的部分工作。

文献[20]先将关系式

$$\bar{\mathbf{D}}_p=\mathbf{R}_e\cdot\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{R}_e^T=(\mathbf{V}_e^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}_e)_s-[\mathbf{V}_e^{-1}\cdot(\dot{\mathbf{V}}_e-\mathbf{W}\cdot\mathbf{V}_e)]_s$$

中右端最后一项写为 $-\bar{\mathbf{D}}_e$，故有

$$(\mathbf{V}_e^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}_e+\mathbf{V}_e\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}_e^{-1})/2=\bar{\mathbf{D}}_e+\bar{\mathbf{D}}_p$$

如认为分解式 $\mathbf{D}=\hat{\mathbf{D}}_e+\hat{\mathbf{D}}_p$ 仍成立，并假定 $\hat{\mathbf{D}}_p$ 仅与 $\bar{\mathbf{D}}_p$ 有关，就有

$$2\mathbf{V}_e\cdot\bar{\mathbf{D}}_p\cdot\mathbf{V}_e=2\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{F}_e^T=\mathbf{B}_e\cdot\hat{\mathbf{D}}_p+\hat{\mathbf{D}}_p\cdot\mathbf{B}_e$$

这正是式（35）右端为零的条件，故由式（37）第二式同样可得到分解式（40）。

文献[18]是从关系式

$$\mathbf{D}=\mathbf{F}_e^{-T}\cdot(\mathbf{F}_p^{-T}\cdot\dot{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{F}_p^{-1})\cdot\mathbf{F}_e^{-1}/2 \tag{41}$$

出发来讨论 $\mathbf{D}$ 的分解式的。如将 $\mathbf{C}=\mathbf{F}_p^T\cdot\mathbf{C}_e\cdot\mathbf{F}_p$ 的物质导数写为

$$\dot{\mathbf{C}}=\mathbf{F}_p^T\cdot\left(\frac{\delta_{cc}\mathbf{C}_e}{\delta t}\right)\cdot\mathbf{F}_p$$

其中

$$\frac{\delta_{cc}\mathbf{C}_e}{\delta t}=\dot{\mathbf{C}}_e+\mathbf{C}_e\cdot\mathbf{L}_p+\mathbf{L}_p^T\cdot\mathbf{C}_e=\overset{*}{\mathbf{C}}_e+(\mathbf{C}_e\cdot\mathbf{D}_p+\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{C}_e)$$

再代入式（41）可得

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}\mathbf{F}_e^{-T}\cdot\overset{*}{\mathbf{C}}_e\cdot\mathbf{F}_e^{-1}+\frac{1}{2}\mathbf{F}_e^{-T}\cdot(\mathbf{C}_e\cdot\mathbf{D}_p+\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{C}_e)\cdot\mathbf{F}_e^{-1} \tag{42}$$

如假定上式右端的第一项与弹性应变率有关并记为 $\mathbf{D}_e^*$，第二项与塑性应变率有关并记为 $\mathbf{D}_p^*$，

则显然可见这与分解式（36）是完全一致的.

在文献[21]中，应变是通过称为度量变换张量的 $q^A_B = G^{AM}C_{MB}$ 来刻划的，其中 G^{AM} 为初始构形的逆变度量张量，C_{MB} 为随体坐标在当前构形上的协变度量张量. q^A_B的逆可写为

$$\overset{-1}{q}{}^A_B = \overset{-1}{C}{}^{AM} G_{MB}$$

于是，由

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\dot{C}_{AB}\,\mathbf{C}^A \otimes \mathbf{C}^B = \frac{1}{2}\overset{-1}{C}{}^{AM}\dot{C}_{MB}\mathbf{C}_A \otimes \mathbf{C}^B \tag{43}$$

可定义

$$d^A_B = \frac{1}{2}\overset{-1}{C}{}^{AM}\dot{C}_{MB} = \frac{1}{2}(\overset{-1}{q}{}^A_M)(\dot{q}^M_B) \tag{44}$$

如果将随体坐标在中间构形上的协变度量张量及其逆分别记为 $\hat{C}_{AB}$ 和 $\hat{C}^{AB}$，便可定义非弹性度量变换张量 $\underset{(p)}{q}{}^A_B = G^{AM}\hat{C}_{MB}$ 和弹性度量变换张量 $\underset{(e)}{q}{}^A_B = \hat{C}^{AM}C_{MB}$. 故有

$$q^M_B = (\underset{(p)}{q}{}^M_K)(\underset{(e)}{q}{}^K_B), \quad \overset{-1}{q}{}^A_M = (\underset{(e)}{\overset{-1}{q}}{}^A_N)(\underset{(p)}{\overset{-1}{q}}{}^N_M)$$

$$\dot{q}^M_B = (\underset{(p)}{\dot{q}}{}^M_K)(\underset{(e)}{q}{}^K_B) + (\underset{(p)}{q}{}^M_K)(\underset{(e)}{\dot{q}}{}^K_B)$$

将上式代入式（44）并定义

$$\underset{(e)}{d}{}^A_B = \frac{1}{2}(\underset{(e)}{\overset{-1}{q}}{}^A_N)(\underset{(e)}{\dot{q}}{}^N_B), \quad \underset{(p)}{d}{}^A_B = \frac{1}{2}(\overset{-1}{q}{}^A_M)(\underset{(p)}{\dot{q}}{}^M_K)(\underset{(e)}{q}{}^K_B) \tag{45}$$

后，就有

$$d^A_B = \underset{(e)}{d}{}^A_B + \underset{(p)}{d}{}^A_B \quad \text{或} \quad \mathbf{D} = \underset{(e)}{\mathbf{D}} + \underset{(p)}{\mathbf{D}} \tag{46}$$

上式中的 $\underset{(p)}{\mathbf{D}}$ 与 $\mathbf{D}_p$ 的关系可写为[22]

$$\underset{(p)}{\mathbf{D}} = \underset{(p)}{d}{}^A_B\,\mathbf{C}_A \otimes \mathbf{C}^B = \mathbf{F}_e^{-T}\cdot\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{F}_e^T$$

可见分解式（46）中的 $\underset{(e)}{\mathbf{D}}$ 和 $\underset{(p)}{\mathbf{D}}$ 都不是对称张量.

在结束本节之前，提一下 Onat 的工作或许是有益的. Onat 认为，内变量及其定向（当此内变量为二阶张量时，其定向可由特征方向来表示）应该作为一个整体以刻划材料的各向异性性质. Mandel 采用方向子的作法会带来许多缺点. 首先，对于多晶材料，方向子并没有明确的物理意义，即使对于单晶材料，方向子也可能不是唯一的. 其次，在变形过程中，方向子的三个单位向量始终保持垂直的要求太强，往往无法用来描述材料微结构的定向. 最后，Mandel 的作法并不能直接提供关于材料对称性的信息. 虽然 Dafalias[30] 一再强调方向子的旋率和塑性旋率在本构方程中的重要性，但通过各向同性张量函数的表示定理（而不是通过直觉），便同样可得到关于内变量演化方程的具体形式.

4　基于当前构形和任意固定参考构形的应变率分解

在当前构形下的应变率表达式通常是由式（8），即速度梯度的对称部分来表示的. 它仅与当前时刻质点的速度分布有关而与初始参考构形无关. 如果用相对变形梯度的物质导数式（10）写出 $\mathbf{D}$ 时，这一点就更为明显了.

现在考虑由 t 时刻的构形 $\mathscr{B}_t$ 到 $\tau=t+\Delta t$ 时刻的构形 $\mathscr{B}_{t+\Delta t}$ 的一个微小的弹塑性变形过程．如存在一个虚设的微小可逆过程使物质微元由构形 $\mathscr{B}_{t+\Delta t}$ 的状态变回到虚设的中间构形 $\hat{\mathscr{B}}_{t+\Delta t}$ 的状态后，相应的应力可由构形 $\mathscr{B}_{t+\Delta t}$ 的应力状态弹性地卸回到构形 $\mathscr{B}_t$ 的应力状态而内变量（除其定向外）保持不变，那么，当把 $\mathscr{B}_t$ 到 $\hat{\mathscr{B}}_{t+\Delta t}$ 的相对非弹性变形梯度和 $\hat{\mathscr{B}}_{t+\Delta t}$ 到 $\mathscr{B}_{t+\Delta t}$ 的相对弹性变形梯度分别记作 $\mathbf{F}_t^p(t+\Delta t)$ 和 $\mathbf{F}_t^e(t+\Delta t)$ 后，就有[49]

$$\mathbf{F}_t(t+\Delta t)=\mathbf{F}_t^e(t+\Delta t)\cdot\mathbf{F}_t^p(t+\Delta t)\tag{47}$$

由于考虑的是同一物质点，故在上式的表示中略去了变元 $\mathbf{x}$．注意到当 Δt 趋于零时有

$$\mathbf{F}_t(t)=\mathbf{F}_t^e(t)=\mathbf{F}_t^p(t)=\mathbf{I}$$

故由（47）式得

$$\mathbf{L}=\dot{\mathbf{F}}_t(t)=\dot{\mathbf{F}}_t^e(t)+\dot{\mathbf{F}}_t^p(t)\tag{48}$$

再定义 $\mathbf{D}^e=\{\dot{\mathbf{F}}_t^e(t)\}_s$，$\mathbf{D}^p=\{\dot{\mathbf{F}}_t^p(t)\}_s$，便有

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}^e+\mathbf{D}^p\tag{49}$$

上式与以前的分解式虽然形式上相同，但它已不再依赖于初始参考构形．此外，上式中 $\mathbf{D}^e$ 和 $\mathbf{D}^p$ 的值并不会因为中间构形 $\hat{\mathscr{B}}_{t+\Delta t}$ 的任意刚体转动而产生相应的改变，从而回避了上节中所提到的那些争论．

下面我们来讨论基于某个固定参考构形的应变率分解问题．应变的定义可由式（3）给出，与应变 $\mathbf{E}$ 功共轭的应力可记为 $\mathbf{T}$[3]．对于率无关弹塑性材料，应变不仅与应力状态有关，而且还与物质微元的整个变形历史有关．我们可以用一组称作为内变量的参量 ξ_α（$\alpha=1,2,\cdots,n$）来描述这样的变形历史．ξ_α 可以是标量，也可以是张量，它们刻划了物质内部微观结构的变化．而材料的每一个应变-应力状态都可以看作是处于内约束下的平衡状态[50]．

应变和应力之间的关系一般可写为[3,4]

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{T},\xi_\alpha),\quad \mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{E},\xi_\alpha)\tag{50}$$

注意到 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{T}$ 的物质导数满足 Hill 定义下的张量客观性要求[1,4]，故从式（50）出发来讨论率型本构方程将会是很方便的．

对式（50）取物质导数后可得

$$\dot{\mathbf{E}}=\dot{\mathbf{E}}^e+\dot{\mathbf{E}}^p,\quad \dot{\mathbf{T}}=\dot{\mathbf{T}}^e+\dot{\mathbf{T}}^p\tag{51}$$

其中 $\dot{\mathbf{E}}^e=(\partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{T}):\dot{\mathbf{T}}$ 和 $\dot{\mathbf{E}}^p=(\partial\mathbf{E}/\partial\xi_\alpha)\dot{\xi}_\alpha$ 分别称为弹性应变率和非弹性应变率，$\dot{\mathbf{T}}^e=(\partial\mathbf{T}/\partial\mathbf{E}):\dot{\mathbf{E}}$ 和 $\dot{\mathbf{T}}^p=(\partial\mathbf{T}/\partial\xi_\alpha)\dot{\xi}_\alpha$ 分别称为弹性应力率和非弹性应力率．式（51）中将应变率 $\dot{\mathbf{E}}$ 分解为弹性与非弹性部分之和是有较明确的物理意义的．$\dot{\mathbf{E}}^e$ 对应于物质微元在内部微观结构没有改变时由于应力变化所引起的应变改变率，$\dot{\mathbf{E}}^p$ 对应于物质微元在应力没有改变时由于其内部微观结构的变化所引起的应变改变率．此外，由式（3）所表示的应变既可以初始构形为参考构形，也可以任一个固定的构形为参考构形，例如可将参考构形选取得正好与所讨论时刻的中间构形（如果存在的话）或当前构形相重合，这就赋予式（51）以更为深刻的含义．特别地，当参考构形与当前构形相重合时，就有

$$\dot{\mathbf{E}}=0,\ \dot{\mathbf{E}}=\mathbf{D},\ \mathbf{T}=\tau,\ \dot{\mathbf{T}}=\overset{\nabla}{\tau}-m(\tau\cdot\mathbf{D}+\dot{\mathbf{D}}\cdot\tau) \tag{52}$$

式中 τ 为 Kirchhoff 应力，$\overset{\nabla}{\tau}$ 为 τ 的 Jaumann 导数，$m=(1/2)[1+f''(1)]$。而相应的式（51）将化为关于对 $\mathbf{D}$ 的分解式

$$\mathbf{D}=\bar{\mathbf{D}}^{e}+\bar{\mathbf{D}}^{p} \tag{53}$$

还需指出，文献［49］实际上是通过 Cauchy 应力来定义式（47）中的相对变形梯度 $\mathbf{F}_t^*(t+\Delta t)$ 的，即由构形 $\mathscr{B}_{t+\Delta t}$ 卸回到构形 $\hat{\mathscr{B}}_{t+\Delta t}$ 时，要求对应于 $\hat{\mathscr{B}}_{t+\Delta t}$ 的 Cauchy 应力与构形 $\mathscr{B}_t$ 的 Cauchy 应力相同。由此导出的分解式（49）将不依赖于应变度量的选取。故当应变度量改变时，$\mathbf{D}^e$ 和 $\mathbf{D}^p$ 都不会有相应的改变。与文献[49]不同，式（50）中的 $\mathbf{T}$ 是与应变 $\mathbf{E}$ 相功共轭的应力。而相应的本构方程是通过共轭对 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{T}$ 及其物质导数来表示的。这时，分解式（51）将依赖于应变度量的选取。即使在参考构形与当前构形重合时，分解式（53）中的 $\bar{\mathbf{D}}^e$ 和 $\bar{\mathbf{D}}^p$ 也仍然依赖于应变度量的选取。这与式（49）是根本不同的。有关这方面的讨论可参阅文献［3，4］或［51］对 Nemat-Nasser[41] 的批评。

5 从缺陷场论的观点来看应变率的分解

E．H．Lee 等人所引进的中间构形都是针对某个物质微元而言的。仅当物体作均匀变形时，中间构形才可能看作为欧氏空间的三维物质流形。然而，对于绝大多数实际问题来说，物体内的弹塑性变形是非均匀的，故从缺陷场论的观点来看，就应该考虑 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的时空非协调性质。

如把运动的弹塑性物体看成是一个运动的三维物质流形，采用 Lagrange 表示方法，在该流形上的每一点 (X^A,t)，可引进三种标架[54]：初始构形上的 $\mathbf{G}_A$ 和 $\mathbf{G}^A$，当前构形上的 $\mathbf{C}_A$ 和 $\mathbf{C}^A$ 以及中间构形上的 $\hat{\mathbf{C}}_A$ 和 $\hat{\mathbf{C}}^A$。这时有

$$\mathbf{F}=\mathbf{C}_A\otimes\mathbf{G}^A,\quad \mathbf{F}_e=\mathbf{C}_A\otimes\hat{\mathbf{C}}^A,\quad \mathbf{F}_p=\hat{\mathbf{C}}_A\otimes\mathbf{G}^A$$

式中 $\mathbf{F}$ 是从欧氏空间中三维物质流形到其自身的映射，但 $\mathbf{F}_e^{-1}$ 和 $\mathbf{F}_p$ 则是从欧氏流形到非欧流形的映射。基 $\mathbf{G}_A$，$\mathbf{C}_A$ 与 $\hat{\mathbf{C}}_A$ 属于不同的空间。

因此，为了描述 $\hat{\mathbf{C}}_A$，我们可以在中间构形上引进 Cartan 正交活动标架

$$\mathbf{g}_a=\mathbf{g}_a(\mathbf{X},t),\quad \mathbf{g}^a=\mathbf{g}^a(\mathbf{X},t),\quad (a=1,2,3) \tag{54}$$

其中

$$\mathbf{g}_a\cdot\mathbf{g}_b=\delta_{ab},\quad \mathbf{g}^a\cdot\mathbf{g}^b=\delta^{ab}$$

而将向量 $\hat{\mathbf{C}}_A$ 和 $\hat{\mathbf{C}}^A$ 在该标架上的投影表示为

$$\hat{\mathbf{C}}_A=\hat{\mathbf{C}}_A^a\mathbf{g}_a,\quad \hat{\mathbf{C}}^A=\hat{\mathbf{C}}_a^A\mathbf{g}^a \tag{55}$$

其中

$$\hat{C}_A^a\hat{C}_b^A=\delta_b^a,\quad \hat{C}_a^A\hat{C}_B^a=\delta_B^A \tag{56}$$

即 $\hat{C}_A^a$ 和 $\hat{C}_a^A$ 是互逆的。

于是，通过在运动的三维非欧流形上的平行法则，可建立起流形上活动标架在不同点上的相互关系

$$\nabla\mathbf{g}_a=\Gamma_a^b\mathbf{g}_b,\quad \nabla\mathbf{g}^a=-\Gamma_b^a\mathbf{g}^b \tag{57}$$

$$\nabla_t\mathbf{g}_a=W_a^b\mathbf{g}_b,\quad \nabla_t\mathbf{g}^a=-W_b^a\mathbf{g}^b \tag{58}$$

其中 $\Gamma_a^b=-\Gamma_b^a$ 为流形上的 1 形联络系数，$W_a^b=-W_b^a$ 为关于时间坐标上的 0 形联络系数．对于不同的活动标架，上述联络系数之间要满足一定的变换关系，在一般情况下，它们独立于$\mathbf{F}$和$\mathbf{F}_p$，可看作是缺陷场中最基本的几何量之一，并可用来揭示传统塑性理论中所存在的一些矛盾和争论．为简单起见，这里仅强调说明以下两点：

①只有采用张量并积记法，才可能更好地说明张量所属的空间（欧氏的或非欧的）．例如，可令

$$F_B^A=\mathbf{C}_B\cdot\mathbf{G}^A,\quad \overset{*}{C}{}_a^A=F_B^A\hat{C}_a^B,\quad \hat{C}_{AB}=\hat{\mathbf{C}}_A\cdot\hat{\mathbf{C}}_B,\quad \overset{*}{C}_{ab}=G_{AB}\overset{*}{C}{}_a^A\overset{*}{C}{}_b^B$$

则由 $\mathbf{F}_e=\overset{*}{C}{}_a^A\mathbf{G}_A\otimes\mathbf{g}^a$，$\mathbf{F}_p=\hat{C}_A^a\mathbf{g}_a\otimes\mathbf{G}^A$ 可知

$$\mathbf{E}_p\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^T\cdot\mathbf{F}_p-\mathbf{I})=\frac{1}{2}(\hat{C}_{AB}-G_{AB})\mathbf{G}^A\otimes\mathbf{G}^B$$

$$\mathbf{E}_e\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^T\cdot\mathbf{F}_e-\hat{\mathbf{I}})=\frac{1}{2}(\overset{*}{C}_{ab}-\delta_{ab})\mathbf{g}^a\otimes\mathbf{g}^b$$

应分别属于两个不同的空间，因此是无法进行比较的．

②虽然基于中间构形的分析是针对某个物质微元的，即是在非欧流形上某个切空间中来进行讨论的，但是在对应变率作分解时，由于涉及到关于 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的时间变化率，就不可避免地会导致弹塑性变形的时空非局部性质对该分解式的影响．例如，在表达式

$$\dot{\mathbf{F}}_e\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\left.\frac{\partial\mathbf{F}_e}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}}=D_t\overset{*}{C}{}_a^A\mathbf{G}_A\otimes\mathbf{g}^a$$

中，对指标 a 的时间协变导数 D_t 是由联络系数 W_b^a 来确定的．因此，

$$\mathbf{L}_e\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\dot{\mathbf{F}}_e\cdot\mathbf{F}_e^{-1}=\overset{*}{C}{}_B^aD_t\overset{*}{C}{}_a^A\mathbf{G}_A\otimes\mathbf{G}^B$$

也必然与 $\mathbf{F}_e$ 的非协调性质有关．由此可见，引入中间构形而又不考虑 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 的非协调性质往往是不恰当的．详细的论讨可参阅文献[54,55]．

6 讨 论

在引言中曾经指出，对应变和应变率进行分解是为了能正确地给出有限变形下的弹塑性本构方程．但是，由于弹塑性本构方程通常都具有率型形式，因此对应变本身进行分解往往是不必要的．在比较各种理论时，主要应考察关于应变率分解的合理性问题．

引进中间构形的目的主要是强调了 $\mathbf{F}_p$ 在本构方程中的重要作用．一旦从 $\mathbf{F}_p$ 的演化方程中求得 $\mathbf{F}_p$ 之后，则由中间构形到当前构形之间的关系就可按照有限变形弹性理论的框架来建立．然而，通过本文的讨论可见，基于中间构形的本构框架尚有不少理论上的缺陷．另一方面，基于任一固定参考构形的应变率的分解则可通过内变量的适当引入而使其具有较明确的物理意义．所谓固定参考构形，既可以是初始构形，也可以是中间构形（如果存在的话）或当前构形，因而在描述本构方程时可具有较大的灵活性．这同时也说明了参考构形的选取只具有相对的意义，它们之间是可以相互转换的．只强调中间构形的意义而否定以初始构形为参考构形的看法显然是十分片面的．有关这方面的论述还可参考文献[3,4,51]．

本文得到王仁教授的关心和支持，特此致谢．

参　考　文　献

1 郭仲衡等. 力学进展, **13**, 3 (1983) : 1—17
2 王自强. 力学进展, **16**, 2 (1986) : 210—220
3 Hill R. *Advances in Appl. Mech.*, **18** (1978) : 1—75
4 黄筑平. 力学与实践, **10**, 4 (1988) : 1—14
5 Green A E, Naghdi P M. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **18** (1965) : 251—281
6 Lee E H, Liu D T. *J. Appl. Phys.*, **38** (1967) : 19—27
7 Lee E H. *J. Appl. Mech.*, **36** (1969) : 1—6
8 Clifton R J. *J. Appl. Mech.*, **39** (**1972**) : 287—289
9 Eckart C. *Phys. Rev.*, **73** (1948) : 373—380
10 Lee E H, McMeeking R M. *Int. J. Solids. Struct.*, **16** (1980) : 715—721
11 Lee E H. *Int. J. Solids Struct.*, **17** (1981) : 859—872
12 Lubarda V A, Lee E H. *J. Appl. Mech.*, **48** (1981) : 35—40
13 Mandel J. *Int. J. Solids Struct.*, **9** (1973) : 725—740
14 Mandel J. *Int. J. Solids Struct.*, **17** (1981) : 873—878
15 Freund L B. *Int. J. Solids Struct.*, **6** (1970) : 1193—1209
16 Holsapple K A. *Acta Mechanica*, **17** (1973) : 277—290
17 Kleiber M. *Int. J. Engng. Sci.*, **13** (1975) : 513—525
18 Kleiber M. *Acta Mechanica*, **50** (1984) : 291—297
19 Sidoroff F. *Arch. Mech.*, **25** (1973) : 299—308
20 Sidoroff F. *Int. J. Engng. Sci.*, **20** (1982) : 19—26
21 Lehmann T. *Int. J. Engng. Sci.*, **20** (1982) : 281—288
22 Thermann K. in The Constitutive Law in Thermoplasticity (Lehmann T. ed.) . Springer Wien/ New York (1984) : 323—351
23 Kratochvil J. *J. Appl. Phys.*, **42** (1971) : 1104—1108
24 Kratochvil J. *Acta Mech.*, **16** (1973) : 127—142
25 Loret B. *Mech. Materials*, **2** (1983) : 287—304
26 Dafalias Y F. in Plasticity Today (Sawczuk A, Bianchi G. eds.) . Elsevier Appl. Sci. Pub. (1985) : 135—151
27 Dafalias Y F. *Mech. Materials*, **3** (1984) : 223—233
28 Dafalias Y F. *J. Appl. Mech.*, **52** (1985) : 865—871
29 Paulun J E, Pecherski R B. *Int. J. Plasticity*, **3** (1987) : 303—314
30 Dafalias Y F. *Acta Mechanica*, **69** (1987) : 119—138; **73** (1988) : 121—146
31 Lubliner J. *Acta Mechanica*, **30** (1978) : 165—174
32 Haupt P. *Int. J. Plasticity*, **1** (1985) : 303—316
33 Bammann D J, Johnson G C. *Acta Mechanica*, **70** (1987) : 1—13
34 Green A E, Naghdi P M. *Int. J. Engng. Sci.*, **9** (1971) : 1219—1229
35 Casey J, Naghdi P M. *J. Appl. Mech.*, **47** (1980) : 672—675
36 Casey J, Naghdi P M. *J. Appl. Mech.*, **48** (1981) : 983—984
37 Casey J. *J. Appl. Mech.*, **54** (1987) : 247
38 Dashner P A. *J. Appl. Mech.*, **53** (1986) : 55—60
39 Dashner P A. *Int. J. Solids Struct.*, **22** (1986) : 593—623
40 Nemat-Nasser S. *Int. J. Solids. Struct.*, **15** (1979) : 155—166
41 Nemat-Nasser S. *Int. J. Solids Struct.*, **18** (1982) : 857—872
42 Guo Z H. *Int. J. Solids Struct.*, **17** (1981) : 925—927
43 Sedov L I. Fundations of the Nonlinear Mechanics of Continua. Pergamon Press (1966)
44 Agah-Tehrani A, Lee E H, Mallett R L, Onat E T. *J. Mech. Phys. Solids*, **35**, 5 (1987) : 519—539
45 Mehrabadi M M, Nemat-Nasser S. *Mech. Materials*, **6** (1987) : 127—138
46 Fardshisheh F, Onat E T. in Problems of Plasticity (Sawczuk A. ed.) . (1974) : 89—115
47 Onat E T. in Recent Advances in Creep and Fracture of Eng. Mat. Struct. (Wilshire B, Owen D R J. eds.) . (1982) : 231—264
48 Onat E T. to be published in *Int. J. Plasticity*
49 Liang H Y, Lehmann T. *Sol. Mech. Arch.*, **13**, 4 (1988)

50 Bataille J, Kestin J. *J. Non. Equ. Thermodyn.*, **4** (1979) : 229—258
51 Kleiber M, Raniecki B. Plasticity Today: Modelling, Method and Application (1985) : 3—46
52 张进敏. 力学进展, **18**, 4 (1988) : 482—492
53 黄克智. 非线性连续介质力学. 清华大学、北京大学出版社
54 段祝平, 黄迎雷, 王文标. 力学进展, **18**, 4 (1988) : 433—456; **19**, 2 (1989) : 172—194
55 段祝平, 黄迎雷. 缺陷连续统的4维非线性几何理论. 中国科学院力学研究所报告. Submitted to *Int. J. Engng. Sci.* for publication

ON THE DECOMPOSITION OF STRAIN AND STRAIN RATE IN FINITE ELASTO-PLASTIC THEORY

Huang Zhu-ping — Dept. of Mech., Beijing Univ.
Duan Zhu-ping — Institute of Mech., Academia Sinica

Abstract The paper presents a systematical review on the recent studies for the problem of decomposition of strain and strain rate in finite elasto-plastic deformation theory. Particularly, a detailed analysis is given to the different arguments, which exist in many different schools. At the same time, the authors also present their own point of view and re-evaluate the problem of strain rate decomposition on the basis of defect field theory.

Keywords *finite elasto-plastic deformation; strain; strain rate; decomposition of strain and strain rate*
