

# Orr-Sommerfeld 方程特征值 问题的一个展开式\*

王发民

(中国科学院力学研究所)

黄泽远

(新加坡国立大学数学系)

## AN EXPANSION SOLUTION OF ORR-SOMMERFELD EIGENVALUE PROBLEM FOR POISEUILLE FLOW

Wang Fa-min

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Ng T. W.

(Department of Mathematics, National University of Singapore)

### Abstract

A stability problem of plane Poiseuille flow is studied. The Orr-Sommerfeld eigenvalue problem is treated by a double power series expansion in terms of Reynolds number  $R$  and wavelength  $\alpha$ . The coefficients up to the cubic terms in the expansion are calculated for a range from  $R=R_c$  to  $R=10^{10}$ . A finite element method is applied to the Orr-Sommerfeld eigenvalue problem. The results obtained are easy to compute and more accurate than those obtained by other known methods. The numerical results for the neutral curve and the eigenvalue spectrum for the unstable mode are extended to higher Reynolds numbers. Accurate values for the critical point are found to be  $R_c=5772.2218$  and  $\alpha_c=1.020547$ .

### 1. 引言

众所周知,大量粘性剪切流的稳定性问题都可归结为 Orr-Sommerfeld 方程特征值问题来求解。在这篇文章中该四阶复系数微分方程的特征值问题被转化为讨论在  $(\alpha_0, R_0)$  邻域内的双重幂级数

\* 1988年8月23日收到。

$$i\alpha c = i\alpha_0 c_0 + \sum_{\substack{i=0 \\ j \neq 0 \\ i+j \neq 0}} a_{ij} (\alpha - \alpha_0)^i (R - R_0)^j \quad (1.1)$$

的解的问题。对于给定的雷诺数  $R_0$ ，波速  $-i\alpha c$  的实部在  $\alpha_0$  处取极大值，也就是说  $(\alpha_0, R_0)$  是最不稳定的扰动波模型。

Orr-Sommerfeld 方程的求解问题，大部分工作都集中到逼近特征关系式  $F(\alpha, \alpha R, c) = 0$  上。在这方面早期的理论工作有 Heisenberg (1924)，Tollmien (1929) 和 C. C. Lin (1955) 等。自后 Eagles (1969)，Reid (1972, 1974) 和 W. D. Lakin 和 Reid (1978) 等都做了大量的卓有成效的发展工作。

第一个用数值方法求解 Orr-Sommerfeld 方程的特征值问题，是 Thomas 为了解决在当时对逼近解的争论而做的工作。他的结果说明了 Heisenberg (1924) 和 Lin (1954) 的结论——平面 Poiseuille 流的确是不稳定的，是正确的。从此各种各样的数值方法相继地出现了。例如 Orszag (1971) 应用 Chebyshev 展开式求出了较为准确的结果。Davey (1977) 和 (Kleiser) 应用 Riccati 方法得出了高雷诺数的数值结果。但是有限元法应用于这一问题目前还是比较少见的。

将 Orr-Sommerfeld 方程的特征值，在  $\alpha$ - $R$  平面内展开为  $R$  和  $\alpha$  的双重幂级数，最初的工作是 Stewartson 和 Stuart (1971) 为了将 Stuart 的弱非线性理论发展到一个波系，所求得的下述展开式

$$-i\alpha c = i\alpha_c c_c + i\alpha_1 (\alpha - \alpha_c) - a_2 (\alpha - \alpha_c)^2 + d(R - R_c) \quad (1.2)$$

式中  $R_c$  和  $\alpha_c$  表示临界雷诺数和它对应的扰动波波数。Dr. Cuisins 完成了该式系数的计算。目前的工作是为了 Diprima 教授和我们在研究压力膜和美国布朗大学机械系研究人工供氧系统等两个非定常流稳定性分析中提出的下述展开式

$$\gamma = \gamma_0 + \sum_{\substack{i=0 \\ j=0 \\ i+j \neq 0}} m_{ij} (f - f_0)^i (R - R_0)^j, \quad (1.3)$$

$$\gamma = \alpha R, \quad (1.4)$$

$$f = \alpha R (c + 2/3) \quad (1.5)$$

而做的工作。

为了求解 (1.1) 式中的系数  $a_{ij}$ ，在第 3 节中我们提出了一种简便、直接的有限元  $H$ - $P$  方法。所得计算结果与 Davey 用 Riccati 方法的结果相一致。Davey 教授当时在  $R < 60000$  范围内计算了 2 阶展开式的系数。作为该展开式的一个直接应用，我们在第 4 节中应用 (1.1) 在  $R_c$  到  $10^6$  范围内计算了平面 Poiseuille 流的中性曲线，所得结果与直接求解 Orr-Sommerfeld 方程有很好的吻合。且在  $R < 10000$  时与 Reynolds 和 Potter 的结果一致，但是在  $R = 10^6 \sim 10^7$  范围内与 Reid 的逼近解有较大的差别，只有当  $R > 10^8$  时两个结果才比较接近。这说明 Reid 的近似解公式只有当  $R \geq 10^8$  时才比较适用。同时为了较全面地认识高雷诺数下平面 Poiseuille 流的稳定性问题，我们详细地计算了该流体不稳定性模型的特征值谱线，这一结果对认识流体粘性既产生阻尼又影响剪切边界层的动态平衡是有意义的。本文所用计算方法比 Chebyshev 函数展开法更适用于高雷诺数的计算，与 Riccati 方法比较又有直接、简便和不用初始值估计等优

点。在第 5 节中,我们简略地说明了展开式 (1.1) 的收敛性和应用范围。

## 2. 基本概念

让我们考虑粘性流体通过两个距离为  $2h$  的平行平板 (假定流体是不可压缩的)。在流体做层流运动时,压力梯度产生一个与  $x$  轴相独立的速度,它在槽的中轴线上取最大值  $U_0$ 。为了使我们的分析无量纲化,取  $h, U_0$  及  $h/U_0$  分别为长度、速度和时间的参照系。取平行于流体运动的方向为  $x$  轴,而与它垂直的方向为  $z$  轴。设  $U, W$  分别为对应的速度分量,  $\psi$  为流函数,则流体运动满足 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} = R^{-1} \nabla^2 \zeta, \quad (2.1a)$$

式中

$$\zeta = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = -\nabla^2 \psi, \quad (2.1b)$$

$$R = U_0 h / \nu, \quad (2.1c)$$

上式中  $R$  为雷诺数,  $\nu$  表示流体的动量粘度。在没有任何扰动的理想情况下,流体以如下速度做平行于平板的运动:

$$\bar{U} = \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 1 - z^2. \quad (2.2)$$

设流体所受的小扰动干扰波模型是

$$\psi' = \phi \exp\{i\alpha(x - ct)\} + \bar{\phi} \exp\{-i\alpha(x - ct)\}, \quad (2.3)$$

式中记号“ $\sim$ ”表示共轭复数,  $\alpha$  是波数 (不失一般性这里设  $\alpha > 0$ ),  $c$  是波速 ( $c = c_r + ic_i$ )。则流体运动可以表示为

$$\psi = \psi_0 + \psi'. \quad (2.4)$$

将 (2.3) 和 (2.4) 代入 (2.1), 可以得到振幅函数  $\phi$  满足的方程

$$(\bar{U} - c)(D^2 - \alpha^2)\phi - \bar{U}''\phi + i(\alpha R)^{-1}(D^2 - \alpha^2)^2\phi = 0. \quad (2.5a)$$

它的边界条件是

$$\phi = D\phi = 0, \text{ 当 } z = \pm 1. \quad (2.5b)$$

式 (2.5) 叫做 Orr-Sommerfeld 方程, 且这里  $D = \frac{d}{dz}$  表示对  $z$  的导数。方程 (2.5a) 和齐次边界条件构成了下面的特征关系式

$$F\left(\alpha, \alpha R, \frac{\omega}{\alpha}\right) = 0 \quad (2.6)$$

$F$  是含有三个参数  $\alpha, R, c$  的半纯函数,  $c = \frac{\omega}{\alpha} = c_r + ic_i$  是复数。如果  $\alpha c_i > 0$  则扰动波指数状扩大, 流体运动不稳定。如果  $\alpha c_i < 0$ , 则扰动波以指数形式衰减, 运动趋于稳态。

本文的主要目的是寻求波速  $-iac = -i\omega$  的 Taylor 展开式。在  $\alpha$ - $R$  平面内, 尽管这儿存在着无数个对  $(\alpha, R)$ , 而我们感兴趣的是使  $\omega$  的虚部取最大值的点  $(\alpha_0, R_0)$ :

它对应着流体的最不稳定性模型。我们在  $(\alpha_0, R_0)$  邻域内,如图 1 所示,将  $-i\alpha c$  展开为下面形式的双重幂级数

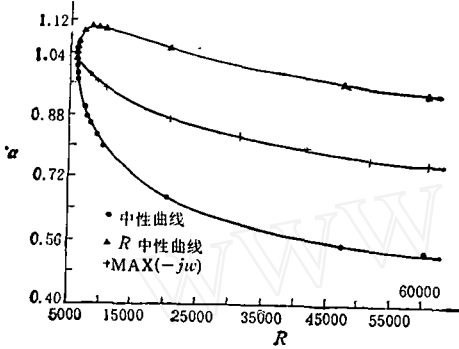


图 1 中性曲线

$$i\omega(\alpha, R) = i\alpha_0 c_0 + a_{10}\alpha_1 + a_{01}R_1 + a_{20}\alpha_1^2 + a_{11}\alpha_1 R_1 + a_{02}R_1^2 + a_{30}\alpha_1^3 + a_{21}\alpha_1^2 R_1 + a_{12}\alpha_1 R_1^2 + a_{03}R_1^3 + \dots, \quad (2.7)$$

其中

$$\alpha_1 = \alpha - \alpha_0, \quad (2.8)$$

$$R_1 = R - R_0 \quad (2.9)$$

系数  $a_{ij}$  是不依赖  $\alpha_1$  和  $R_1$  的复常数,且由  $\alpha$  的定义知  $a_{10}$  是纯虚数(见 Stewartson 和 Stuart (1972)).

同理,我们可以将特征函数  $\phi$  展开成级数

$$\begin{aligned} \phi = & \phi_0(z) + \alpha_1 \phi_{10}(z) + R_1 \phi_{01}(z) + \alpha_1^2 \phi_{20}(z) \\ & + \alpha_1 R_1 \phi_{11}(z) + R_1^2 \phi_{02}(z) + \alpha_1^3 \phi_{30}(z) \\ & + \alpha_1^2 R_1 \phi_{21}(z) + \alpha_1 R_1^2 \phi_{12}(z) + R_1^3 \phi_{03}(z) + \dots, \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中  $\phi_{ij}$  是独立于  $\alpha_1$  和  $R_1$  的复值函数。

将 (2.7) 到 (2.10) 代入方程 (2.6) 并比较  $\alpha_1$  和  $R_1$  的幂次,我们得下述序列方程:

$$L(\phi_0) = (\bar{U} - c)(D^2 - \alpha_0^2)\phi_0 - \bar{U}''\phi_0 + i(\alpha_0 R_0)^{-1}(D^2 - \alpha_0^2)^2 \phi_0 = 0, \quad (2.11)$$

$$L(\phi_{ij}) = -N_{ij} + a_{ij}G(\phi_0)R. \quad (2.12)$$

它们的边界条件是

$$\begin{cases} \phi_0(\pm 1) = D\phi_0(\pm 1) = 0, \\ \phi_{ij}(\pm 1) = D\phi_{ij}(\pm 1) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

函数  $\phi_0$  满足 Orr-Sommerfeld 方程,而  $\phi_{ij}$  所满足的方程左边有与方程 (2.11) 一样的微分算子,右面是对以前逼近求得的函数  $\phi_{lk}$  ( $l < i, k < j$ ) 进行某些微分运算记为  $N_{ij}$  和  $G$  所得的值。

式中  $N_{ij}$  和  $G$  可以由下面的关系式求出:

$$N_{10} = L_{10}(\phi_0), \quad (2.14)$$

$$N_{01} = L_{01}(\phi_0), \quad (2.15)$$

$$N_{20} = L_{10}(\phi_{10}) - a_{10}R_0G(\phi_{10}) + L_{20}(\phi_0), \quad (2.16)$$

$$N_{11} = L_{10}(\phi_{01}) - a_{10}R_0G(\phi_{01}) + L_{01}(\phi_{10}) - a_{01}R_0G(\phi_{10}) + L_{11}(\phi_0), \quad (2.17)$$

$$N_{02} = L_{01}(\phi_{01}) - a_{01}R_0G(\phi_{01}) + L_{02}(\phi_0), \quad (2.18)$$

$$N_{30} = L_{10}(\phi_{20}) - a_{10}R_0G(\phi_{20}) + L_{20}(\phi_{10}) - a_{20}R_0G(\phi_{10}) + L_{30}(\phi_0), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} N_{21} = & L_{10}(\phi_{11}) - a_{10}R_0G(\phi_{11}) + L_{01}(\phi_{20}) - a_{01}R_0G(\phi_{20}) \\ & + L_{20}(\phi_{01}) - a_{20}R_0G(\phi_{01}) + L_{21}(\phi_0), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} N_{12} = & L_{10}(\phi_{02}) - a_{10}R_0G(\phi_{02}) + L_{01}(\phi_{11}) - a_{01}R_0G(\phi_{11}) \\ & + L_{02}(\phi_{10}) - a_{02}R_0G(\phi_{10}) + L_{11}(\phi_{01}) \end{aligned}$$

$$-a_{11}R_0G(\phi_{01}) + L_{12}(\phi_0), \quad (2.21)$$

$$N_{03} = L_{01}(\phi_{02}) - a_{01}R_0G(\phi_{02}) + L_{02}(\phi_{01}) - a_{02}R_0G(\phi_{01}) + L_{03}(\phi_0), \quad (2.22)$$

$$G = (D^2 - \alpha_0^2)\phi_0. \quad (2.23)$$

式中  $L_{ij}$  表示微分算子

$$L_{10} = iR_0[-(\bar{U} - i4\alpha_0/R_0)(D^2 - \alpha_0^2) + 2\alpha_0^2(\bar{U} - c_0) + \bar{U}''], \quad (2.24)$$

$$L_{01} = -i\alpha_0[(\bar{U} - c_0)(D^2 - \alpha_0^2) - \bar{U}''], \quad (2.25)$$

$$L_{20} = -2[(D^2 - 3\alpha_0^2)] + iR_0[2\alpha_0(\bar{U} - ia_{10}) + \alpha_0(\bar{U} - c_0)], \quad (2.26)$$

$$L_{11} = 2\alpha_0R_0a_{01} + i[-(\bar{U} - ia_{10})(D^2 - \alpha_0^2) + 2\alpha_0^2(\bar{U} - c_0) + \bar{U}''], \quad (2.27)$$

$$L_{02} = -a_{01}(D^2 - \alpha_0^2), \quad (2.28)$$

$$L_{30} = 4\alpha_0 + 2\alpha_0R_0a_{20} + iR_0(\bar{U} - a_{10}), \quad (2.29)$$

$$L_{21} = a_{01}R_0 + 2\alpha_0R_0a_{11} - a_{20}(D^2 - \alpha_0^2) + i[2\alpha_0(\bar{U} - ia_{10}) + \alpha_0(\bar{U} - c_0)], \quad (2.30)$$

$$L_{12} = 2\alpha_0a_{01} + 2\alpha_0R_0a_{02} - a_{11}(D^2 - \alpha_0^2), \quad (2.31)$$

$$L_{03} = -a_{02}(D^2 - \alpha_0^2). \quad (2.32)$$

根据微分方程的伴随理论, 方程 (2.12) 可解的充分必要条件是方程右端项与它的伴随系统的根正交, 即积分

$$\int_{-1}^1 \phi_a [N_{ij} - R_0a_{ij}G(\phi_0)] dz = 0, \quad (2.33)$$

式中  $\phi_a$  满足方程

$$L_a(\phi_a) = [(\bar{U} - c)(D^2 - \alpha_0^2) - 2D\bar{U}D + i(\alpha_0R_0)^{-1}(D^4 - 2\alpha_0^2D^2 + \alpha_0^4)]\phi_a = 0 \quad (2.34a)$$

和边界条件

$$\phi_a(\pm 1) = D\phi_a(\pm 1) = 0. \quad (2.34b)$$

由式 (2.33), 我们可以求得展开式 (2.7) 的系数

$$a_{ij} = \frac{\int_{-1}^1 \phi_a N_{ij} dz}{R_0 \int_{-1}^1 \phi_a (D^2 - \alpha_0^2) \phi_0 dz}. \quad (2.35)$$

下面我们将讨论方程 (2.11) 到 (2.34) 的数值解法和展开式 (2.7) 的系数计算问题。

### 3. 系数 $a_{ij}$ 的计算和方程数值解

第二节中给出的所有方程, 由于四阶导数项的系数  $i(\alpha_0R_0)^{-1}$  在高雷诺数下是个小量级的量, 给数值求解工作带来一定的困难 [见 Thomas], 因而传统的有限元方法和有限差分方法很难达到本文要求的精度。我们采用下面的  $H-P$  有限元方法, 通过适当选取有限元基函数和在粘性边界层选取较细密元素两条途径, 求得了比较准确的数值结果。

求解系数  $a_{ij}$  的计算步骤是:

1. 对于给定的  $R_0$  计算中性曲线的上下分枝  $(\alpha_1R_0)$  与  $(\alpha_2, R_0)$ 。

2. 求解使波速  $-i\omega$  取最大实数值的点  $(\alpha_0, R_0)$ .

3. 对于给定的  $(\alpha_0, R_0)$  通过 Orr-Sommerfeld 方程 (2.11) 和它的伴随系统 (2.34) 求解特征函数  $\phi_0$  与  $\phi_{0*}$ .

4. 依照下标数对 (10), (01), (20), (11), (02), (30), (21), (12), (03) 的次序依次求解  $\phi_{ji}$  和系数  $a_{ji}$ .

中性曲线上上下分枝上的点  $(\alpha_1, R_0)$  和  $(\alpha_2, R_0)$  是通过求解方程 (2.11) 并采用 Muller 方法得到的.

求  $-i\omega$  取最大值的点  $(\alpha_0, R_0)$  的程序是, 首先应用点  $(\alpha_1^0, R_0)$ ,  $(\alpha_2^0, R_0)$  和某一点  $(\alpha_3^0, R_0)$  ( $\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2$ ) 求得一个二次复系数插值多项式, 然后通过该多项式求得使  $-i\omega$  取极大值的点  $(\alpha_1^1, R_0)$ , 第三步应用  $(\alpha_1^1, R_0)$  代替第一步中使  $-i\omega$  取值较小的点并重复上述步骤直至达到要求的精度.

Orr-Sommerfeld 方程与它的伴随系统 (2.34) 有奇函数和偶函数两组解. 从物理角度考虑, 我们仅讨论影响该流体不稳定性的偶数解. 特征函数  $\phi_0$  和  $\phi_{0*}$  按照一定的要求进行正交化, 如取  $|\phi_0| = 1$ ,  $|\phi_{0*}| = 2$ . 为了说明基本方法, 我们设被求解的方程为

$$L^*(\phi) = [(\bar{U} - c)(D^2 - \alpha_0^2) - f(z) + i(\alpha_0 R_0)^{-1}(D^4 - 2\alpha_0^2 D^2 + \alpha_0^4)]\phi = 0, \quad (3.1)$$

式中函数  $f(z)$  分别对应于方程 (2.11) 和 (2.34) 代表  $D^2\bar{U}$  或者  $D\bar{U}D$  两项.

$$\Omega = \{z | z \in [-1, 0]\}. \quad (3.2)$$

设  $s_n$  为  $\Omega$  的某个有限剖分,  $\phi$  的逼近空间为  $\phi^n \in H^2(\Omega)$ , 应用 Galerkin 原理得

$$\int_{s_n} N_i [(\bar{U} - c)(D^2 - \alpha_0^2) - f(z) + i(\alpha_0 R_0)^{-1}(D^2 - 2\alpha_0 D^2 + \alpha_0^4)]\phi^n = 0, \quad (3.3)$$

$$\forall N_i \in H^2(\Omega), \phi^n \in H^2(\Omega).$$

分部积分两次并应用边界条件得

$$a(\phi^n, N_i) = c_0 b(\phi^n, N_i), \quad (3.4)$$

$$a(\phi^n, N_i) = \int_{s_n} [\bar{U}(DN_i D\phi^n - \alpha_0^2 N_i \phi^n) + N_i D\bar{U}D\phi^n + f(z)N_i \phi^n - i(\alpha_0 R_0)^{-1}(D^2 N_i D^2 \phi^n + 2\alpha_0^2 DN_i D\phi^n + \alpha_0^4 N_i \phi^n)] J dt, \quad (3.5)$$

$$b(\phi^n, N_i) = \int_{s_n} (DN_i D\phi^n - \alpha_0^2 N_i \phi^n) J dt. \quad (3.6)$$

我们选用 7 阶 Hermite 多项式  $H_j(t)$  作为插值函数和权函数. 插值多项式  $H_j(t)$  可以由下述条件求得:

$$D^i H_j(1) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j - 1, \\ 0, & \text{当 } i \neq j - 1, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$D^i H_j(-1) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j - 5, \\ 0, & \text{当 } i \neq j - 5, \end{cases} \quad (3.8)$$

式中  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  且

$$t = \left( z - \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \frac{2}{n} \quad (-1 \leq t \leq 1), \quad (3.9a)$$

$$n = z_2 - z_1. \quad (3.9b)$$

这里我们用  $z_1$  和  $z_2$  表示元素的节点, 特征函数则可以表示为下述插值函数:

$$\phi^n(z) = \underline{H} \cdot \phi, \quad (3.10a)$$

$$H = [H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8]^T, \quad (3.10b)$$

$$\phi = [\phi^1, D\phi^1, D^2\phi^1, D^3\phi^1, \phi^2, D\phi^2, D^2\phi^2, D^3\phi^2], \quad (3.10c)$$

式中  $\phi^1$  和  $\phi^2$  以其各阶导数分别表示它们在节点  $z_1$  和  $z_2$  处的函数值(导数值).

将插值函数和权函数  $H_i(z)$  代入方程 (3.4), 我们可以得到下面的元素矩阵方程

$$K \cdot \phi = cM \cdot \phi, \quad (3.11)$$

式中  $K$  和  $M$  为  $8 \times 8$  阶复矩阵, 且它们的元素分别是

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 [\bar{U}(DH_i DH_j - \alpha_0^2 H_i H_j) + D\bar{U} H_i DH_j + f(z) H_i H_j - i(\alpha_0 R_0)^{-1}(D^2 H_i D^2 H_j + 2\alpha_0^2 DH_i DH_j + \alpha_0^4 H_i H_j)] J dt, \quad (3.12)$$

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 (DH_i DH_j - \alpha_0^2 H_i H_j) J dt, \quad (3.13a)$$

式中

$$J = \frac{dz}{dt} = \frac{2}{n}. \quad (3.13b)$$

所有上面的积分及下面将要给出的积分都是应用 Gauss 求积法计算的. 式 (3.11) 的广义复矩阵特征值问题则应用 LR 方法的求解程序.

在求解非齐次序列方程 (2.12) 时, 为了保持运算精度, 元素分布及基函数在逐次求解和右端项的计算中均与求解  $\phi_0$  时相同. 由于函数在元素节点处的 1 到 3 阶导数值已经求得, 在计算右端项的微分时, 不会再有精度损失. 其基本想法以求解  $\phi_{10}$  及  $a_{10}$  为例说明如下:

应用 (2.35) 求解  $a_{10}$  时, 我们需要计算下面的积分:

$$\int_{z_n} i R_0 \phi_n^2 [-(\bar{U} - 4\alpha_0^2/R_0)(D^2 - \alpha_0^2) + 2\alpha_0^2(\bar{U} - c_0) + D^2 \bar{U}] \phi_0^2 J dt, \quad (3.14)$$

$$\int_{z_n} i R_0 \phi_n^2 (D^2 - \alpha_0^2) \phi_0^2 J dt. \quad (3.15)$$

代入解函数  $\phi_0^2$ ,  $\phi_n^2$  并分部积分得其矩阵表示式

$$A_e = \phi_e B \phi_0, \quad (3.16)$$

$$C_e = \phi_e D \phi_0, \quad (3.17)$$

式中矩阵  $B$  和  $D$  的元素分别为

$$B_{ii} = i R_0 \int_{-1}^1 [(\bar{U} - 4\alpha_0^2/R_0)(DH_i DH_i + \alpha_0^2 H_i H_i) + 2\alpha_0^2(\bar{U} - c_0) H_i H_i + D\bar{U} H_i DH_i + D^2 \bar{U} H_i H_i] J dt, \quad (3.18)$$

$$D_{ii} = R_0 \int_{-1}^1 (-DH_i DH_i - \alpha_0^2 H_i H_i) J dt, \quad (3.19)$$

由 (2.35) 得

$$a_{10} = \left( \sum_{e=1}^N A_e \right) / \left( \sum_{e=1}^N C_e \right), \quad (3.20)$$

式中  $N$  表示  $s_n$  剖分中总的元素个数.

$\phi_{10}$  所满足的方程可以用矩阵形式表示如下:

$$(K - cM)\phi_{10} = (B - a_{10}D)\phi_0. \quad (3.21)$$

对于计算结果我们进行了细致的检验, 展开式(2.7)的系数  $a_{ij}$  经过与相应的伴随系统比较, 有 5 位有效数字是一致的。特征值  $c$  经过相应的比较可知有 8 位有效数字是可信的。特征函数与其伴随系统的解则应用下式

$$c_r = \frac{\int_{-1}^0 [\bar{U}(|D\phi_a|^2 + \alpha_0^2|\phi_a|^2) - |\phi_a|^2] dz}{\int_{-1}^0 [ |D\phi_a|^2 + \alpha_0^2|\phi_a|^2 ] dz} \quad (3.22)$$

和

$$c_r = \frac{P + \text{Real}(Q)}{\int_{-1}^0 [ |D\phi_0|^2 + \alpha_0^2|\phi_0|^2 ] dz}, \quad (3.23)$$

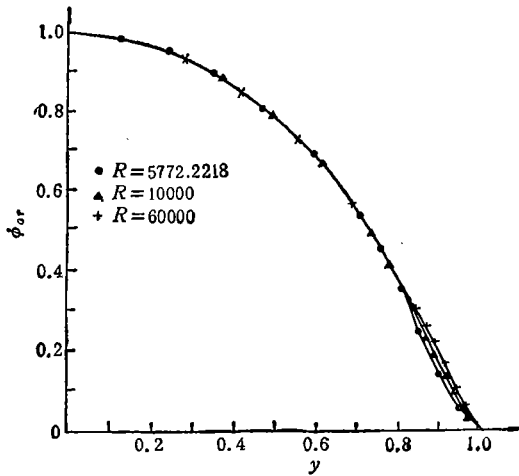


图2 O-S 方程特征解(实部)

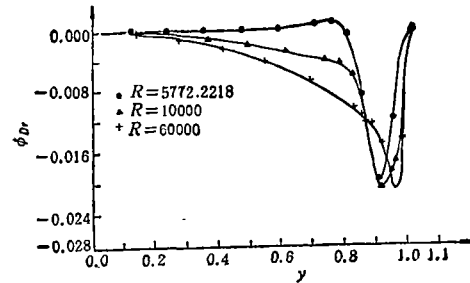


图3 O-S 方程特征解(虚部)

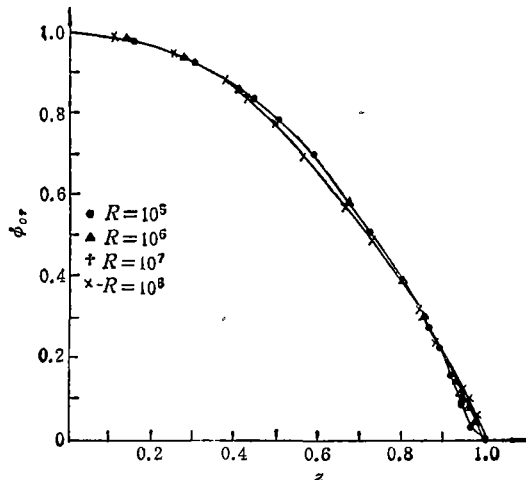


图4 O-S 方程特征解(实部)

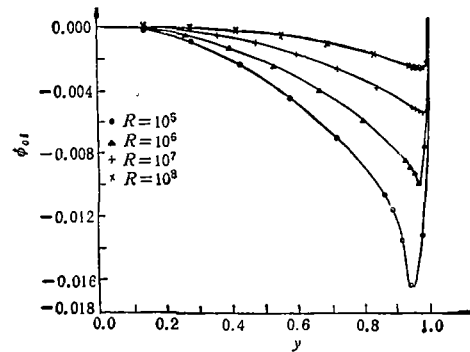


图5 O-S 方程特征解(虚部)



表 1 有限元素法与其他常用算法的比较

$O=1$	$R$	$c_r$	$c_i$
A	$10^4$	0.23753	+0.00374
B	$10^4$	0.2375262	+0.0037397
C	$10^4$	0.23752649	+0.00373967
D	$10^4$	0.23752649	+0.00376967
E	$10^4$	0.2375259	+0.0037404
A	$10^3$	0.14592	-0.01504
B	$10^3$	0.145925	-0.01504
C	$10^3$	0.145924	-0.01504
A	$10^2$	0.0665925	-0.01398327
B	$10^2$	0.066591	-0.013983
C	$10^2$	0.0665926	-0.0139832
A	$10^1$	0.0306413	-0.00726049
B	$10^1$	0.030640	-0.007261
C	$10^1$	0.036416	-0.00726040
A	$10^0$	0.01417134	-0.00351239
B	$10^0$	0.014170	-0.003513
C	$10^0$	0.014175	-0.00351240
A	$10^0$	0.0065663	-0.00166002
B	$10^0$	0.006565	-0.001660
C	$10^0$	0.0065665	-0.00166000
A	$10^{10}$	0.003045	-0.000777
C	$10^{10}$	0.00304520	-0.00077700

注 A) RICCATI 法 (A. DAVEY 1973)  
 B) RICCATI 法 (L. KLEISER 1979)  
 C) PRESENT FINITE ELEMENT 法  
 D) CHEBYCHEV 法 (A. ORSZAG 1971)  
 E) FINITE DIFFERENCE 法 (L. THOMAS 1953)

$$P = \int_{-1}^0 [\bar{U} |D\phi_0|^2 + \bar{U} |\phi_0|^2 + \bar{U}'''] dz, \quad (3.24)$$

$$Q = \int_{-1}^0 \bar{U} (D\phi_0) \phi_0 dz \quad (3.25)$$

进行了检验。图 2—5 绘出了  $\alpha = \alpha_0, R = R_0$  时特征函数图象。表 1 给出了各种方法计算 Orr-Sommerfeld 特征函数的精确度比较。可以看出上面的 H-P 方法是比较好的。

应该指出,上述 H-P 有限元素法不仅精度高,而且比较经济。该方法用 10 个元素在 IBM 4341 机上用 58 秒 CPU 的结果与有限差分法用 300 个分点和大约三倍的时间计算的临界雷诺数还要准确三位有效数字。

#### 4. 平面 Poiseuille 流的稳定性

作为展开式 (2.1) 的一个应用,我们应用它近似 Orr-Sommerfeld 方程对于平面

Poiseuille 流的特征方程  $F\left(\alpha, \alpha R, \frac{\omega}{\alpha}\right) = 0$ , 可以比较直接地认识该流体稳定性的某些特征。这儿我们将做下面两个工作:

1. 在雷诺数较高范围内计算平面 Poiseuille 流的中性曲线。
2. 对于不稳定模型 ( $c_i > 0$ ) 计算 Orr-Sommerfeld 方程的特征值谱线。

在对应于流体最不稳定模型的点  $(\alpha_0, R_0)$  邻域内, 由方程  $F\left(\alpha, \alpha R, \frac{\omega}{\alpha}\right) = 0$  解出扰动波波速

$$-i\alpha c = G(\alpha, R),$$

并将半纯函数  $G(\alpha, R)$  展开成级数

$$\begin{aligned} -i\alpha c = & -i\alpha_0 R_0 + a_{10}(\alpha - \alpha_0) + a_{01}(R - R_0) + a_{20}(\alpha - \alpha_0)^2 \\ & + a_{11}(\alpha - \alpha_0)(R - R_0) + a_{02}(R - R_0)^2 + a_{30}(\alpha - \alpha_0)^3 \\ & + a_{21}(\alpha - \alpha_0)^2(R - R_0) + a_{12}(\alpha - \alpha_0)(R - R_0)^2 \\ & + a_{03}(R - R_0)^3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

令  $c_i = 0$ , 在等式两边取实部, 得一个实系数的三次代数方程

$$\begin{aligned} \alpha_0 c_{0r} + a_{10r}(\alpha - \alpha_0) + a_{01r}(R - R_0) + a_{20r}(\alpha - \alpha_0)^2 \\ + a_{11r}(\alpha - \alpha_0)(R - R_0) + a_{02r}(R - R_0)^2 + a_{30r}(\alpha - \alpha_0)^3 \\ + a_{21r}(\alpha - \alpha_0)^2(R - R_0) + a_{12r}(\alpha - \alpha_0)(R - R_0)^2 \\ + a_{03r}(R - R_0)^3 = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

该方程有三个根, 其中一个模大于 1 的根, 另外两个根分别对应于中性曲线的上下分枝。

在方程 (4.1) 两边取虚部, 且令  $c_i = 0$ , 我们得到计算中性曲线上特征值  $c_r$  的公式

$$\begin{aligned} c_r = \{ & -\alpha_0 c_{0r} + a_{10i}(\alpha - \alpha_0) + a_{01i}(R - R_0) + a_{20i}(\alpha - \alpha_0)^2 \\ & + a_{11i}(\alpha - \alpha_0)(R - R_0) + a_{02i}(R - R_0)^2 + a_{30i}(\alpha - \alpha_0)^3 \\ & + a_{21i}(\alpha - \alpha_0)^2(R - R_0) \\ & + a_{12i}(\alpha - \alpha_0)(R - R_0)^2 + a_{03i}(R - R_0)^3 \} / \alpha. \end{aligned} \quad (4.3)$$

在表 2 中我们给出了部分关于上式中的系数  $a_{ij}$  的值 (详细结果可参考王发民的博士论文)。表 3 中给出了由 (4.2) 和 (4.3) 求得的中性曲线上  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的值及对应的特征值实部  $c_r$  的值。为了检验该展开式的精度, 我们对上面的结果与直接求解 Orr-Sommerfeld 方程的结果进行了比较, 可以看出它们是一致的。图 1 绘出了该中性曲线由  $R = R_c$  到 60000 的图形。

为了更清楚地认识平面 Poiseuille 流的稳定性特征, 我们在  $\alpha$ - $R$  平面上对于给定的  $R = R_0$ , 通过  $\alpha_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}$ ,

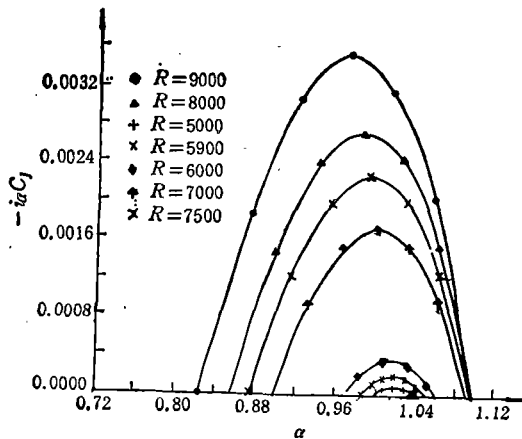


图 6 O-S 方程特征值谱线

表 2 展开式中的系数  $a_{ij}$  数值表

$R = 5772.2218$	$a = 1.020547$	$c = 0.26400021$	
$a_{10} = 0.176315E - 06$	$- 0.393099i$	$a_{01} = 0.168251E - 05$	$+ 0.811277E - 05i$
$a_{20} = -0.186714$	$- 0.274817E - 01i$	$a_{11} = -0.792660E - 05$	$+ 128277E - 04i$
		$a_{02} = -0.360564E - 09$	$- 0.788118E - 04i$
$a_{30} = -0.118845$	$+ 0.146123i$	$a_{21} = -0.974167E - 05$	$+ 0.792465E - 05i$
$a_{12} = 0.460004E - 09$	$- 0.121995E - 08i$	$a_{03} = 0.570896E - 13$	$+ 0.945975E - 13i$
$R = 5800$	$a = 1.019961$	$c = 0.26371161 + 0.4560200E - 04i$	
$a_{10} = -0.594957E - 06$	$- 0.382711i$	$a_{01} = 0.166723E - 05$	$+ 0.806174E - 05i$
$a_{20} = -0.186775$	$- 0.275190E - 01i$	$a_{11} = -0.788973E - 05$	$+ 0.127511E - 04i$
		$a_{02} = -0.356195E - 09$	$- 0.779582E - 09i$
$a_{30} = -0.118993$	$+ 0.146307i$	$a_{21} = -0.969843E - 05$	$+ 0.789138E - 05i$
$a_{12} = 0.456044E - 09$	$- 0.120678E - 08i$	$a_{03} = 0.561335E - 13$	$+ 0.931392E - 13i$
$R = 5900$	$a = 1.017869$	$c = 0.26268537 + 0.2068536E - 04i$	
$a_{10} = -0.136806E - 05$	$- 0.381334$	$a_{01} = 0.161391E - 05$	$+ 0.788243E - 05i$
$a_{20} = -0.186989$	$- 0.276557E - 01i$	$a_{11} = -0.775970E - 05$	$+ 0.124816E - 04i$
		$a_{02} = -0.340792E - 09$	$- 0.749923E - 09i$
$a_{30} = -0.119528$	$+ 0.146954i$	$a_{21} = -0.954726E - 05$	$+ 0.777232E - 05i$
$a_{12} = 0.441914E - 09$	$- 0.116097E - 08i$	$a_{03} = 0.528550E - 13$	$+ 0.88140E - 13i$
$R = 6000$	$a = 1.01581$	$c = 0.26167877 + 0.363642E - 04i$	
$a_{10} = -0.377997E - 06$	$- 0.379985i$	$a_{01} = 0.156307E - 05$	$+ 0.770984E - 05i$
$a_{20} = -0.187197$	$- 0.277942E - 01i$	$a_{11} = -0.763365E - 05$	$+ 0.122220E - 04i$
		$a_{02} = -0.326296E - 09$	$- 0.721845E - 09i$
$a_{30} = -0.120063$	$+ 0.147585i$	$a_{21} = -0.940149E - 05$	$+ 0.765630E - 05i$
$a_{12} = 0.428379E - 09$	$- 0.111762E - 08i$	$a_{03} = 0.498161E - 13$	$+ 0.834860E - 13i$
$R = 7000$	$a = 0.99701$	$c = 0.25258452 + 0.17222E - 02i$	
$a_{10} = -0.146764E - 05$	$- 0.367828i$	$a_{01} = 0.116101E - 05$	$+ 0.628865E - 05i$
$a_{20} = -0.189039$	$- 0.291421E - 01i$	$a_{11} = -0.656176E - 05$	$+ 0.100752E - 04i$
		$a_{02} = -0.218794E - 09$	$- 0.508145E - 09i$
$a_{30} = -0.125345$	$+ 0.153320i$	$a_{21} = -0.818327E - 05$	$+ 0.666520E - 05i$
$a_{12} = 0.320993E - 09$	$- 0.787873E - 09i$	$a_{03} = 0.289208E - 13$	$+ 0.506843E - 13i$
$R = 8000$	$a = 0.98085$	$c = 0.2449068 + 0.2788617E - 02i$	
$a_{10} = -0.119755E - 05$	$- 0.357608i$	$a_{01} = 0.892075E - 06$	$+ 0.526590E - 05i$
$a_{20} = -0.190551$	$- 0.304254E - 01i$	$a_{11} = -0.574710E - 05$	$+ 0.851781E - 05i$
		$a_{02} = -0.190551E - 09$	$- 0.374386E - 09i$
$a_{30} = -0.130463$	$+ 0.158183i$	$a_{21} = -0.727921E - 05$	$+ 0.590112E - 05i$
$a_{12} = 0.248668E - 09$	$- 0.581589E - 09i$	$a_{03} = 0.180335E - 13$	$+ 0.328381E - 13i$
$R = 9000$	$a = 0.966669$	$c = 0.23828746 + 0.364932E - 02i$	
$a_{10} = -0.171472E - 05$	$- 0.348825i$	$a_{01} = 0.703465E - 06$	$+ 0.449944E - 05i$
$a_{20} = -0.191821$	$- 0.316481E - 01i$	$a_{11} = -0.510728E - 05$	$+ 0.734189E - 05i$
		$a_{02} = -0.113674E - 09$	$- 0.285658E - 09i$
$a_{30}$		$a_{21} = -0.657903E - 05$	$+ 0.529301E - 05i$
$a_{12}$		$a_{03} = 0.118801E - 13$	$+ 0.223640E - 13i$
$R = 10000$	$a = 0.95410$	$c = 0.23248693 + 0.435926E - 02i$	
$a_{10} = -0.132770E - 05$	$- 0.341148i$	$a_{01} = 0.566238E - 06$	$+ 0.390668E - 05i$

表 2 (续)

$a_{20} = -0.192907$	$-0.328127E - 01i$	$a_{11} = -0.459183E - 05$	$+0.642598E - 05i$
$a_{30} = -0.140172$	$+0.166016i$	$a_{02} = -0.862851E - 10$	$-0.224099E - 09i$
$a_{12} = 0.160921E - 09$	$-0.349735E - 09i$	$a_{21} = -0.657903E - 05$	$+0.529301E - 05i$
$a_{03} = 0.817218E - 14$		$+0.158435E - 13i$	
$R = 47044$	$a = 0.78096$	$c = 0.1599843 + 0.984519E - 02i$	
$a_{10} = -0.625770E - 06$	$-0.245505i$	$a_{01} = 0.153277E - 07$	$+0.468152E - 06i$
$a_{20} = -0.204431$	$-0.554614E - 01i$	$a_{11} = -0.902270E - 06$	$+0.873476E - 06i$
$a_{30} = -0.247547$	$+0.30993i$	$a_{02} = -0.140753E - 11$	$-0.596063E - 11i$
$a_{12} = 0.654040E - 11$	$-0.999624E - 11i$	$a_{21} = -0.173880E - 05$	$+0.988264E - 06i$
$a_{03} = 0.316619E - 16$		$+0.927161E - 16i$	
$R = 10$	$a = 0.7058009$	$c = 0.13252294 + 0.1031787E - 01i$	
$a_{10} = -0.108338E - 06$	$-0.208656i$	$a_{01} = 0.959619E - 08$	$+0.162996E - 06i$
$a_{20} = -0.206835$	$-0.686880E - 01i$	$a_{11} = -0.395046E - 06$	$+0.321903E - 06i$
$a_{30} = -0.324160$	$+0.205644i$	$a_{02} = -0.181827E - 12$	$-0.992267E - 12i$
$a_{12} = 0.128136E - 11$	$-0.175814E - 11i$	$a_{21} = -0.945592E - 06$	$+0.410173E - 06i$
$a_{03} = 0.206097E - 17$		$+0.734062E - 17i$	
$R = 10$	$a = 0.514134$	$c = 0.07317960 + 0.8303781E - 02i$	
$a_{10} = -0.833093E - 06$	$-0.124742i$	$a_{01} = -0.127965E - 08$	$+0.620228E - 08i$
$a_{20} = -0.199388$	$-0.106017i$	$a_{11} = -0.285730E - 07$	$+0.135633E - 07i$
$a_{30} = -0.622476$	$+0.205644i$	$a_{02} = -0.280884E - 14$	$-0.394357E - 12i$
$a_{12} = 0.771131E - 14$	$-0.175814E - 11i$	$a_{21} = -0.125998E - 06$	$+0.885879E - 08i$
$a_{03} = 0.468640E - 21$		$+0.295375E - 20i$	
$R = 10$	$a = 0.372218$	$c = 0.03957570 + 0.529390E - 02i$	
$a_{10} = -0.117261E - 04$	$-0.720495E - 01i$	$a_{01} = -0.717280E - 10$	$+0.228404E - 09i$
$a_{20} = -0.173140$	$-0.124487i$	$a_{11} = -0.181894E - 08$	$+0.466659E - 09i$
$a_{30} = -0.919618$	$-0.161416i$	$a_{02} = -0.683758E - 19$	$-0.151801E - 16i$
$a_{12} = 0.420481E - 16$	$-0.501469E - 16i$	$a_{21} = -0.130936E - 07$	$+0.282940E - 08i$
$a_{03} = 0.900911E - 25$		$+0.113557E - 23i$	
$R = 10$	$a = 0.26858$	$c = 0.2106192 + 0.305178E - 02i$	
$a_{10} = -0.307737E - 05$	$-0.401797E - 01i$	$a_{01} = -0.323209E - 11$	$+0.834610E - 11i$
$a_{20} = -0.138830$	$-0.120777i$	$a_{11} = -0.105943E - 09$	$+0.123372E - 10i$
$a_{30} =$	$-0.485675i$	$a_{02} = -0.197500E - 20$	$-0.574217E - 19i$
$a_{12} =$	$-0.296034E - 18i$	$a_{21} = -0.114160E - 08$	$+0.510443E - 09i$
$a_{03} =$		$+0.194170E - 29$	$+0.431775E - 27i$
$R = 10$	$a = 0.139285$	$c = 0.00579656 + 0.89180E - 03$	
$a_{10} = -0.201432E - 04$	$-0.114728E - 01i$	$a_{01} = -0.468174E - 14$	$+0.130012E - 13i$
$a_{20} = 0.514615E - 01$	$-0.138867i$	$a_{11} = -0.327997E - 11$	$+0.174670E - 11i$
$a_{30} = -0.919743E + 02$	$-0.129949E + 03i$	$a_{02} = 0.247173E - 22$	$-0.142168E - 22i$
$a_{12} = 0.577214E - 19$	$-0.733169E - 19i$	$a_{21} = -0.396103E - 08$	$-0.534077E - 08i$
$a_{03} = -0.281876E - 30$		$+0.334145E - 30i$	

$\alpha_0, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_2$  依大小次序七个点的计算, 绘制了波数  $\alpha$  对应波速的谱线。其结果由图 6 至图 8 表示。

表3 中性曲线上 O-S 方程特征值表

R	$a(upper)$	$c_r$	$a(lower)$	$c_r$
A 5772.12	1.02071	0.26402		
B 5772.2218	1.020547	0.26400026		
D 5772.2218	1.020547	0.26400021		
B 5800	1.03571	0.265527	1.00405	0.261833
D 5800	1.03566	0.26552	1.00409	0.26183
B 5900	1.05111	0.266460	0.98391	0.258277
D 5900	1.05107	0.26646	0.98394	0.258263
A 6000	1.02071	0.2263		
B 6000	1.05965	0.26612	0.97069	0.256251
D 6000	1.05962	0.2661	0.97073	0.25625
B 7000	1.08973	0.26249	0.89818	0.240366
D 7000	1.0895	0.26248	0.8981	0.24041
A 7500	1.094	0.2597	0.875	0.2344
B 7500	1.09437	0.25971	0.87473	0.234427
D 7500	1.0940	0.25970	0.8751	0.23451
B 8000	1.09658	0.25691	0.85503	0.229197
D 8000	1.0961	0.25691	0.8555	0.22932
A 9000	1.097	0.2515	0.823	0.2203
B 9000	1.09705	0.25153	0.83392	0.220250
D 9000	1.0965	0.25153	0.8236	0.22045
B 10000	1.09472	0.24653	0.79723	0.212759
D 10000	1.0940	0.24653	0.7981	0.21230
B 30000	1.00671	0.19479	0.609534	0.151725
D 30000	1.006	0.1950	0.6099	0.15120
B 47044	0.95742	0.17572	0.554981	0.132778
D 47044	0.957	0.1763	0.5536	0.1342
B 10 <sup>5</sup>	0.87130	0.147205	0.469415	0.106461
D 10 <sup>5</sup>	0.872	0.1470	0.4693	0.1052
E 10 <sup>5</sup>	0.628	0.241	0.415	0.046
B 10 <sup>6</sup>	0.62989	0.84047	0.320851	0.054728
D 10 <sup>6</sup>	0.638	0.084	0.2919	0.0517
E 10 <sup>6</sup>	0.509	0.159	0.298	0.024
B 10 <sup>7</sup>	0.449633	0.047281	0.223443	0.028273
D 10 <sup>7</sup>	0.450	0.047		
E 10 <sup>7</sup>	0.413	0.105	0.215	0.0123
B 10 <sup>8</sup>	0.327259	0.027396	0.178653	0.014638
D 10 <sup>8</sup>	0.330	0.027		
E 10 <sup>8</sup>	0.335	0.029	0.155	0.0064
B 10 <sup>9</sup>	0.287595	0.021343	0.112535	0.007580
E 10 <sup>9</sup>	0.271	0.025	0.111	0.0033
B 10 <sup>10</sup>	0.233202	0.013791	0.080571	0.003926
E 10 <sup>10</sup>	0.221	0.0197	0.0801	0.0033

注 A) REYNOLDS & POTTER (1967) B) 数值解 C) 近似结果 D) 三次展开公式

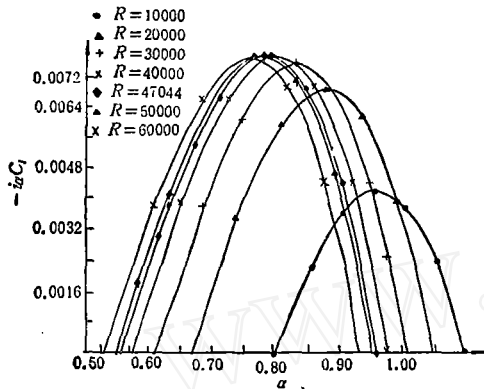


图7 O-S 方程特征值谱线

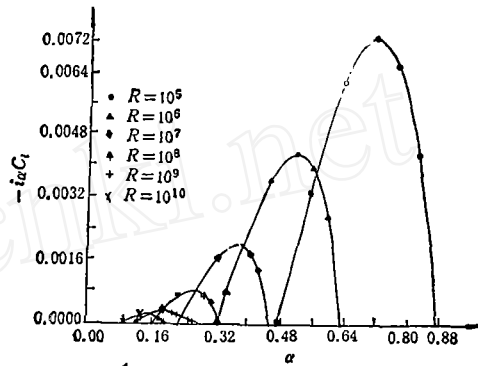


图8 O-S 方程特征值谱线

## 5. 讨 论

从数值解角度考虑,本文采用的 H-P 有限元方法有以下优点: 1) 与 Chebyshev 函数展开法比较,该方法更适用于高雷诺数的计算(前者在雷诺数高于  $10^4$  时将会遇到困难); 2) 与 Gauss-Numerov 有限差分法比较,有精度高、应用网格点少等优点,整个计算仅需 10 个元素,而差分法则至少需 300 个分点。

在数值求解中,由于流体粘性的影响,特征函数在边界层会出现峰和谷的较大波动。需要在临界层和边界层内选择较密集的元素分布,其区域为  $[z_c + (\alpha R)^{-\frac{1}{2}}, -1]$ , 这儿  $z_c$  表示函数的临界点且

$$z_c = \sqrt{1 - c_{0i}} \quad (5.1)$$

Orr-Sommerfeld 特征值展开式 (2.1) 的收敛区域是

$$\begin{cases} |R - R_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{i,n-1}}{a_{i,n}} \right|, \\ |\alpha - \alpha_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1,i}}{a_{n,i}} \right|. \end{cases} \quad (5.2)$$

当然它在求解上还存在着技术上的困难。为此我们在计算中做了以下的估计:

1) 应用在临界点  $(\alpha_c, R_c)$  上的展开式 (4.1), 计算 Orr-Sommerfeld 方程的特征值  $c$ , 所得结果在  $|R - R_c| < |8000 - R_c|$ ,  $\alpha$  在中性曲线内的范围内与直接的数值解一致。这说明该展开式在应用较多的中性曲线的鼻部是可靠的 (见图 9)。

2) 应用 (4.1) 在点  $(\alpha_0 = 0.9541, R = 10^4)$  上求得的系数, 该两个结果的一致出现在区间  $7000 \leq R \leq 12000$  内。

3) 当雷诺数大于  $10^8$  时, 该展式的收敛区域比较小, 甚至不能保证在  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$  时收敛。这个现象描绘在图 10 中。

展开式 (2.1) 应用于平面 Poiseuille 流稳定性研究。1) 可以用讨论代数方程 (2.1) 的解的问题代替困难的 4 阶复系数方程特征值求解, 显然这是十分方便的。2) 由式 (4.1) 可以十分方便地计算该流体稳定性中性曲线, 并得到比以前更准确, 范围更大的结果。3)

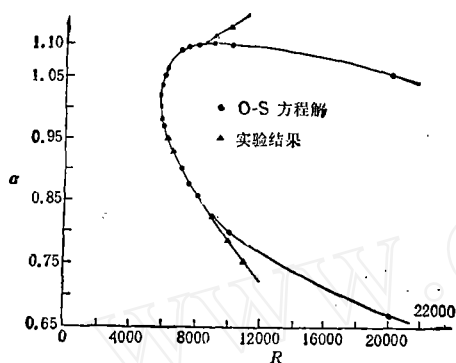
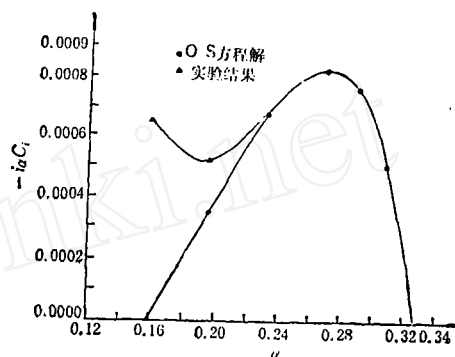


图9 级数展开式与直接数值解比较

图10 级数展开式在  $R=10^{10}$  时的收敛性

应用(4.1)描绘了能较全面描述平面 Poiseuille 流稳定性的谱线,这是以前没有文件记载的,同时也为大涡模拟等工作提供了不少方便。4) 本文较准确地计算了临界雷诺数  $R_c = 5772.2218$ ,  $\alpha_c = 1.020547$ 。

应该指出的是,该展开式还可以用于其它平行流或非定常流的稳定性讨论,我们已在这方面做了一些工作,而且会出现在以后的文章中。

这一工作是笔者留学英国期间完成的,在此笔者十分感谢英国帝国理工学院数学系主任, J. T. Stuart 的指导和帮助。