

# 液桥中不同 Prandtl 数流体的 热毛细对流\*

唐 泽 眉    胡 文 瑞

(中国科学院力学研究所,北京,100080)

**摘要** 本文研究从上面加热的液桥中不同  $pr$  数流体的热表面张力驱动对流。在  $Ma$  数相同的条件下,不同  $pr$  数流体液桥中的温度分布和流场结构定性相似,但定量结果不同。小  $pr$  数 ( $pr \ll 1$ ) 流体液桥中的粘性边界层远小于热边界层,最大流函数所在位置向冷端偏移,有较大的流动速度。结果表明,  $Ma$  数是描述这种流动的敏感参数。

**关键词** 热毛细对流,微重力,数值模拟

## 一、引 言

人类已进入开发和利用空间资源的时代。近二十年来,国外已进行了大量有关空间材料生产的研究。在空间,微重力可达  $10^{-3} \sim 10^{-6}$ ,密度不同引起的沉淀,悬浮以及静压非均匀,浮力对流等与重力有关的效应,容器壁的影响都减弱了,有希望利用空间环境生长出高质量的新型材料。引力的减弱和无容器加工过程将表面张力的作用突出出来。在两种介质的交界面上,沿界面的温度变化,会引起表面张力的变化。沿界面的温度梯度会驱动流体流动,这种流动称为热毛细对流。以浮区法晶体生长为背景的研究表明,当液桥上下两端温差增大到一定程度时,会形成振荡流,从而影响材料的质量。这种表面张力驱动的振荡流,引起人们很大的兴趣,是微重力流体的前沿课题之一。

由于液态金属、半导体材料的熔区不透明,缺少温度场和流场的实验实测资料。现有的地面和空间半浮区实验均采用透明介质,例如硅油、硝酸钠等<sup>[1-3]</sup>。不同的实验介质物理性质不同。 $pr$  数是流体的物理特性,它是流体的动量扩散和热扩散效应相对重要性的表征,不同的流体  $pr$  数不同。液态金属,半导体材料的  $pr$  数很小,例如水银,  $pr = 0.025$ ,砷化镓,  $pr = 0.007$ ,而大多数透明液体都满足  $pr > 1$ 。水在室温时,  $pr = 6$ ,硅油的  $pr$  数随标号不同在  $10 \sim 100$  或更大的范围内变化。要把透明液体的实验结果推广到液态金属或半导体材料中,除几何相似以外还需满足动力学相似条件,这在实验研究中是难以实现的。采用数值模拟的方法,可以方便地改变无量纲参数,变化表面张力雷诺数和 Marangoni 数的比值(相当于改变  $pr$  数),从而研究液桥中充以不同的流体介质时的流动结构和温度分布。

\* 本课题由中国自然科学基金会资助。

本文于 1990 年 3 月 24 日收到第一稿,1990 年 12 月 27 日收到修改稿。

在这方面国外已开展了大量的数值研究工作。Preisser, Schwabe 和 Scharmann 的空间实验是对从上部加热的透明介质硝酸钠(熔点  $308^{\circ}\text{C}$ ,  $pr = 8.9$ )液桥进行的,并分析讨论了由环境散热效应引起的浮力与表面张力驱动对流的耦合作用<sup>[1]</sup>,观测并讨论了这种条件下的振荡流动现象。B-I. Fu 和 Ostrach 研究了无重力条件下  $pr$  数为 100、10、0.01 的流体半浮区液桥中的流场和温度分布情况<sup>[2]</sup>。Ben Hadid 等人数值讨论了温度梯度和重力相互垂直时浅矩形容器中低  $pr$  数流体的浮力驱动流动<sup>[3]</sup>。A. Zebib, G. M. Homisy 和 E. Meiburg 以雷诺数为变化参数,对矩形容器中不同  $pr$  数流体分别进行了数值研究<sup>[4]</sup>,采用  $80 \times 80$  的网格,给出了流场的精细结构。以上所列举的工作虽对不同  $pr$  数流体进行了数值计算,但均未从流动相似的角度来归纳讨论  $pr$  数的作用。为了将透明介质的实验结果用于分析讨论液态金属和半导体材料的晶体生长过程,我们对充有不同  $pr$  数流体介质的半浮区液桥进行数值计算,比较  $pr$  数对液桥的流动结构和温度分布的影响,并讨论流动的相似条件。

## 二、液桥模型

如图 1 所示,两个直径为  $2r_0$  的同心圆盘之间充以液体。上下圆盘分别均匀加热,温差为  $\Delta T$ 。自由面上的温度分布不均匀,下端温度较低,因此表面张力较大。在自由面附近会形成自上而下的流动,沿中心轴附近为自下而上的流动。用 Boussinesq 近似描述液体的行为。重力方向竖直向下。初步研究中,不考虑液固交界面的相变效应,将此界面取为平面,自由面为直径  $2r_0$  的圆柱面。用柱坐标系中的二维轴对称,定常流体力学方程组和能量方程来讨论液桥中的流体流动。坐标原点取在下圆盘中心。特征长度、特征温度和特征流速分别取液桥高度  $L(L = 2r_0)$ ,上下圆盘温度差  $\Delta T$  和以表面张力和粘性力相平衡导出的流速  $U_0 = \frac{|\partial\sigma/\partial T|\Delta T}{\mu}$ 。将方程无量纲化并利用连续方程引入如下定义的流函数<sup>[7]</sup>

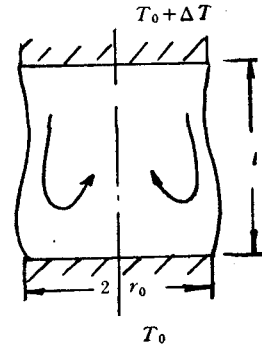


图 1 液桥模型

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \quad ; \quad = - \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (2.1)$$

从动量方程中消去压力,引进涡度  $\omega$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.2)$$

得到下列无量纲形式的流函数、涡度和能量方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\omega \quad (2.3)$$

$$R_0 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z} \omega \right] \\ = \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} - \frac{Gr}{R_0} \frac{\partial\theta}{\partial r} \quad (2.4)$$

$$Ma \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\phi)}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

其中  $r, u$  和  $z, w$  分别表示径向和轴向的坐标和流速;  $R_o = \frac{U_o L}{\nu}$  为表面张力雷诺数。

Marangoni 数  $Ma = \frac{U_o L}{K}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{K}$  为 Prandtl 数, 其中  $\nu, K$  分别为流体的运动粘性系数和热扩散系数, 因此  $Ma = R_o \cdot Pr$ 。浮力的作用反映在涡度方程(2.4)的最后一项中,  $Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$  为 Grashof 数, 其中  $g$ —重力加速度,  $\beta$ —体膨胀系数。

无量纲边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \phi(0, z) = \phi(r_o, z) = 0 \\ \phi(r, 0) = \phi(r, 1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(0, z) = 0 \\ \omega(r_o, z) = -\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

当  $R_o \geq 10^4$  时, 估计粘性边界层厚度将大于边界网格的宽度, 近似取涡度为零, 当  $R_o \leq 10^4$  时取  $\omega = \frac{2(\phi_{w+1} - \phi_w)}{\Delta z^2}$ , 这相应于在固壁处流体不滑移条件。

$$\left. \begin{aligned} T(r, 0) = 0 \quad T(r, 1) = 1 \\ \frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial T(r_o, z)}{\partial r} = R_d T^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中  $R_d$  为反映自由边界辐射散热大小的系数。我们对  $Pr$  数为 0.01, 0.1, 1.0, 10, 100 的不同流体在  $R_o = 10^3, 10^4$  以及  $Ma = 10^2, 10^4$  两种情况下分析研究数值计算结果。其它条件保持不变, 计算中取  $Gr = 0$ 。

计算利用变网格有限元程序, 全部流区划分为 360 个大小不等的三角元, 209 个节点。在温度梯度较大和流速变化剧烈的区域加密网格。计算中采用线性插值函数。

### 三、 $Pr$ 数的影响

为了比较和讨论反映流体特性的  $Pr$  数对表面张力驱动对流的影响将计算结果按  $R_o$  数相同,  $Pr$  数变化(因而  $Ma$  数也变)和  $Ma$  数不变,  $Pr$  数( $R_o$  数)不同分别整理。图 2 和图 3 是按上述方法绘制的液桥自由表面上的温度分布。

从图 2 可以看出, 当  $R_o$  一定时, 随着  $Pr$  数的增加同一液桥自由面位置的温度值明显增高, 冷端附近的温度较热端增长得要快,  $Pr$  数越大的流体, 在靠近冷端处温度梯度越大, 在热端附近则相反。在图 3 上, 当  $Ma = 100$  时,  $Pr$  数相差  $10^4$  倍(因而  $R_o$  数也相差  $10^4$  倍)的不同  $Pr$  数流体的液桥的表面温度分布却几乎相同, 即使  $Ma$  数为  $10^4$ , 它们的差别也不算大。  $Pr$  数小的流体有较强的对流效应, 随着  $Ma$  数的增大, 这种效应越明显。当  $Ma$  数增大时, 液桥自由面中心附近温度梯度减小, 冷端附近温度梯度增加, 热端则相反。

图 4 为  $R_o = 10^3$  时右半部液桥中的温度分布和流场。对一定的  $R_o$  值,  $Pr$  数的影

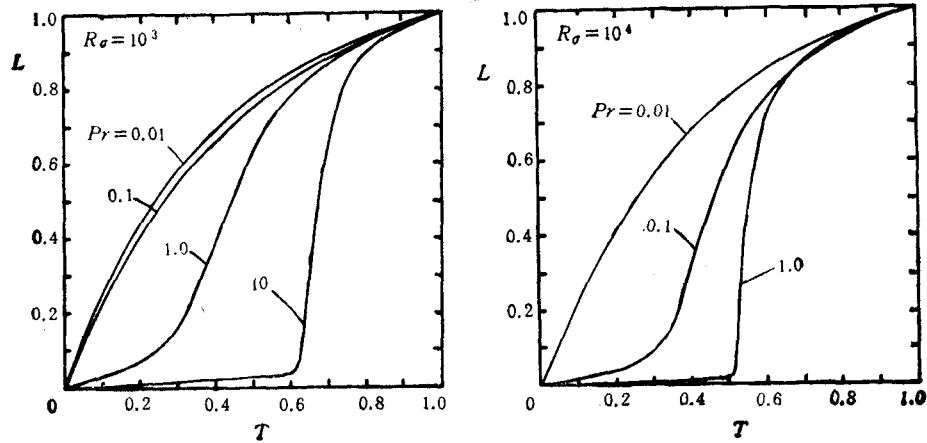


图 2 液桥自由面上的温度分布

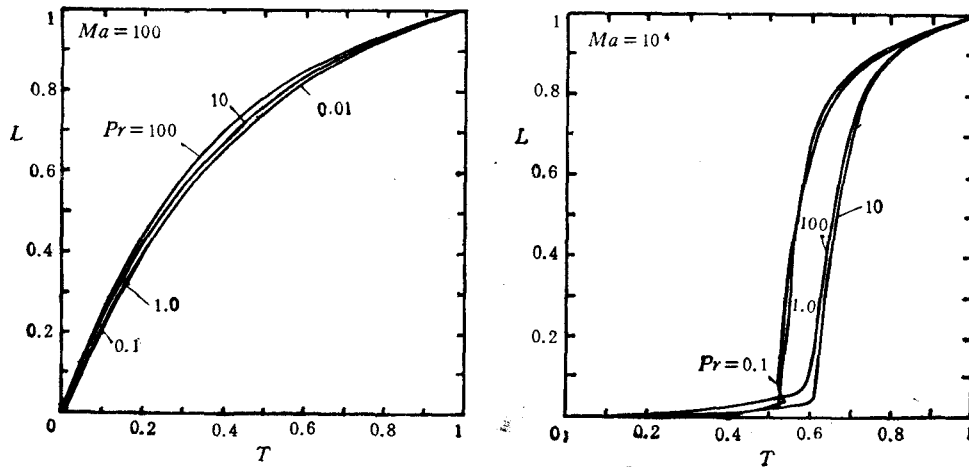


图 3 液桥自由面上的温度分布

响很大。 $pr$  数为 0.01 时等温线几乎呈水平分布,由于自由表面处的散热,在表面附近略向上弯。当  $pr$  数增加到 0.1 时,  $Ma$  数也增长一个量级,这意味着热的对流迁移效应比扩散作用相对增强,这样几乎水平的等温线在自由面附近略向下弯,中心轴附近微微抬起。随着  $pr$  数( $Ma$  数)的继续增加,等温线的这种弯曲愈加剧烈。在较大的  $pr$  数(例如  $pr = 10$ ) 流体液桥的上半部,在自由面附近会形成温度梯度和加热温度梯度反向,而与重力同向的局部区域,并在中心轴附近见到竖直走向的等温线分布,在液桥下部形成了很大的水平温度差。

从涡度方程(2.4)看来,在  $Gr = 0$  时,  $R_{\sigma}$  数不变似乎应该相应具有相同的流动结构。但是,流动是由自由表面上的表面张力梯度驱动的,这个驱动力直接和温度分布( $Ma$  数)有关。因此,虽然  $R_{\sigma}$  数数值不变,当  $pr$  数( $Ma$  数)变化时,无量纲流速会相差很大。

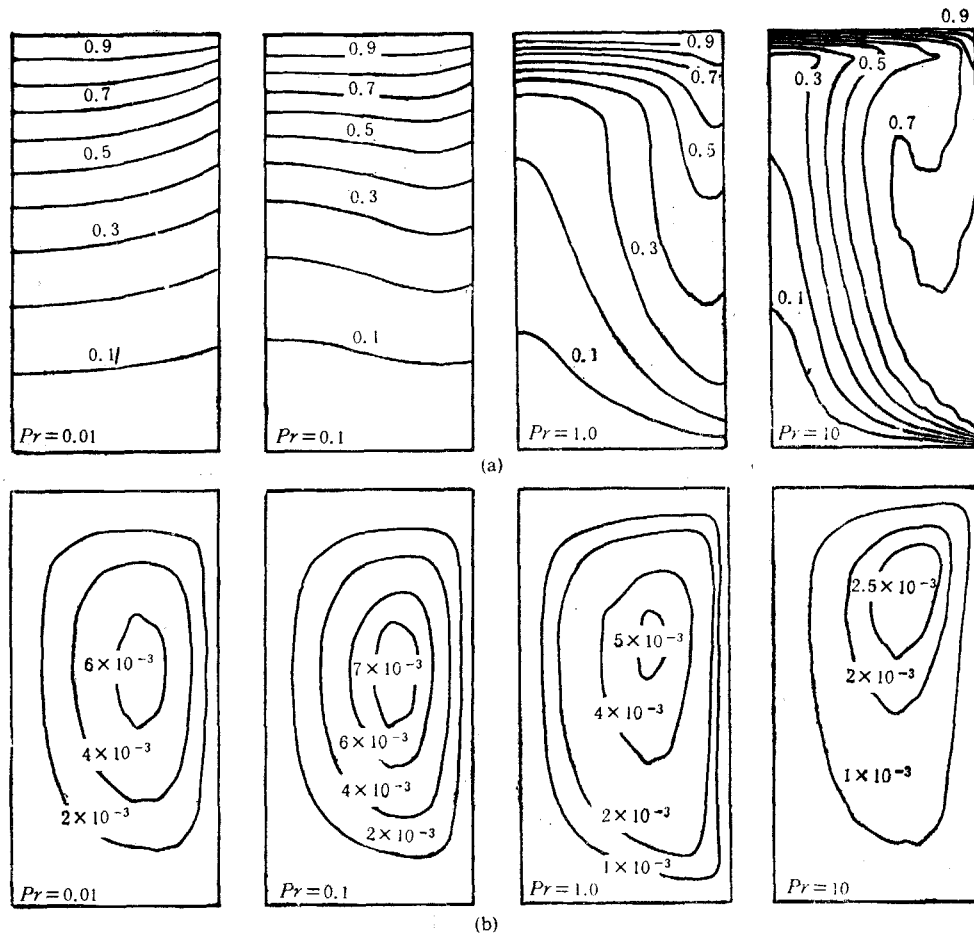


图4 (a) 液桥中的等温线分布 (b) 液桥中的等流函数线

按一定的  $Ma$  数,  $pr$  数 ( $R_0$  数) 变化计算得到的温度分布和流场分别绘制在图 5(a)、5(b) 上. 虽然  $pr$  数相差很大 (0.01~100), 它们却有相似的等温线分布, 但在细节上各有不同. 图 6 表明  $Ma$  数是决定温度分布的主要因素. 从图 5(a) 还可看到, 由于对流的作用, 在热端中心轴附近和冷端自由面附近温度梯度很大, 热边界层很薄,  $pr$  数越小的流体越是如此. 流函数的分布 (图 5(b)) 表明,  $Ma$  相同时,  $pr$  越小,  $R_0$  值越大, 一般说来无量纲流速越大. 流速将通过能量方程 (2.5) 的左端项影响到温度分布, 表面的温度分布又通过边界条件影响涡度方程 (2.4), 再加上自由表面的散热影响, 这些因素耦合在一起, 决定了不同  $pr$  数流体的液桥中的温度场分布的细节差别. 由于  $R_0$  的变化很大虽然 5(a) 图上的温度分布基本相似, 在图 5(b) 上的流场分布仍有较大不同.

#### 四、讨 论

在低雷诺数时, 我们将液固界面处非穿透、非滑移条件分别用于流函数和涡度方程中. 无滑移条件是粘性作用的结果. 当  $R_0$  数逐渐增大时, 粘性边界层越来越薄, 最后会远小于计算网格的宽度, Euler 方程越来越好地描述了液桥中心大部分流体的流动行

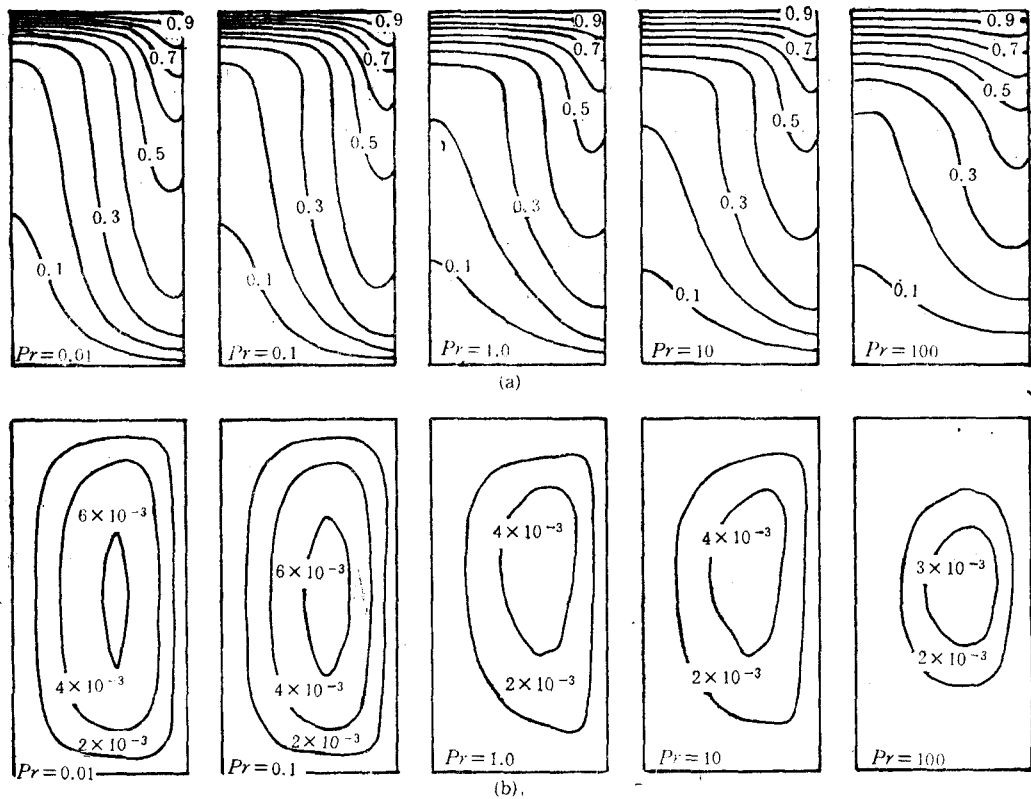


图 5 (a) 液桥中的等温线分布 (b) 液桥中的等流函数线

为,再用上述条件就得不到收敛的数值解。精确的处理应该计算边界层流,将它和主流区匹配起来。悬浮区两端是驻点流,边界层流和主流区相汇合的复杂流动区域,准确地算出流场十分困难,本文采用了近似的处理。高  $R_o$  数时,在液固边界处,仍将不穿透条件用于流函数方程,滑移条件用于涡度方程。边界上的滑移速度由邻近边界的网格外推得到,  $\frac{\partial u}{\partial z} - \xi = 0^{[8]}$ 。没有可能给出液固边界上由非滑移到滑移的逐渐过渡边界条件。这样的近似可以得到收敛的计算结果和近似的物理图象。

我们的数值结果与 B-I. 和 Ostrach<sup>[5]</sup> 与 Zebib<sup>[6]</sup> 等人的结果定性一致。他们按  $R_o$  数相等整理数值结果,得出  $pr$  数( $Ma$  数)的改变会对液桥中的流场和温度分布影响很大的结论。我们除按上述方法分析结果外,在  $Ma$  数相等的条件下对  $pr$  数( $Re$  数)变化时的影响进行了分析和讨论。这时,尽管  $pr$  数相差四个量级,液桥中却有大致相似的温度分布,最大流函数值相差一倍。热毛细对流的驱动力来自液桥自由面上的温度分布,它通过边界条件影响到流场。这表明综合热和动力学效应的  $Ma$  数,在分析与浮区法晶体生长密切相关的热环境时是多个无量纲参数中的敏感参数。

从流体力学的相似理论可知,除几何相似外,需  $R_o$ ,  $Ma$  数相等和有相同的散热条件才能严格地实现液桥流动的动力学相似。也就是说,研究液态金属和半导体材料需用小  $pr$  数流体进行实验。但是这种介质的不透明性,使实验观测难以实现。我们的结

果表明,在我们的计算参数范围内,现有用硅油、硝酸钠等透明介质工作的液桥实验结果,可以用来定性描述在相同  $Ma$  数条件下的液态金属、半导体材料的行为。但是,对不同的  $pr$  数的材料,定量结果会有区别。此外,由于流动的驱动力来自表面张力梯度,液桥周围的热环境对液桥中的流场和温度分布会有重要的影响。

### 参 考 文 献

- [1] Preisser F., Schwabe D. and Scharmann A., Steady and Oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface. *J. Fluid Mech.*, 1983, 129: 545—567.
- [2] Chun C. H. and Wuest W., Experiments on the transition from the steady to the oscillatory Marangoni-convection of a floating zone under reduced gravity effect. *Acta Astronautic*, 1979 6: 1073—1082.
- [3] Kamotani Y. and Kim J., Effect of zone rotation on oscillatory thermocapillary flow in simulated floating zone *Journal of Crystal Growth*, 1988 87: 62—68.
- [4] Fu B-I and Ostrach S., Numerical solution of thermocapillary flows in floating zone. *ASME. PED-10, HTD-29* 1983: 1—9.
- [5] Hadid H. B. and Rox B., Oscillatory buoyancy-driven flow in horizontal liquid-metal layers. Proc. 6th European Symposium on Material Sciences under microgravity conditions, Bordeaux, France, 2—5 December, 1986 (ESA SP-256, February 1987).
- [6] Zebib A., Homsy G. M. and Meiburg E., High Marangoni number convection in a square cavity. *Phys. Fluids*, 1985, 28: 3467—3476.
- [7] 胡文瑞,唐泽眉,热毛细振荡对流的产生机理。中国科学,1990,(2): 169—176。
- [8] 罗奇, P.J., 计算流体力学,科学出版社。1983。

## THE THERMOCAPILLARY CONVECTION IN THE LIQUID BRIDGE WITH DIFFERENT PRANDTL NUMBER

Tang Zemei Hu Wenrui

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080, China)

**Abstract** Due to the progresses of space technology, the manufacture of high quality materials such as the semi-conductors or metal ( $Pr \ll 1$ ) in space is coming true. It is difficult to observe the flow structure and temperature distribution in the liquid bridge of opaque molten semi-conductor or metal. Therefore, in present time, the experiments of thermocapillary convection are mainly conducted in the liquid bridge with transparent medium ( $Pr > 1$ ) such as silicon oil. The purpose of this paper is to study whether the behavior of fluids with small  $Pr$  number can be described by these experimental results of transparent medium, and what is the effects of  $Pr$  number on thermocapillary convection.

The two-dimensional, steady problem of thermocapillary convection in the liquid bridges with different  $Pr$  number, described by vorticity, stream function and energy equations, are numerically studied by Finite Element Method. The results show that the distributions of temperature and flow patterns are qualitatively similar in the liquid bridges with different  $Pr$  number, but the quantitative results are different according to certain Marangoni numbers. In the liquid bridge with smaller  $Pr$  number, the thickness of viscous boundary layer is much smaller than the thermal one. The place of the maximum stream function is shifted from the hot toward the cold rod of the liquid bridge, and the velocity is relatively larger for the case of smaller  $Pr$  number.  $Ma$  number is the sensitive parameter for describing thermocapillary convection. According to the experimental results of transparent medium the behavior of thermocapillary convection of opaque fluids can be qualitatively described.

**Key words** thermocapillary convection, microgravity, numerical simulation