

粘流-无粘干扰流动(IF)理论

高 智

(中国科学院力学研究所)

摘要 对不可压缩层流二维干扰流动,本文提出一个干扰流动(IF)理论。IF理论要点为:1)干扰流动沿主流的法向被分为三层即粘性层、干扰层和无粘层,引进了法向动量交换为主导过程的干扰层概念。2)利用力学守恒律、三层匹配关系及文中引进的干扰模型,把三层的空间尺度及惯性-粘性诸力的数量级表示为单参数 m 的函数, $m < \frac{1}{2}$ 。3)导出描述各层流动的控制方程、导出描述全域流动的控制方程为简化 Navier-Stokes (SNS) 方程。IF理论适用于不存在分离的附着干扰流动以及存在分离的大范围干扰流动。经典边界层(CBL)理论和流动分离局部区域 Triple-Deck(TD)理论^[3,4]分别是本文理论在参数 $m=0$ 和 $1/4$ 时的两个特例。本文理论容易推广到可压缩、三维及湍流流动。

关键词 流体力学,粘性流动,分离流。

一、引言

粘流-无粘干扰流动一直是人们大力研究的一个课题^[1,2],这是因为流场中出现粘流-无粘流相互作用现象时,经典边界层(CBL)理论^[3]不再适用,例如超声速和高超声速绕流流场中边界层-激波干扰、流动分离、中等和较低雷诺数内部和外部绕流流动等就是这样。为了解决这一重要的基本课题、抓住干扰流动的本质规律,人们一直努力探求比 Navier-Stokes(NS)方程简单的理论模型。六十年代末提出了适用于分离点邻域局部区域的 Triple-Deck(TD)理论^[3,4],TD理论不仅阐明了高雷诺数分离点邻域流场的渐近结构、它的计算也提供了分离点邻域流动的精细结果。大体也在六十年代后期人们又从 CBL 理论的空间尺度-数量级分析出发提出了简化 Navier-Stokes(SNS)方程、或称抛物化 NS 方程、薄层 NS 方程等^[5-7],SNS 方程在大范围复杂流场的数值计算中得到了越来越广泛的应用。本文提出一个粘流-无粘干扰流动(IF)理论,CBL理论和TD理论是它的两个特例,IF理论为SNS方程建立了更合理的物理基础。

二、不可压缩粘流-无粘干扰流动理论

1. 粘流-无粘干扰流动的三层结构

今考虑绕平板的不可压缩粘流-无粘干扰剪切层流流动,沿主流方向的法向流动被划分为三层:粘性层、干扰层和无粘层(图1)。粘性层中粘性耗损、流体与固壁间的动量交

本文为编委徐复同志推荐,于1989年3月20日收到,1989年5月8日收到修改稿。

换为一主导过程。干扰层的概念是这样,干扰层中粘流-无粘流干扰、法向动量交换为主导过程。无粘层中粘性作用可以略而不计。

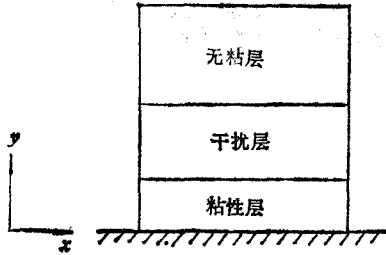


图1 粘流-无粘干扰流动三层结构示意图和坐标系

对层流流动,由 NS 方程中的粘性项可知,流场变量变化梯度的度量、即三层在流向 x 方向和法向 y 方向的长度尺度可表示为

$$x_i \propto L \text{Re}^{-n_i}, \quad y_i \propto L \text{Re}^{-n_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

类似地,流速分量 u, v 和压力 p 的数量级亦可表示为

$$u_i \propto U \text{Re}^{-n_i}, \quad v_i \propto U \text{Re}^{-n_i}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_i \propto U^2 \text{Re}^{-m_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

在式(1)和(2)中, $i = 1, 2, 3$ 分别指粘性层、干扰层和无粘层, L 为参考长度, U 为参考速度, $\text{Re} = \rho UL / \mu$ 为特征雷诺数。由连续性方程及三层的每一层中惯性力与流向压力梯度相平衡即 $\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$ 与 $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)_i$ 为同一数量级推知

$$-n_{u_i} + n_{x_i} = -n_{v_i} + n_{y_i}, \quad 2n_{u_i} = m_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

对粘性层,粘性耗损为主导过程,由 x 方向惯性力与最大粘性力相平衡即 $u \frac{\partial u}{\partial x} \propto$

$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 为同数量级、并利用式(3)推知

$$n_{y_1} = \frac{1}{2}(1 + n_{x_1} - n_{u_1}), \quad n_{v_1} = \frac{1}{2}(1 - n_{x_1} + n_{u_1}) \quad (4)$$

对干扰层,粘流-无粘流干扰、法向动量交换为主导过程,由 y 方向惯性力与最大粘性力相平衡即 $u \frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 为同数量级、并利用式(3)推知

$$n_{y_2} = \frac{1}{3}(1 + 2n_{x_2} - n_{u_2}), \quad n_{v_2} = \frac{1}{3}(1 - n_{x_2} + 2n_{u_2}) \quad (5)$$

对无粘层,由于层中粘性效应可忽略,故应取该层的法向长度尺度等于流向长度尺度即

$$n_{y_3} = n_{x_3}, \quad n_{v_3} = n_{u_3} \quad (6)$$

此外,三层之间应满足几何、运动学和动力学的匹配关系,即相邻两层在流向方向上的长度尺度、以及速度或压力的数量级相匹配推知

$$n_{x_1} = n_{x_2} = n_{x_3} = n_x, \quad n_{u_1} = n_{u_2} = n_{u_3} = n_u$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = m, \quad m = 2n_u \quad (7)$$

由式(4)~(7)推出

$$n_{y_2} - n_{y_3} = n_{y_2} - n_x = \frac{1}{3}(1 - n_x - n_u) > 0 \quad (8)$$

$$n_{y_1} - n_{y_2} = \frac{1}{6}(1 - n_x - n_u) > 0 \quad (9)$$

由式(8)和(9)可知, 只要 $Re > 1$, 三层法向厚度的相对关系即如图 1 所示, 粘性层最薄. 若 $Re \rightarrow \infty$, 则粘性层与干扰层的厚度比、干扰层与无粘层的厚度比都趋向于零, 因此相邻两层的展开解的匹配可利用 Prandtl 极限匹配原则^[9]. 此外, 我们若以 n_x 和 n_u 为双参数, 则可利用式(4)~(6)对每一层给出 NS 方程中诸项的数量级估计, 从 NS 方程中略去小量级项即可把 NS 方程简化, 文^[10,11]已做了这样的处理, 这是流场空间尺度可表示为双参数函数的干扰流动. 本文将进一步研究流场空间尺度可表示为单参数的函数的干扰流动.

为了在 n_x 和 n_u (或 m) 之间建立一个数学关系、即在流向长度尺度与流向压力梯度 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 之间建立某种关系, 我们引进如下的干扰模型: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 与紧邻固壁处粘性层内的粘性响应互为因果关系, 粘性阻滞作用使紧邻固壁的粘性流近似为均匀剪切流, 假设均匀剪切流的法向厚度为 $O(L\delta Re^{-1/2})$ 量级大小, 则均匀剪切流的流向速度应为 $O(U\delta)$ 量级. $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 与惯性力相平衡即 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim u \frac{\partial u}{\partial x}$, 表示粘性响应诱导的压力应为 $O(U^2\delta^2)$ 量级, 进而由 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 与粘性力相平衡即 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 我们推出

$$\delta^2 \sim Re^{-n_x} \tag{10}$$

已知 $\frac{p}{\rho} \sim U^2 Re^{-m}$, $\delta^2 \sim Re^{-m}$, 故有

$$n_x = \frac{3}{2} m, \quad n_u = \frac{1}{2} m \tag{11}$$

把式(11)代入(4)~(6), 最终求得

$$\begin{aligned} n_{y_1} &= \frac{1}{2} (1 + m), \\ n_{y_2} &= \frac{1}{2} (1 - m) \end{aligned} \tag{12a}$$

$$\begin{aligned} n_{y_3} &= \frac{1}{6} (2 + 5m), \\ n_{x_3} &= \frac{1}{6} (2 - m) \end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned} n_{y_1} &= n_x = \frac{3}{2} m, \\ n_{y_3} &= n_u = \frac{1}{2} m \end{aligned} \tag{12c}$$

至此, 我们把三层在坐标方向的长度尺度指数 n_x 和 $n_{y_i} (i = 1, 2, 3)$ 以及流速分量的数量级指数 n_u 和 $n_{v_i} (i = 1, 2, 3)$ 表示为单一干扰参数 m 的线性函数. 图 2 给出了 n_x 和 $n_{y_i} (i = 1, 2, 3)$ 随参数

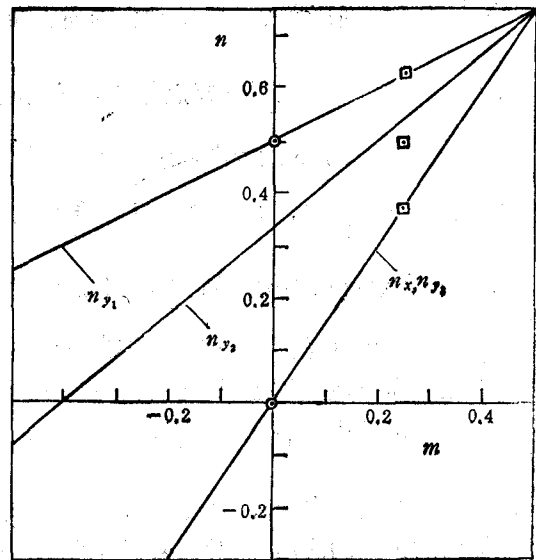


图 2 二维层流干扰流动三层的空间尺度指数 n_x, n_{y_i} 随参数 m 的变化 ($x \sim L Re^{-n_x}, y \sim L Re^{-n_{y_i}}, i = 1, 2, 3$ 分别指粘性层、干扰层和无粘层) \circ 经典边界层(CBL)理论 \square Triple-Deck(TD) 理论

m 的变化关系, 图中也标出了 CBL 理论 ($m = 0$) 的长度尺度指数 $n_x = 0$, $n_y = \frac{1}{2}$; 标出了 TD 理论的长度尺度指数, 即下层(lower-deck) $n_x = \frac{5}{8}$, 主层(main-deck) $n_x = \frac{1}{2}$ 和上层(upper-deck) $n_x = \frac{3}{8}$, 且 $n_x = \frac{3}{8}$.

2. 干扰参数 m 与干扰流动性态的关系

参数 m 与压力梯度 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ 的关系为

$$m = 2 \ln \frac{\partial P}{\partial X} / \ln \text{Re} \quad \text{或} \quad \frac{\partial P}{\partial X} \propto \text{Re}^{m/2} \quad (13)$$

其中 $P = \frac{p}{\rho U^2}$ 为无量纲压力, $X = \frac{x}{L}$, 可见, m 是粘流-无粘流之间相互作用程度的一种度量, m 越大、粘流-无粘流之间的相互作用越强. 由式(13)可知, 若在物理空间给定 $\frac{\partial P}{\partial X}$, 则粘流-无粘流之间的相互干扰将随 Re 数的减小而增强, 这说明中等和较低 Re 数内部和外部绕流本质上就是粘流-无粘干扰流动. 下面讨论参数 m 与干扰流动性态的关系.

- 1) $m < 0$ 为顺压梯度粘流-无粘干扰流动.
- 2) $m = 0$ 为零压梯度干扰流动, 实际就是经典边界层 (CBL) 流动. 以后我们再讨论干扰流动 (IF) 理论与 CBL 理论的关系以及前者简化为后者的问题.
- 3) $m > 0$ 为逆压梯度干扰流动. 当逆压梯度增强到 $m = \frac{1}{4}$ 时, 沿壁粘性层发生分离^[3,4], 因此 $m = \frac{1}{4}$ 对应于分离点邻域的干扰流动, 此时在 x 和 y 坐标方向上厚度均为 $O(L\text{Re}^{-3/8})$ 量级大小的范围内, IF 理论的三层与 TD 理论^[3,4]的三层相当. 以后我们将进一步讨论 $m = \frac{1}{4}$ 时, IF 理论与 TD 理论的关系、以及前者简化为后者的问题.

4) 干扰参数 m 从零增加到 $\frac{1}{4}$, 相应于干扰流动从 CBL 流动开始在逆压梯度作用下发展到粘性层脱离壁面即分离. 分离后有两种情况: 一种是从分离点起干扰主流离开壁面, 并在下游形成大的旋涡、随后是旋涡脱落等流动现象; 在 m 参数空间这种分离过程是: m 从零即 $\frac{\partial P}{\partial X} \propto O(\text{Re}^0)$ 时的 CBL 流动开始, m 逐渐增大直到 $m = \frac{1}{8}$ 即 $\frac{\partial P}{\partial X} \propto O(\text{Re}^{1/8})$ 时粘性层发生分离. 因此对这种分离流, 现在的 IF 理论适用于附着流加上分离点邻域流动的大范围流场, 而对分离下游的旋涡及其脱落现象则需要补充其它的理论. 另一种分离是从分离点 S 起, 主流先离开壁面然后在 A 点再附着于壁面上, 在 S 和 A 点之间形成分离气泡即局部回流区(图 3), A 点后再次形成 CBL 流; 这种分离气泡流在 m 参数空间的演变过程是: m 从零即 $\frac{\partial P}{\partial X} \propto O(\text{Re}^0)$ 的 CBL 流动开始, m 增大直到 $m = \frac{1}{4}$

即 $\frac{\partial P}{\partial X} \sim O(Re^{1/8})$ 时粘性层发生分离, 分离点后 m 从 $\frac{1}{4}$ 逐渐减小, 从分离点脱体的主气流受到较小的逆压作用、因而在粘流-无粘干扰中主气流首先得到加速、然后减速并重新附着于固壁再次形成 CBL 流动、此时 m 又下降到零。因此对分离气泡流, 现在的 IF 理论适用于从附着流—分离—回流—再附—边界层流的全部流动过程。

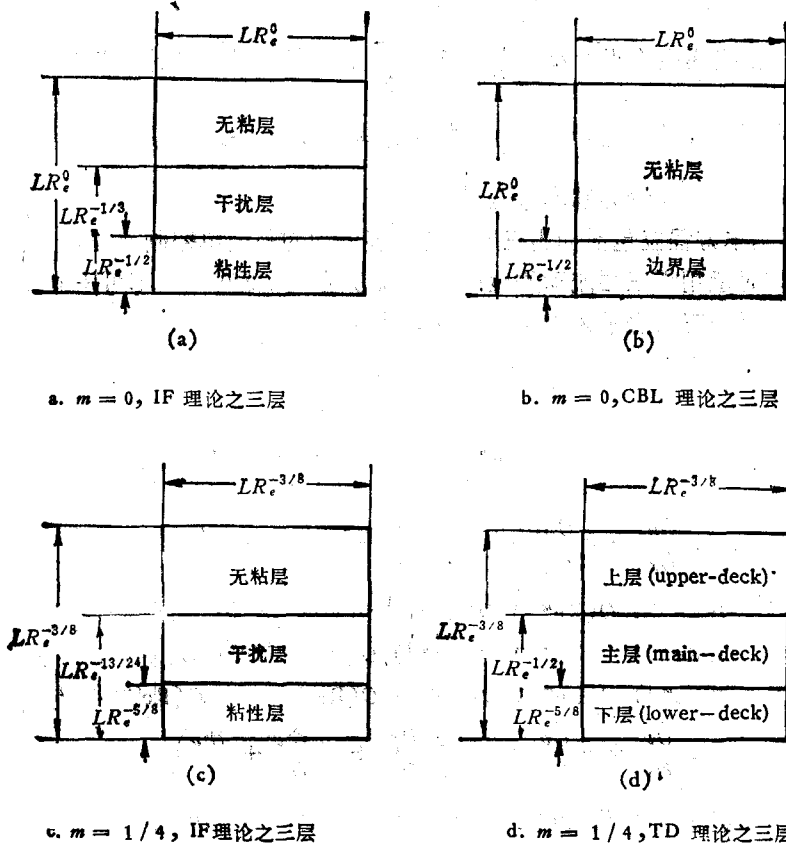


图 3 对 $m=0$ 和 $1/4$, 本文干扰流动(IF) 理论三层与经典边界层(CBL) 理论^[13]之两层 ($m=0$) 及 Triple-Deck(TD) 理论^[3,4]之三层($m=1/4$) 的比较

5) $m > \frac{1}{4}$ 仍为逆压梯度干扰流动, 已知绕固壁的干扰流在 $m = \frac{1}{4}$ 时发生分离, 故 $m > \frac{1}{4}$ 的情况发生在其它类型的干扰流动中。例如, 超声速剪切流通过激波时、压力在气体分子平均自由程 l 的长度范围内升起, l 与粘性系数 μ 的关系为 $\mu \sim \rho l a^{1/2}$, 故有 $\frac{l}{L} \sim M Re^{-1}$, 这里 $M = \frac{U}{a}$ 为马赫数。由 $n_x = \frac{3}{2} m$ 的关系可知剪切流通过激波时的干扰参数 m 近似为 $\frac{2}{3}$, m 的准确值当然也与气体的可压缩性有关。可见 IF 理论允许参数 $m > \frac{1}{4}$ 。另一方面, 由式(12)推知, $m = \frac{1}{2}$ 时 $n_x = n_y = n_z = \frac{3}{4}$ 且 $n_x = n_y =$

$n_u = n_v = \frac{1}{4}$, 即干扰流动三层“退化”为一层, 参见图 2, 且 NS 方程中的所有惯性-粘性项“变成”同一数量级, 故干扰流动的控制方程“升级”为 NS 方程, 此时干扰流动在流向和法向的厚度均为 $O(LRe^{-3/4})$ 量级大小.

在 $\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}$ 的范围内, 粘性项 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的数量级大于 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的量级, $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 不再是最大粘性项, 故干扰模型的假设及 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 相平衡的假设均不再成立. 可见, IF 理论中 m 的上极限为 $\frac{1}{2}$, 换言之, m 的允许变化范围是 $m < \frac{1}{2}$.

3. 干扰流动 (IF) 理论的基本方程

IF 理论的基本方程应包括描述三层中每一层流动的最简单控制方程, 也应该包括描述全域流动即同时适用于三层流动的最简单控制方程. 为此我们把不可压缩二维 NS 方程中各项的数量级分三层表示为干扰参数 m 的函数.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

$$O\left(\frac{U}{L} Re^m\right) \quad O\left(\frac{U}{L} Re^m\right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15a)$$

粘性层	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{(-2+5m)/2})$	$O(Re^{m/2})$
干扰层	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{(-2+5m)/2})$	$O(Re^{(-2+7m)/6})$
无粘层	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{(-2+5m)/2})$	$O(Re^{(-2+5m)/2})$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (15b)$$

粘性层	$O(Re^{(-1+3m)/2})$	$O(Re^{(-1+3m)/2})$	$O(Re^{(-3+7m)/2})$	$O(Re^{(-1+3m)/2})$
干扰层	$O(Re^{(-2+7m)/6})$	$O(Re^{(-2+7m)/6})$	$O(Re^{(-8+13m)/6})$	$O(Re^{(-4+11m)/6})$
无粘层	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{m/2})$	$O(Re^{(-2+5m)/2})$	$O(Re^{(-2+5m)/2})$

在 NS 方程(15)诸项数量级估计式中我们略写了公因子 U^2/L .

对粘性层, 按照粘性层的数量级估计在 NS 方程(15)中略去数量级小于和等于 $O\left(\frac{U^2}{L} Re^{(-1+3m)/2}\right)$ 量级的项得到描述粘性层流动的最简单控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (16a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (16b)$$

且 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, 可见粘性层虽不等于边界层, 但粘性层流动的最简单控制方程就是经典边界层 (CBL) 方程.

对干扰层, 按照干扰层的数量级估计在 NS 方程 (15) 中略去数量级小于和等于 $O\left(\frac{U^2}{L} \text{Re}^{(-1+11m)/6}\right)$ 量级、或略去数量级小于 $O\left(\frac{U^2}{L} \text{Re}^{(-1+11m)/6}\right)$ 量级的项得到描述干扰层流动的最简单控制方程, 它们分别是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (17b)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (17c)$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (18a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (18b)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (18c)$$

简化 Navier-Stokes(SNS) 方程(17)可称为欧拉-边界层组合方程, SNS 方程(18)可称为诸层匹配 SNS 方程, 关于它们的进一步讨论见下文。

无粘层流动的控制方程自然是欧拉方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (19a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (19b)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (19c)$$

下面讨论全域流动的最简单控制方程。SNS 方程 (17a)–(17c) 和 SNS 方程 (18a)–(18c) 显然是描述全域流动的最简单控制方程。文献^[13,14]从经典边界层(CBL)理论出发早已导出了这两种 SNS 方程。这两种 SNS 方程的性质大同小异, 它们之间的主要区别是: 1) SNS 方程 (18a)–(18c) 保留了在粘性层与 $u \frac{\partial v}{\partial x}$ 同数量级的粘性项, 因此它满足方程中诸项的数量级一致即诸项数量级相匹配的原则, 故称它为诸层匹配 SNS 方程。欧拉-边界层组合方程 (17a)–(17c) 则丢掉了在粘性层与 $u \frac{\partial v}{\partial x}$ 同数量级的粘性项。2) 由诸层匹配 SNS 方程出发可求得 NS 方程的众多准确解^[15], 而由欧拉-边界层组合方程出发几乎得不到任何 NS 方程的准确解^[15]。3) 对亚声速流动, 诸层匹配 SNS 方程 (18a)–(18c) 可“反映”流动的椭圆性质, 而欧拉-边界层组合方程 (17a)–(17c) 只能部分地或有条件地“反映”流动的椭圆性质。对这两种 SNS 方程作特征分析、求出欧拉-边界层组合方程 (17a)–(17c) 和诸层匹配 SNS 方程 (18a)–(18c) 的特征方程分别为:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \quad (21)$$

其中 $\varphi = \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) = c$ 为特征面。由特征方程(21)可知, 诸层匹配 SNS 方程(18a)—(18c) 为抛物椭圆型, 即它把扩散项抛物化了, 但它“保留了”连续性—压力梯度“规定”的椭圆性质, 因此它可以“反映”流动的椭圆性质。对特征方程(20)、使用三次方程根的判别式即可推出: 欧拉-边界层组合方程(17a)—(17c) 为抛物双曲型和为抛物椭圆型的条件分别为:

$$\max \left[0, \frac{4}{27} \left(\frac{v}{u}\right)^3\right] > \frac{v}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} > \min \left[0, \frac{4}{27} \left(\frac{v}{u}\right)^3\right] \quad (22)$$

$$\frac{v}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} < \min \left[0, \frac{4}{27} \left(\frac{v}{u}\right)^3\right] \text{ 或 } \frac{v}{u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} > \max \left[0, \frac{4}{27} \left(\frac{v}{u}\right)^3\right] \quad (23)$$

可见, 欧拉-边界层组合方程(17a)—(17c) 仅部分地或有条件地“保留”了流动的椭圆性质。

4. 初值边值和下游条件

在 1 中我们已提到分层求解, 并在两层交界线上把两层解进行匹配的问题。本文主要讨论利用 SNS 方程求解全域流场的问题。由于欧拉-边界层组合方程(17a)—(17c) 和诸层匹配 SNS 方程(18a)—(18c) 都是扩散抛物化的, 因此在定常流情况下可对它们提初边值问题, 初边值和下游条件为在 $x = x_0$, $0 \leq y \leq LRe^{-\frac{1}{2}m}$

$$u = u(y), \quad v = v(y), \quad p = p(y) \quad (24a)$$

在 $x_d \geq x \geq x_0$

$$y = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (24b)$$

$$y = Y_d \sim LRe^{-\frac{1}{2}m} \quad u = u_c(x), \quad p = p_c(x)$$

$$\frac{1}{2} [u_c'(x) + v_c'(x)] + \frac{1}{\rho} p_c'(x) = c \quad (24c)$$

下游条件在 $x = x_d$, $0 \leq y \leq LRe^{-\frac{1}{2}m}$

$$p = p_d(y) \quad (24d)$$

压力场的初边值及下游条件说明, 求解定常流不可压缩 SNS 方程时, 需要求解关于压力场的椭圆型方程或对压力场进行叠代求解。

三、与 CBL 理论和 TD 理论的比较

本文干扰流动 (IF) 理论中, 参数 m 的变化范围为 $m < \frac{1}{2}$ 。对 $m = 0$ 的特例, 经典边界层 (CBL) 理论假设流场为两层^[3], 即边界层和外部无粘层 (参见图 2 和图 4)。IF 理论则表明 $m = 0$ 时, 在粘性层 ($m = 0$ 时粘性层为经典边界层) 与无粘层之间存在一个粘性力与法向惯性力相平衡、法向厚度为 $O(LRe^{-1/3})$ 量级大小的干扰层 (参见图 2 和图 4)。这就是说如果要求精确度为 $O\left(\frac{U^2}{L} Re^{-1/3}\right)$ 量级, 则经典边界层解不可能“跨越”干扰



图 4 附着流-分离气泡-附着流示意图(S 分离点, A 两附点)

层与无粘层解光滑匹配, 因此 CBL 理论不适用于 $m = 0$ 的中等和较低 Re 数干扰流动。相反, 如果 NS 方程中 $O\left(\frac{U^2}{L} Re^{-1/3}\right)$ 量级项的影响可以忽略, 则干扰层流动的控制方程 (17a)–(17c) 或 (18a)–(18c) 均简化为经典边界层方程 (16a)–(16b), 相应地干扰流动三层实际上“退化”成为二层。因此, 对 $m = 0$ 且在 $O\left(\frac{U^2}{L} Re^{-1/3}\right)$ 量级项的影响可忽略的近似下, IF 理论简化为 CBL 理论。

对 $m = \frac{1}{4}$ 的特例, 在法向和流向厚度均为 $O(LRe^{-3/8})$ 量级大小的范围内, IF 理论和流动分离局部区域 Triple-Deck(TD) 理论^[3,4]均成立。IF 理论的粘性层和无粘层分别与 TD 理论的下层和上层相一致(参见图 2 和图 4); IF 理论的干扰层与 TD 理论的主层相对应, 干扰层和主层的法向厚度分别为 $O(LRe^{-13/24})$ 和 $O(LRe^{-1/2})$ 量级大小, 两层厚度相差无几, 但干扰层和主层的物理概念截然不同。TD 理论假定主层是分离奇点邻域受到下层排挤的经典边界层, IF 理论则表明: 在逆压梯度干扰流动中, 主层应是干扰层发展的一个自然阶段。由 NS 方程 (15) 中诸项在干扰层的数量级估计推知, 对 $m = \frac{1}{4}$ 且若方程中 $O\left(\frac{U^2}{L} Re^{-1/24}\right)$ 量级项(即法向惯性项)与 $O\left(\frac{U^2}{L} Re^{1/8}\right)$ 量级项(即切向惯性项)相比可以略而不计的话, 则干扰层流动的控制方程 (17a)–(17c) 或 (18a)–(18c) 均简化成为经典边界层方程 (16a)–(16b); 在同样的精确度的近似下, 干扰层的法向厚度 $O(LRe^{-13/24})$ 与主层厚度 $O(LRe^{-1/2})$ 的差别亦可忽略, 因此, 对 $m = \frac{1}{4}$ 且在上述近似下, 在流向厚度和法向厚度均为 $O(LRe^{-3/8})$ 量级大小的范围内, 本文的 IF 理论完全等价于 TD 理论。

可见, CBL 理论和 TD 理论是本文 IF 理论的两个特例, 因而 IF 理论把 CBL 理论和 TD 理论有机地联系在一起。CBL 理论和 TD 理论均对单一流向长度尺度的条件给出了垂直于流向方向、即在法向方向的长度尺度分辨; IF 理论则同时给出了流场在流向方向和法向方向的长度尺度分辨。我们知道, 不论对 SNS 方程的数值计算还是 NS 方程的数值计算, 流场的空间尺度分辨都是十分需要的。IF 理论也表明: 流向空间尺度随逆压梯度的增大而减小, 但即使流向空间尺度减小到经典边界层厚度大小, NS 方程仍可简化, SNS 方程依然成立。

四、结 束 语

在本文干扰流动 (IF) 理论的陈述中, 不论是三层结构划分、引进干扰层概念和干扰模型, 还是把三层的空间尺度及惯性-粘性诸项的数量级表示为双参数或单参数的函数的

推演,以及导出干扰流动基本方程的数学物理分析,都不涉及物理空间的坐标变数、也不涉及参数 m 与坐标变数 x 的具体关系,就是说都不涉及固壁的具体条件. 因此,本文 IF 理论不仅适用于范围广阔的粘性层不发生分离的粘流-无粘干扰流动,而且也适用于粘性层发生分离的大范围干扰流动,发生分离的情况包括附着流-分离(分离下游的大旋涡及其脱落等现象除外)情况以及附着流-分离-回流-再附-附着流即分离气泡型的干扰流动情况.

很显然,本文 IF 理论为 SNS 方程建立了独立于经典边界层(CBL)理论的力学基础. 容易把 IF 理论推广到流场空间尺度为双参数或多参数的函数的一般情况,例如湍流、可压缩三维流动等. 然而由于流场空间尺度为单参数函数的这种干扰流动包括了 CBL 流动、Falkner-Skan 流动^[8,12]以及 Triple-Deck(TD)理论流动等,故具有特殊的意义. IF 理论以单一实参数的方式同时给出干扰流场在流向及其法向方向的空间尺度分辨,为数值网格的物理生成提供了依据,IF 理论的相应数值计算我们将在另文给出.

参 考 文 献

- [1] Emmons, H. W. Ed., *Fundamentals of Gas Dynamics*, Oxford University Press, (1958).
- [2] Mehta, U. B., *Physical aspects of computing the flow of a viscous fluid*, NASA, TM85893, (1985).
- [3] Stewartson, K., Williams, P. G., *Self-induced separation*, Proc. Roy. Soc., A312: 181—206, (1969).
- [4] Stewartson K., *Some recent studies in Triple-Deck theory*, 9n: *Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows* (Ed. by T. Cebeci), Springer-Verlag, (1982).
- [5] Anderson, D. A., Tannehill, J. C., & Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Chapter 8), McGraw-Hill Book Company, (1984).
- [6] Cebeci, T., Bradshaw, P., *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, Springer-Verlag, New York, Inc. (1984).
- [7] Davis, R. T., & Rubin, S. G., *Computers & Fluids* 8, 1(1980), 101—132.
- [8] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory* (7th ed.), McGraw-Hill Company Inc., (1979).
- [9] Van Dyke, M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, 2nd ed. (1975).
- [10] 高智,中国科学(A辑),6(1988),625—640.
- [11] 高智,力学学报 20,2(1988),107—116.
- [12] White, F. M., *Viscous Fluid Flows*, McGraw-Hill, Book Company, (1974).
- [13] 高智,无粘外流和粘性边界层联立求解,中国科学院力学所工作报告(1967),力学学报,14,6(1982),606—611.
- [14] Головачев, Ю. П., Кузьмин, А. М., и Попов, Ф. Д., *Ж. Вычисл. матем. и матем. Физ.* 13, 4 (1973), 1021—1028.
- [15] 高智,中国科学(A辑),10(1987),1058—1070.

VISCOUS-INVISCID INTERACTION FLOW THEORY

Gao Zhi

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract A theory of viscous-inviscid interaction flow for incompressible, laminar, two-dimensional case is presented in this paper. Main points of this theory are as follows. 1) the interaction flow can be divided into three layers in the normal direction perpendicular to the main streamwise direction. The three layers are viscous layer, interaction layer and inviscid layer, respectively. A concept of interaction layer where the momentum transferring in the normal direction plays a leading role is introduced. 2) With the use of the laws of mass, the matching relation between three layers and an interaction model which is introduced in this paper, the length scales in the coordinate directions of the three layers and the orders of magnitude of various terms in the Navier-Stokes equations are expressed as the functions of a single real parameter m which is less than $\frac{1}{2}$. 3) The basic equations governing the flow in each of the three layers as well as the flow in the whole field are deduced. The basic equations governing the whole-field flow is the simplified Navier-Stokes equations. The theory is applicable to the viscous-inviscid interaction flow without separation and also to the separation-reverse flow-reattachment flow region. For the special cases of $m = 0$ and $\frac{1}{4}$, the theory is reduced to the classical boundary layer theory^[3] and the triple-deck theory of self-induced separation^[3,4], respectively. The theory can be extended to compressible, three-dimensional flows. It can also be extended to the turbulent flows.

Key words fluid mechanics, viscous flow, separation, viscous-inviscid interaction