

对流-扩散相互作用结构的不变性¹⁾

高 智

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 本文提出并证明了不可压缩剪切层流中对流-扩散相互作用结构不变性诸定理:即二维剪切层流与其线性化及非线性扰动存在同一的对流-扩散相互作用结构,且物理尺度(指时间、空间和速度尺度)相同.给出十个推论,例如:对流-扩散相互作用可在剪切层流及其扰动场内“激发”快时间尺度和小空间尺度结构,线性化稳定性原理的约定对剪切流体系统成立等.应用题例导出计及时间-空间尺度效应和非平行流效应的广义 Orr-Sommerfeld(GOS)方程,证实它有两个粘性解:阻尼层解和干扰层解;经典 OS 方程及其两个粘性解:边界层解和 Heisenberg 临界层解, Triple-deck 稳定性理论基本方程及其两个粘性解,均是本文 GOS 方程及其两个粘性解的特例.

关键词 粘性流动,剪切流动,尺度效应,流体运动稳定性,粘性-无粘干扰流动

一、引言

对剪切层流,经典边界层理论^[3]给出的时间尺度和流向长度尺度分别为观察时间尺度 L/U 和边界尺度 L ,这里 U 为常数是特征流速.文[1,2]提出剪切层流的空间尺度和时间尺度沿流向变化的概念,阐明对流-扩散相竞争、粘流-无粘相干扰能够“激发”空间为小尺度和时间为快尺度的剪切流动结构,并给出了这种剪切流动结构及其物理尺度随流向的演变规律.我们容易想到,这种空间小尺度和时间快尺度流动结构的演变必然与流动的失稳、转换、分离和分岔等流体物理现象紧密相关;由此可以推测,基本流动的扰动运动(包括小扰动和有限扰动)亦应存在物理尺度随流向变化的扰动结构,且扰动结构应与基本流的流动结构存在对应关系.本文的目的就是证实上述概念和想法.

二、预备知识

粘性剪切流(例如边界层流,射流等)满足如下非定常、二维不可压缩 Navier-Stokes (NS)方程组

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1b)$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v, 0)$, u 、 v 分别为 x 轴和 y 轴方向的流速分量, p 、 ρ 和 ν 分别为压力、密度

1) 国家自然科学基金资助项目.

本文于1991年7月1日收到第一稿,由徐复编委推荐,1991年10月5日收到修改稿.

和运动粘性系数。设 NS 方程(2.1)的解为 $Q = (u, v, 0; p)$, 对解 Q 叠加小扰动量 $\hat{Q} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}; \hat{p})$, 其中 $\max(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \ll U$, U 是未扰流特征流速。把 $(\hat{Q} + Q)$ 代入 NS 方程(2.1), 消去关于 Q 变量的等式, 并略去 $(\hat{u} \cdot \nabla)\hat{u}$ 项, 最终得到如下的线性化扰动量方程组^[3,4]:

$$\operatorname{div} \hat{u} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (\hat{u} \cdot \nabla)u + (\hat{u} \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \hat{u} \quad (2.2b)$$

其中 $\hat{u} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, 若 $\hat{w} = 0$, 线性化扰动为二维扰动。对 NS 方程(1.1)的惯性力项和粘性力项及对扰动方程(2.2)的对流输运项和粘性输运项作分析可知: 对流-扩散相互作用在未扰流和扰动流中“激发”的局部流动结构和扰动结构, 其内部尺度(亦称物理尺度)应与 Re 数成幂次关系。故对未扰流和扰动流分别有:

$$x \sim L Re^{-n_x}, y \sim L Re^{-n_y}, t \sim \omega^{-1} Re^{-n_t} = \frac{L}{\kappa U} Re^{-n_t} \quad (2.3a)$$

$$u \sim U Re^{-n_u}, v \sim U Re^{-n_v}, Re = \frac{UL}{\nu}, x = \frac{\omega L}{U} \quad (2.3b)$$

和

$$\hat{x} \sim L Re^{-\hat{n}_x}, \hat{y} \sim L Re^{-\hat{n}_y}, \hat{t} \sim L Re^{-\hat{n}_t}, \hat{t} \sim \frac{L}{\kappa \hat{U}} Re^{-\hat{n}_t} \quad (2.4a)$$

$$\hat{u} \sim \hat{U} Re^{-\hat{n}_u}, \hat{v} \sim \hat{U} Re^{-\hat{n}_v}, \hat{w} \sim \hat{U} Re^{-\hat{n}_w} \quad (2.4b)$$

其中 U, \hat{U} 分别是未扰流和线性化扰动的特征速度, $\hat{U} \ll U$; L 为与边界尺度同样大小的特征长度, ω^{-1} 为外部强加的或边界的特征振动频率, κ 为减缩频率。本文设 $\kappa = O(1)$, 对高频 $\omega^{-1} \gg L/U$ 和低频 $\omega^{-1} \ll L/\omega$ 情况需另作讨论。

三、对流-扩散相互作用结构不变性诸定理

定理 1 二维线性化扰动存在与其未扰二维粘性流同一的对流-扩散相互作用结构, 且时间、空间和速度尺度(简称物理尺度)相同; 反之亦然。

证明 已知未扰二维粘性流存在惯性力-粘性剪切力相互作用结构: 包括粘性阻尼层和干扰层流动结构^[1,2]。阻尼层中粘性阻尼为主要过程、切向惯性力项与粘性剪切力相平衡 $u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\partial u}{\partial t}$, 并由连续性条件 $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$, 推知物理尺度(2.3)中诸尺度指数 n_x, n_y, n_u, n_v 和 n_t 在阻尼层满足如下关系:

$$n_{y_1} = \frac{1}{2} (1 + n_{x_1} - n_{u_1}), n_{v_1} = \frac{1}{2} (1 - n_{x_1} + n_{u_1}), (u > v, n_u < n_v) \quad (3.1a)$$

$$n_{y_1} - n_{x_1} = n_{v_1} - n_{u_1} > 0, n_{t_1} = -n_{u_1} + n_{x_1} = -n_{v_1} + n_{y_1} \quad (3.1b)$$

这里足标 1 表示阻尼层。由于 $n > v$, 当 $Re > 1$ 时阻尼层在 y 方向的尺度小于在 x 方向的尺度, $u < v$ 情况的讨论见推论部分。

干扰层中粘性力作用下的法向动量交换为主要过程^[1,2], 法向惯性力项与粘性剪切力项同样大小: $u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\partial v}{\partial t}$, 再利用连续性 $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}$, 干扰层与阻尼层交界处切向

长度尺度、速度尺度相匹配诸条件, 推知物理尺度关系(2.3)中诸尺度指数在干扰层满足如下的关系:

$$n_{y_1} = \frac{1}{3}(1 + 2n_{x_1} - n_{u_1}), \quad n_{v_1} = \frac{1}{3}(1 - n_{x_1} + 2n_{u_1}) \quad (3.2a)$$

$$n_{y_1} - n_{x_1} = \frac{1}{3}[1 - (n_{x_1} + n_{u_1})] = \frac{2}{3}(n_{y_1} - n_{x_1}) > 0,$$

$$n_{t_1} = -n_{u_1} + n_{x_1} = n_{t_1} \quad (3.2b)$$

这里足标 2 表示干扰层。由关系式(3.2b)可知: 干扰层在 y 方向的尺度仍小于在 x 方向的尺度, 即干扰层在 y 方向仍为薄层, 但比阻尼层厚。

由未扰流阻尼层定义以及物理尺度关系(3.1)推知如下关系必然成立

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \sim u \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \sim v \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \sim \theta \frac{\partial u}{\partial y} \sim v \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \quad (3.3a)$$

上式表明: 线性化扰动存在与未扰流阻尼层相对应的、扰动量对流输运与粘性扩散输运相竞争的扰动结构, 为方便起见仍称该扰动结构为线性化扰动的阻尼层。由式(3-3a)以及方程(2.2a)导出的关系

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \sim \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (3.3b)$$

推知: 线性化扰动物理尺度关系(2.4)中诸尺度指数 $\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_v$ 和 \hat{n}_t 在线性化扰动的阻尼层中满足如下关系

$$\hat{n}_{y_1} = \frac{1}{2}(1 - n_{u_1} + \hat{n}_{x_1}) = 1 - n_{v_1}, \quad \hat{n}_{v_1} = \frac{1}{2}(1 - n_{u_1} + 2\hat{n}_{u_1} - \hat{n}_{x_1}) \quad (3.4a)$$

$$-\hat{n}_{u_1} + \hat{n}_{x_1} = -\hat{n}_{v_1} + \hat{n}_{y_1}, \quad n_{v_1} = \frac{1}{2}(1 + n_{u_1} - \hat{n}_{x_1}) \quad (3.4b)$$

$$\hat{n}_{t_1} = -n_{u_1} + \hat{n}_{x_1} \quad (3.4c)$$

把关系式(3.1)和(3.4)加以比较, 即可推出

$$\hat{n}_{x_1} = n_{x_1}, \quad \hat{n}_{y_1} = n_{y_1}, \quad \hat{n}_{t_1} = n_{t_1} \quad (3.5a)$$

此外, 由于 $(-\hat{n}_{u_1} + \hat{n}_{x_1})$ 仅受限于一个约束条件(3.4b), 故可令

$$\hat{n}_{u_1} = n_{u_1} \quad (3.5b)$$

则有

$$\hat{n}_{v_1} = n_{v_1} \quad (3.5c)$$

在式(3.4)和(3.5)中, 足标 1 代表线性化扰动的阻尼层。由式(3.3)和(3.5)可知, 二维线性化扰动存在对流输运与粘性输运相平衡的阻尼层结构, 且物理尺度与未扰流阻尼层的物理尺度一致。

由未扰流干扰层定义及其物理尺度关系(3.2)推知如下关系必然成立

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \sim u \frac{\partial \theta}{\partial x} \sim \hat{u} \frac{\partial v}{\partial x} \sim v \frac{\partial \theta}{\partial y} \sim \theta \frac{\partial v}{\partial y} \sim v \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \quad (3.6)$$

关系(3.6)表明: 二维线性化扰动存在与其未扰流干扰层相对应的、法向对流输运和粘性扩散输运相平衡的扰动结构, 为方便起见仍称该扰动结构为线性化扰动的干扰层, 并由关

系(3.6)和(3.3b)推出

$$\hat{n}_{y_2} = \frac{1}{3}(1 - n_{u_1} + 2\hat{n}_{x_2}) = 1 - n_{v_1} - \hat{n}_{v_2} + \hat{n}_{u_2},$$

$$\hat{n}_{v_2} = \frac{1}{3}(1 + 3\hat{n}_{u_2} - n_{u_1} - \hat{n}_{x_2}) \quad (3.7a)$$

$$-\hat{n}_{u_1} + \hat{n}_{v_2} = -\hat{n}_{x_2} + \hat{n}_{y_2}, \quad n_{v_2} = \frac{1}{3}(1 + 2n_{u_1} - \hat{n}_{x_2}) \quad (3.7b)$$

$$\hat{n}_{t_2} = -n_{u_2} + \hat{n}_{x_2} = -n_{u_1} + \hat{n}_{x_2} \quad (3.7c)$$

把式(3.2)和(3.7)加以比较,容易推知如下等式

$$\hat{n}_{x_2} = n_{x_2} = n_{x_1}, \hat{n}_{y_2} = n_{y_2}, \hat{n}_{t_2} = n_{t_2} = n_{t_1} \quad (3.8a)$$

由于 $(-\hat{n}_{u_1} + \hat{n}_{v_2})$ 仅受限于一个约束条件(3.7b),故可令

$$\hat{n}_{u_1} = n_{u_2} = n_{u_1} \quad (3.8b)$$

则有

$$\hat{n}_{v_2} = n_{v_2} \quad (3.8c)$$

这里足标 2 表示线性化扰动以及未扰流的干扰层。式(3.8)表明线性化扰动干扰层的物理尺度与未扰流干扰层的物理尺度一致。至此定理 1 的正命题证毕,下面证明逆定理成立。

逆定理证明 已知二维线性化扰动存在切向对流输运与粘性扩散输运相平衡的阻尼层结构,即关系(3.3)和式(3.4)同时成立,由此推知如下关系

$$\frac{\partial u}{\partial t} \propto u \frac{\partial u}{\partial x} \propto v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \propto \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.9)$$

成立,且式(3.1)成立。进而由式(3.1)和(3.4)推出

$$n_{y_1} = \hat{n}_{y_1}, \quad n_{x_1} = \hat{n}_{x_1}, \quad n_{t_1} = \hat{n}_{t_1} \quad (3.10a)$$

且由于 $(-n_{u_1} + n_{v_1})$ 仅受限于一个约束条件(3.1b),故可令

$$n_{u_1} = \hat{n}_{u_1} \quad (3.10b)$$

则有

$$n_{v_1} = \hat{n}_{v_1} \quad (3.10c)$$

因此未扰流存在切向惯性力与粘性剪切力相平衡的阻尼层结构,且其物理尺度与线性化扰动阻尼层的物理尺度一致。同样地,已知线性化扰动存在法向对流输运和粘性输运相平衡的干扰层结构,即关系(3.6)和式(3.7)同时成立。由此推知

$$\frac{\partial v}{\partial t} \propto u \frac{\partial v}{\partial x} \propto v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \propto \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.11)$$

成立,且式(3.2)同时成立。进而由式(3.2)和(3.7)推出

$$n_{x_2} = \hat{n}_{x_2}, \quad n_{y_2} = \hat{n}_{y_2}, \quad n_{t_2} = \hat{n}_{t_2} \quad (3.12a)$$

由于 $(-n_{u_1} + n_{v_2})$ 仅受限于一个约束条件(3.2b),故可令

$$n_{u_2} = \hat{n}_{u_2} \quad (3.12b)$$

则有

$$n_{v_2} = \hat{n}_{v_2} \quad (3.12c)$$

即未扰二维剪切流存在法向惯性力与粘性剪切力相平衡的干扰层结构,且其物理尺度与

线性化扰动干扰层的物理尺度一致。至此定理 1 证毕。

定理 2 线性化三维扰动存在与其未扰二维剪切流同一的、在未扰流流动平面内的对流-扩散相互作用结构、且物理尺度相同;反之亦然。

证明 在线性化扰动为三维的情况下,定理 1 的所有论述仍成立,故定理 2 成立。此外,关于 z 轴方向的扰动运动, $\hat{\omega}$ 、 \hat{z} 的尺度,因而尺度指数 $(-\hat{n}_w + \hat{n}_z)$ 仅受限于如下的一个约束条件

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \sim \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} \sim \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} \quad (3.13)$$

定理 3 非线性二维扰动存在与其未扰二维粘性剪切流同一的对流-扩散相互作用结构、且物理尺度相同;反之亦然。

证明 对 NS 方程(2-1)的解 $Q = (u, v, \theta; p)$ 叠加非线性扰动量 $\hat{Q} = (\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{o}; \hat{\beta})$, 把 $(Q + \hat{Q})$ 代入 NS 方程(2.1)、消去关于 Q 的方程、得到如下非线性扰动方程

$$\operatorname{div} \hat{u} = 0 \quad (3.14a)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + (\hat{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{u} + (\hat{u} \cdot \nabla) \hat{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{\beta} + \nu \nabla^2 \hat{u} \quad (3.14b)$$

其中 $\hat{u} = (\hat{u}, \hat{\theta}, 0)$ 。非线性二维扰动的时、空和速度尺度仍表示为关系(2.4), 但扰动特征速度 \hat{U} 不满足 $\hat{U} \ll U$ 的条件, 故关系(3.3a)和(3.6)应分别改变为

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \sim u \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \sim v \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \sim \theta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \sim \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \cong \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \sim \theta \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \quad (3.15)$$

和

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} \sim u \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \sim \hat{u} \frac{\partial v}{\partial x} \sim v \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} \sim \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \cong \hat{u} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \sim \theta \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} \quad (3.16)$$

用关系(3.15)和(3.16)分别代替关系(3.3)和(3.6)后, 除对 $(-\hat{n}_u + \hat{n}_z)$ 增加一个新的约束条件外, 定理 1 中的所有论述依然成立, 故定理 3 成立。此外, 对 $(-\hat{n}_{u_i} + \hat{n}_{z_i})$ 增加的新约束条件, 对阻尼层 $(i = 1)$ 和干扰层 $(i = 2)$ 分别为:

$$-\hat{n}_{u_1} + \hat{n}_{z_1} = -1 + 2\hat{n}_{y_1} \quad (3.17)$$

和

$$-\hat{n}_{u_2} + 2\hat{n}_{z_2} = -1 + 3\hat{n}_{y_2} \quad (3.18)$$

四、推 论

1. 关于流体运动稳定性理论方面的 4 个推论

推论 1 若线性化问题(2.2)的解随时间和空间衰减, 对流-扩散相互作用扰动结构及其物理尺度“存在”, 零解 $\hat{Q} = (\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\omega}; \hat{\beta}) = 0$ 为渐近稳定; 则未扰粘性流的对流-扩散相互作用流动结构及其物理尺度“存在”, $\hat{Q} = 0$ 或等价地解 $Q = (u, v, \theta; p)$ 为 NS 方程(2.1)的渐近稳定解。

推论 2 若线性化问题(2.2)的解随时间或随空间无限增大, 对流-扩散相互作用扰动结构及其物理尺度关系将遭“破坏”, 零解 $\hat{Q} = (\hat{u}, \hat{\theta}, \hat{\omega}; \hat{\beta}) = 0$ 不稳定; 则未扰粘性流对流-扩散相互作用流动结构及其物理尺度关系亦将遭“破坏”, 零解 $\hat{Q} = 0$ 或等价地解 $Q = (u,$

$v, o; p$)为 NS 方程(2.1)的不稳定解。未扰流失稳条件与其线性化扰动不稳定条件一致。

推论 3 若非线性问题(3.14)的解随时间和空间不发散, 对流-扩散相互作用扰动结构及其物理尺度“存在”, 解 $\hat{Q} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{o}; \hat{p})$ 为渐近稳定; 则未扰流对流-扩散相互作用流动结构及其物理尺度“存在”, 解 \hat{Q} 或等价地解 $Q = (u, v, o; p)$ 为 NS 方程(2.1)的渐近稳定解。

推论 4 若非线性问题(3.14)的解随时间或随空间无限增长, 对流-扩散相互作用扰动结构及其物理尺度关系将遭“破坏”, 解 $\hat{Q} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{o}; \hat{p})$ 不稳定; 则未扰流对流-扩散相互作用流动结构及其物理尺度关系亦将遭“破坏”, 解 \hat{Q} 或等价地解 $Q = (u, v, o; p)$ 为 NS 方程(2.1)的不稳定解。未扰流失稳条件与其非线性扰动不稳定条件一致。

由结构不变性定理 1-3 容易推断: 推论 1-4 成立。推论 1 和 2 其实是关于无穷维系统线性化稳定性原理所作两个约定^[9]的翻版。可见, 结构不变性定理为流体系统线性化稳定性原理所作两个约定, 提供了一个数学上不严格、但直观合理的证明。

2. 关于分析和计算未扰流及其扰动方面的 6 个推论

推论 5 对流-扩散相竞争能够在粘性剪切层流及其线性化和非线性扰动运动内“激发”时间为快尺度, 流向及法向方向长度尺度为小尺度(即空间为小尺度)的流动结构和扰动结构。

推论 5 的正确性是显然的。

推论 6 二维粘性剪切层流及其线性化和非线性扰动的对流-扩散相互作用流动结构, 扰动结构及其物理尺度可用双参变量来表征。

推论 6 的正确性是显然的。由结构不变定理的证明内容可知, 例如可用物理尺度指数 n_x 和 n_y 作为双参变量。

推论 7 二维粘性剪切层流或其线性化和非线性扰动阻尼层的切向速度 u 或 \hat{u} 与法向坐标变数 y 成线性关系时, 结构不变诸定理依然成立, 且对流-扩散相互作用流动结构或扰动结构及其物理尺度均可用单一参变量(例如 n_x)来表征。

证明 已知阻尼层切向速度 u 或 \hat{u} 与 y 成线性关系, 故在对流-扩散相互作用下, 若阻尼层厚度改变 $Re^{-m/2}$ 倍, 则切向速度尺度亦应改变 $Re^{-m/2}$ 倍, 再利用 (3.1)、(3.2)、(3.4)和(3.7)诸式, 容易推出如下关系

$$n_{u_1} = \hat{n}_{u_1} = n_{u_2} = \hat{n}_{u_2} = \frac{m}{2}, n_{v_1} = \hat{n}_{v_1} = \frac{1-m}{2}, n_{v_2} = \hat{n}_{v_2} = \frac{2-m}{6} \quad (4.1a)$$

$$n_{x_1} = \hat{n}_{x_1} = n_{x_2} = \hat{n}_{x_2} = \frac{3}{2}m, n_{y_1} = \hat{n}_{y_1} = \frac{1+m}{2}, n_{y_2} = \hat{n}_{y_2} = \frac{2+5m}{6} \quad (4.1b)$$

$$n_{t_2} = \hat{n}_{t_2} = \hat{n}_{t_1} = n_{t_1} = m \quad (4.1c)$$

其中 m 为单参变数, $m \leq \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ 对流-扩散相互作用结构趋向各向同性, 参见推论 9。

推论 8 对 $u > v$ 的对流-扩散相互作用结构及其物理尺度做 $u \rightarrow v, x \rightarrow y$ 的数学变换, 可得到 $v > u$ 的对流-扩散相互作用结构及其物理尺度; 反之亦然。

为方便起见, 推论 8 可被称为对称定理, 结构对称定理的正确性是显然的。

推论 9 若 $|u| \rightarrow |v|$ 时存在对流-扩散相互作用结构, 则此结构必为各向同性、相应地

速度及空间尺度亦与方向无关,且各向同性结构的物理尺度为各向异性对流-扩散相互作用结构物理尺度之极限。

证明 由(3.1)、(3.2)、(3.4)和(3.7)诸式推出各向异性对流-扩散相互作用结构尺度指数的极限分别为:

$$n_{x_1} = \hat{n}_{x_1} = n_{x_2} = \hat{n}_{x_2} = n_{y_1} = \hat{n}_{y_1} = n_{y_2} = \hat{n}_{y_2} = \frac{3}{4} \quad (4.2a)$$

$$n_{u_1} = \hat{n}_{u_1} = n_{u_2} = \hat{n}_{u_2} = n_{v_1} = \hat{n}_{v_1} = n_{v_2} = \hat{n}_{v_2} = \frac{1}{4} \quad (4.2b)$$

$$n_{t_1} = \hat{n}_{t_1} = n_{t_2} = \hat{n}_{t_2} = \frac{1}{2} \quad (4.2c)$$

对物理尺度为单参变 m 表征的情况,参看推论7, $m \rightarrow \frac{1}{2}$ 时对流-扩散相互作用结构趋向各向同性、即 $m = \frac{1}{2}$ 时式(4.2)成立。顺便指出,各向同性对流-扩散相互作用结构应与 Колмогоров 统计平衡结构^[6]或最小涡旋尺度一致。事实上,假设湍能耗散率 $\varepsilon \propto u_T^3/l$ 和流体能量变化率 $e \propto U^3/L$ 为同速率,则有

$$l \propto \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \propto \left(\frac{\nu^3 l}{u_T^3}\right)^{1/4} \propto \left(\frac{\nu^3 L}{U^3}\right)^{1/4} \propto L Re^{-3/4} \quad \left(Re = \frac{UL}{\nu}\right) \quad (4.3a)$$

$$u_T \propto (\nu \varepsilon)^{1/4} \propto \left(\frac{\nu u_T^3}{l}\right)^{1/4} \propto \left(\frac{\nu U^3}{L}\right)^{1/4} \propto U Re^{-1/4} \quad (4.3b)$$

这里 l 和 u_T 分别为 Колмогоров 统计平衡速度尺度和长度尺度^[6]。

推论 10 只要对流-扩散相互作用结构为各向异性且 Re 数足够大时,描述相应流动的 Navier-Stokes (NS) 方程组即可化简,且存在适合于全流场(包括相互作用流动结构及相应无粘流)的单一方程组——简化 N-S 方程组,或称扩散抛物化 N-S 方程组。

证明 推论 10 的假设成立时,相应 N-S 方程组中诸项的大小将存在数量级差异,故可把 NS 方程组合理化简。对 NS 方程(2.1)、适用于全流场(包括对流-扩散相互作用流动及相应无粘流)的简化 NS 方程组在 $u > \nu$ 和 $u < \nu$ 时分别为:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \Delta p + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} \quad (4.4b)$$

和

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} \quad (4.5b)$$

可见推论 10 是已有简化 NS 方程理论^[7,8]的一种推广。

五、讨论与应用题例

1. 讨论

对流-扩散相互作用结构不变诸定理及其推论表明:这类流动的最一般情形可用双参

变量来表征,例如用尺度指数 n_{x_1} 和 n_{u_1} 来表征;反过来,任一数组 n_{x_1} 和 n_{u_1} 是否都能代表一种真实剪切干扰层流,这个问题并未解决。但是, n_{x_1} 、 n_{u_1} 与其它尺度指数至少还应满足如下的约束关系:

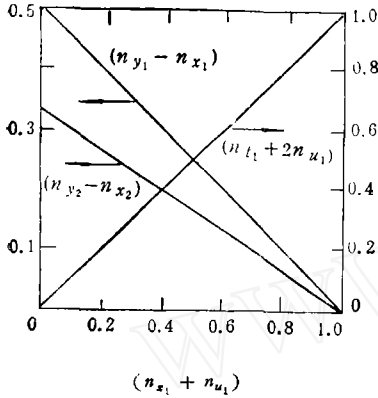


图 1 二维剪切层流及其线性化和非线性扰动物理尺度指数满足的约束关系,参见式(5.1)

$$n_{y_1} - n_{x_1} = \hat{n}_{y_1} - \hat{n}_{x_1} = n_{v_1} - n_{u_1} = \hat{n}_{v_1} - \hat{n}_{u_1} = \frac{1}{2} [1 - (n_{x_1} + n_{u_1})] \quad (5.1a)$$

$$n_{y_2} - n_{x_1} = \hat{n}_{y_2} - \hat{n}_{x_1} = n_{v_2} - n_{u_1} = \hat{n}_{v_2} - \hat{n}_{u_1} = \frac{1}{3} [1 - (n_{x_1} + n_{u_1})] \quad (5.1b)$$

$$n_{t_1} + 2n_{u_1} = n_{t_1} + 2n_{u_1} = \hat{n}_{t_1} + 2\hat{n}_{u_1} = \hat{n}_{t_2} + 2\hat{n}_{u_2} = n_{x_1} + n_{u_1} \quad (5.1c)$$

图 1 给出物理尺度指数满足的约束关系。图 2 则给出物理尺度指数随单参变量 m 的变化关系,图中标出了若干特例,这些特例分别对应经典边界层、Heisenberg 临界层^[3,4]、Triple-deck 理论^[8,9]三层和 Колмогоров 统计平衡长度和时间尺度。

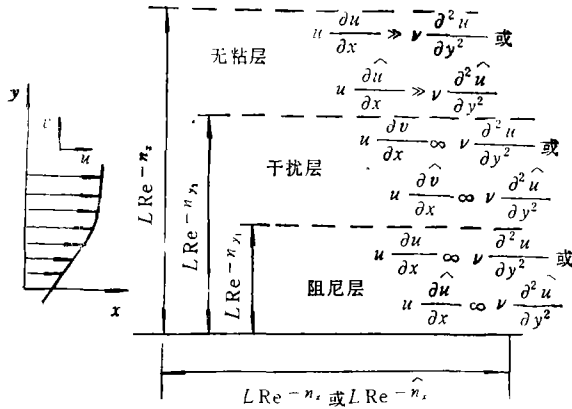


图 2a 对流-扩散相互作用流动结构和扰动结构,定义及其局部物理尺度和坐标关系示意图。

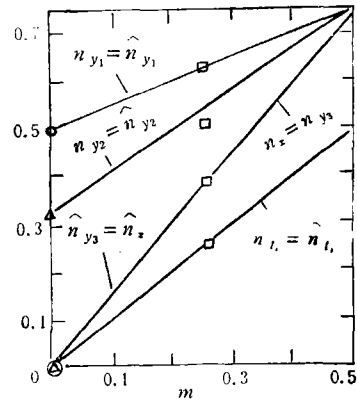


图 2b 对流-扩散相互作用结构物理尺度指数 $n_x, n_{y_i}, \hat{n}_x, \hat{n}_{y_i}, n_{t_i}$ 和 \hat{n}_{t_i} 随参变量 m 的变化。图中 \circ 指经典边界层尺度指数, \triangle Heisenberg 临界层, \square Triple-deck 理论三层 \bullet Колмогоров 统计平衡长度和时间尺度指数

2. 应用题例

推导二维近平行层流稳定性分析的基本方程: 广义 Orr-Sommerfeld(OS) 方程。已知二维近平行层流的对流-扩散相互作用结构及其物理尺度可用单参变量 m 来表征^[1,2], 也见本文关系式(4.1)。令:

$$\hat{u} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \hat{v} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.2)$$

再做 $(x, y; t) \rightarrow (X, Y; T)$ 的数学变换, 变换关系为

$$x = \varepsilon^{-3}X, \quad t = \varepsilon^{-2}T, \quad \varepsilon = Re^{m/2}, \quad \left(m \leq \frac{1}{4}\right) \quad (5.3)$$

令

$$\phi = \varphi(y, x) \exp[i\alpha(X - CT)], \quad \beta = f(y, x) \exp[i\alpha(X - CT)] \quad (5.4)$$

其中 $\alpha = \alpha(x, \varepsilon^{-1})$, $C = C(\varepsilon^{-1}) = \text{常数}$, $m \leq \frac{1}{4}$, $m = \frac{1}{4}$ 对应于层流边界层发生分离^[9,10]; φ, f, α, m 以及 u 和 v 均是 x 的缓变函数. 把(5.2)–(5.4)诸式代入线性化二维扰动方程(2.2), 经运算并略去高阶小量后得到:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} (D^2 - \varepsilon^6 \alpha^2)^2 \varphi = i\varepsilon^3 \alpha \left[\left(u - \frac{c}{\varepsilon}\right) (D^2 - \varepsilon^6 \alpha^2) - D^2 u - \frac{\partial v}{\partial x} D \right] \varphi \\ + [v D^3 - (D^2 v + \varepsilon^6 \alpha^2 v) D - \varepsilon^6 \alpha^2 D v] \varphi \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中 $D = \frac{\partial}{\partial y}$, 方程(5.5)可称为广义 Orr-Sommerfeld(OS) 方程. 在 $m = 0$, 且 $v \approx 0$ 的条件下, 广义 OS 方程(5.5)退化为经典 OS 方程. $m = \frac{1}{4}$ 时, 广义 OS 方程则与 Triple-deck 稳定性理论^[10]的方程一致. 对方程(5.5)作分析推知, 它存在两个粘性解: 它们是分别相应于扰动阻尼层和扰动干扰层的解, 因此当求这两个粘性解时应分别作变换 $(X, y; T) \rightarrow (X, Y_i; T)$, 这里 $i = 1, 2$, 并有

$$y = Y_1 Re^{-(1+m)/2} \quad (\text{对阻尼层}, i = 1) \quad (5.6)$$

$$y = Y_2 Re^{-(2+5m)/6} \quad (\text{对干扰层}, i = 2) \quad (5.7)$$

可见, $m = 0$ 且 $v = 0$ 时, 阻尼层解和干扰层解分别是经典 OS 方程的边界层解和 Heisenberg 临界层解^[3,4]; $m = \frac{1}{4}$ 时, 阻尼层解和干扰层解分别相应于 Triple-deck 稳定性理论的下层解和主层解^[10]. 此外, 若令

$$\beta = \varepsilon^3 \alpha, \quad a = \frac{c}{\varepsilon}$$

广义 OS 方程(5-5)转换为

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} (D^2 - \beta^2)^2 \varphi = \left\{ i\beta \left[(u - a)(D^2 - \beta^2) - D^2 u - \frac{\partial v}{\partial x} D \right] \right. \\ \left. + v D^3 - (D^2 v + \beta^2 v) D - \beta^2 D v \right\} \varphi \end{aligned} \quad (5.8)$$

可见扰动波数 α 、传播速度 c (或频率 $\omega = \alpha c$) 与流向长度尺度及时间尺度有关, 因此空间小尺度-时间快尺度流动结构沿流向的演变对流动稳定性具有重要的影响, 进一步的分析 and 计算将在另文给出.

庄逢甘教授和徐复教授提出不少宝贵建议, 作者深表谢意.

参 考 文 献

- [1] 高智. 粘流-无粘干扰层流理论. 力学学报, 1990, 22(1): 8-19

- [2] 高 智. 简化 Navier-Stokes 方程组的层次结构及其力学内涵和应用. 中国科学(A辑),1988,6: 625—640
- [3] Schlichting H. *Boundary Layer Theory*. New York: McGraw-Hill, 1979
- [4] Swinney H L, Gollub J P. *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*. Berlin: Springer-Verlag, 1981
- [5] Nicolis, G Prigogine I. *Exploring Complexity*. New York: Freeman, 1986
- [6] Hinze J O. *Turbulence*. New York: McGraw-Hill, 1975
- [7] 高 智. 论简化 Navier-Stokes 方程组. 中国科学 (A 辑),1987,10: 1058--1070
- [8] Anderson, D A, et al. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill, 1984
- [9] Stewartson K, et al. Self-induced Separation. *Proc Roy Soc*, 1969, A312: 181—206
- [10] Smith, F I. On the Non-parallel Flow Stability of the Blasius Boundary Layer. *Proc. Roy. Soc. Lond*, 1979, A366: 91—109

INVARIANCE OF INTERACTIVE-STRUCTURE BETWEEN CONVECTION AND DIFFUSION

Gao Zhi

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

Abstract In this paper three invariant theorems of interactive-structure between convection and diffusion for incompressible laminar shear flow and its ten inferences are presented. The invariance of interactive-structure means that the laminar shear flow and its linearized and nonlinear disturbance fields have the same interactive-structure between convection and diffusion and the same physical scales (including the time, spatial and velocity scales). In illustration of the present theoretical application, we derive a generalized Orr-Sommerfeld (GOS) equation, which takes both non-parallel flow effect as well as time-spatial scale effect into account, and find that GOS equation has two viscous solutions corresponding to the retarded layer and the interaction layer, respectively. Special cases of GOS equation with its two viscous solutions include the classical Orr-Sommerfeld equation and the basic equation of Triple-deck stability theory.

Key words viscous flow, shear flow, scale effect, stability of fluid motion, viscous-inviscid interacting flow