

# 转动坐标系中三维跨声速欧拉流的 有限体积-TVD格式\*

王保国 卞荫贵

中国科学院力学研究所, 北京(邮政编码100080)

**摘要** 在非惯性转动坐标系中, 本文采用贴体网格、有限体积法离散和修正数值通量技术, 将 Harten 的一维 TVD 格式推广到三维。由于转动使方程出现源项, 文中通过对源项的巧妙处理, 使修改后的格式能用于非齐次双曲守恒律方程组高分辨率的数值计算。为了加速解的收敛, 提高显式时间推进的 CFL 数, 本文采用隐式残值光顺技术。三维跨声速带非齐次源项欧拉方程的典型算例表明: 捕捉的激波分辨率较高, 激波前后没有发现大的数值波动和伪振荡现象, 所得的跨声速流场解与实验较接近。

**关键词** 跨声速流, 贴体网格, 有限体积法, TVD 显格式, 修正数值通量技术, 欧拉方程, 计算与实验比较。

## 引 言

自 Harten 提出 TVD 的概念<sup>[1]</sup>以来, TVD 类型的差分格式在国内外有了很大发展, 文献 [2~6] 等反映了国内这一工作的典型进展。TVD 属于耗散型格式, 它不需人为引入耗散项便可有效地抑制激波前后的数值振荡且捕捉的激波分辨率较高; 它可满足离散的熵条件以保证计算得到物理解。它是计算跨声速复杂流场的优秀格式。

本文采用有限体积法离散, 以适应复杂的物面边界。将 Harten 一维的 TVD 格式及修正数值通量技术推广到三维; 由于转动, 坐标系为非惯性系, 主方程出现了非齐次源项, 因此文中修改了数值通量中的限制函数, 并用于高速转动的复杂内流道流场计算, 成功地捕捉到高质量的流场激波, 并且与实验较接近。

## 一、守恒型 N-S 方程积分形式及带源项 Euler 方程

令  $(x, y, z)$  为以等角速度  $\vec{\omega}$  转动的直角笛卡尔坐标系(下文简称转动坐标系  $(x, y, z)$ ),  $x$  为转动轴。令  $\vec{V}$  与  $\vec{V}'$  分别代表绝对速度和相对速度, 并有如下关系<sup>[7,8]</sup>

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金和国家博士后基金资助项目。

本文于 1991 年 8 月 23 日收到, 1991 年 11 月 20 日收到修改稿。

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2)$$

$$\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{W} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (4)$$

引进  $U'$ 、 $E'$ 、 $Q'$ ，其定义为

$$U' = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\vec{V} \\ e_0 \end{bmatrix}, \quad E' = \begin{bmatrix} \rho\vec{W} \\ \rho\vec{W}\vec{V} - \Pi \\ e_0\vec{W} - \Pi \cdot \vec{V} - \lambda\nabla T \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho\vec{\omega} \times \vec{V} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_0 = \rho(C_v T + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V}) \quad (5b)$$

式中  $\lambda$  为热传导系数， $C_v$  为定容比热； $\vec{W}\vec{V}$  与  $\Pi$  分别为二阶张量，前者为相对速度  $\vec{W}$  与绝对速度  $\vec{V}$  的并矢，后者为应力张量；积分形式的 N-S 方程为

$$\frac{\partial_R}{\partial t} \iiint_{\Omega} U' d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot E' ds = \iiint_{\Omega} Q' d\Omega \quad (6)$$

式中  $\partial_R/\partial t$  代表在转动坐标系中对时间求偏导数； $\vec{n}$  为单位外法向矢量。对于无粘流，(6) 式可退化为带源项的 Euler 方程

$$\frac{\partial_R}{\partial t} \iiint_{\Omega} U d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot E ds = \iiint_{\Omega} \tilde{Q} d\Omega \quad (7)$$

这里  $U$ 、 $E$  和  $\tilde{Q}$  的定义为

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uu + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho vv + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{bmatrix} \quad (8a)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho ww + p \\ (e+p)w \end{bmatrix}, \quad E = F\vec{i} + G\vec{j} + H\vec{k} \quad (8b)$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\omega\rho w + \rho y(\omega)^2 \\ 2\omega\rho v + \rho z(\omega)^2 \\ \nabla \cdot (\lambda\nabla T) + \rho(\omega)^2(yv + zw) \end{bmatrix} \quad (8c)$$

其中  $e$  为

$$e = \rho \left( C_v T + \frac{1}{2} \vec{W} \cdot \vec{W} \right) \quad (9)$$

(7)式是本文求解的主方程,它是积分型非齐次双曲守恒律方程组。为书写方便,下文省略了 $\partial_R/\partial t$ 项中的下注脚 $R$ ,简记为 $\partial/\partial t$ 。

## 二、特征值、特征向量矩阵及其逆

本节约定:符号 $K$ 的下标 $t, x, y, z$ 分别表示 $K$ 对 $t, x, y, z$ 求偏导数; $A, B, C$ 分别表示 Jacobian 矩阵 $\partial F/\partial U, \partial G/\partial U, \partial H/\partial U$ ; 矩阵 $A, B, C$ 的统一表达式为

$$\begin{bmatrix} K_t & K_x & K_y & K_z & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & mK_x \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & mK_y \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & mK_z \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} \beta &= 0.5(\gamma - 1)(u^2 + v^2 + w^2), & e_1 &= \gamma e / \rho \\ e_2 &= e_1 - \beta, & m &= \gamma - 1, & n_1 &= 2 - \gamma \\ \theta_1 &= uK_x + vK_y + wK_z \\ a_{21} &= \beta K_x - u\theta_1, & a_{22} &= K_t + \theta_1 + un_1 K_x \\ a_{23} &= uK_y - vm K_x, & a_{24} &= uK_z - wm K_x \\ a_{31} &= \beta K_y - v\theta_1, & a_{32} &= vK_x - um K_y \\ a_{33} &= K_t + \theta_1 + vn_1 K_y, & a_{34} &= vK_z - wm K_y \\ a_{41} &= \beta K_z - w\theta_1, & a_{42} &= wK_x - um K_z \\ a_{43} &= wK_y - vm K_z, & a_{44} &= K_t + \theta_1 + wn_1 K_z \\ a_{51} &= (2\beta - e_1)\theta_1, & a_{52} &= K_x e_2 - um\theta_1 \\ a_{53} &= K_y e_2 - vm\theta_1, & a_{54} &= K_z e_2 - wm\theta_1 \\ a_{55} &= K_t + \gamma\theta_1 \end{aligned}$$

这里 $\gamma$ 为比热比。显然当 $K$ 分别取 $x, y, z$ 时便得到相应的 $A, B, C$ 矩阵。通常,矩阵(10)式有五个特征值,即

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = K_t + uK_x + vK_y + wK_z \\ \lambda_4 &= K_t + \lambda_1 + a \\ \lambda_5 &= K_t + \lambda_1 - a \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这里 $a$ 为声速。相应的特征向量矩阵为

$$\begin{bmatrix} K_x & K_y & K_z & b & b \\ uK_x & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & vK_y & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & wK_z & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \quad (12)$$

这里

$$b = \rho / (a\sqrt{2}) , \quad a_1 = (\beta + a^2) / (\gamma - 1)$$

$$\vec{i} \Omega_1 + \vec{j} \Omega_2 + \vec{k} \Omega_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ K_x & K_y & K_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= uK_y - \rho K_z, & a_{23} &= uK_x + \rho K_y \\ a_{24} &= b(u + aK_x), & a_{25} &= b(u - aK_x) \\ a_{31} &= vK_x + \rho K_z, & a_{33} &= vK_z - \rho K_x \\ a_{34} &= b(v + aK_y), & a_{35} &= b(v - aK_y) \\ a_{41} &= wK_x - \rho K_y, & a_{42} &= wK_y + \rho K_x \\ a_{44} &= b(w + aK_z), & a_{45} &= b(w - aK_z) \\ a_{51} &= c\beta K_x + \rho\Omega_1, & c &= 1 / (\gamma - 1) \\ a_{52} &= c\beta K_y + \rho\Omega_2, & a_{53} &= c\beta K_z + \rho\Omega_3 \\ a_{54} &= b(a_1 + a\theta_1), & b_{51} &= b(a_1 - a\theta_1) \end{aligned}$$

上述特征向量矩阵的逆阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & mu a_2 K_x & a_{13} & a_{14} & -m a_2 K_x \\ a_{21} & a_{22} & mv a_2 K_y & a_{24} & -m a_2 K_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & mwa_2 K_z & -m a_2 K_z \\ n(\beta - a\theta_1) & a_{42} & a_{43} & a_{44} & mn \\ n(\beta + a\theta_1) & a_{52} & a_{53} & a_{54} & mn \end{bmatrix} \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta a_2, & a_2 &= 1 / (a)^2, & m &= (\gamma - 1) \\ n &= 1 / (\rho a \sqrt{2}), & a_{11} &= (1 - \beta_1) K_x - \Omega_1 / \rho \\ a_{13} &= m v a_2 K_x + K_z / \rho \\ a_{14} &= m w a_2 K_x - K_y / \rho, & a_{21} &= (1 - \beta_1) K_y - \Omega_2 / \rho \\ a_{22} &= m u a_2 K_y - K_z / \rho, & a_{24} &= m w a_2 K_y + K_x / \rho \\ a_{31} &= (1 - \beta_1) K_z - \Omega_3 / \rho, & a_{32} &= m u a_2 K_z + K_y / \rho \\ a_{33} &= m v a_2 K_y - K_x / \rho, & a_{42} &= (a K_x - m u) n \\ a_{43} &= (a K_y - m v) n, & a_{44} &= (a K_z - m w) n \\ a_{52} &= -n(a K_x + m u), & a_{53} &= -n(a K_y + m v) \\ a_{54} &= -n(a K_z + m w) \end{aligned}$$

(11)、(12)、(13)式正是本文编制程序时所使用的式子。文献 [9] 给出了上述式子的推导过程，文献 [6] 给出了二维情况下的相应表达式。

### 三、Harten 的修正数值通量技术

为便于书写，本节约定：将  $F_{i,j,k}$ 、 $G_{i,j,k}$  和  $H_{i,j,k}$  分别简记为  $F_i$ 、 $G_i$  和  $H_k$ 。

相应的计算  $F_i$ ,  $G_i$  和  $H_k$  时用到的参量也作相应的简写, 例如计算  $F_i$  时要用  $g_{i,j,k}$  则这时可简记为  $g_i$ 。下面以  $F$  通量为例, 说明修正数值通量的过程。在 Harten 格式中  $F_i$  通量被修正为  $\tilde{F}_i$ ; 在三维情况下其具体表达式为

$$\tilde{F}_{i+1/2} = 0.5[F_i + F_{i+1} + (R\Phi)_{i+1/2}] \quad (14)$$

$$\Phi = [\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5]^T \quad (15a)$$

式中  $\Phi$  的元素  $\varphi^m$  ( $m=1\sim 5$ ) 是

$$\varphi_{i+1/2}^m = (g_i^m + g_{i+1}^m) - Q(a_{i+1/2}^m + \gamma_{i+1/2}^m) \alpha_{i+1/2}^m \quad (15b)$$

$$g_i^m = \min \text{mod} [\tilde{g}_{i+1/2}^m, \tilde{g}_{i-1/2}^m] \quad (15c)$$

$$\tilde{g}_{i+1/2}^m = \frac{1}{2} Q(a_{i+1/2}^m) \alpha_{i+1/2}^m \quad (15d)$$

$$\gamma_{i+1/2}^m = \begin{cases} (g_{i+1}^m - g_i^m) / \alpha_{i+1/2}^m, & (\alpha_{i+1/2}^m \neq 0) \\ 0, & (\alpha_{i+1/2}^m = 0) \end{cases} \quad (15e)$$

$$[\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5]_{i+1/2}^T = R_{i+1/2}^{-1} (U_{i+1} - U_i) \quad (15f)$$

式中  $g_i^m$  称作限制函数, 它的构造应满足 TVD 格式的充分条件; 而  $Q(z)$  称为熵强迫函数, 它的选择使其避免出现膨胀激波, 避免非物理解的产生。本文  $Q(z)$  函数的选取同文献[1,5]。另外, 矩阵  $A$  的特征向量矩阵  $R$  与逆矩阵  $R^{-1}$  间有如下关系

$$R^{-1} A R = \text{diag}[\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5] \quad (15g)$$

对于数值通量  $\tilde{G}$  与  $\tilde{H}$  的表达式也可完全类似地得到。

#### 四、非齐次项的处理

为了得到非齐次双曲型守恒律方程组高分辨率的数值解, 本文对源项作了如下处理: 为了说明限制函数的修改过程, 不妨将(7)式写为微分型

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \tilde{Q}(U) \quad (16)$$

如同文献[9]所分析的, 由于有源项  $\tilde{Q}(U)$ , 此时的数值通量  $\tilde{F}$  虽形式上仍可用(14)式, 但这时  $\tilde{g}^m$  的计算已不能用(15d)式而必须用下式

$$\tilde{g}_{i+1/2}^m = \frac{1}{2} Q(a_{i+1/2}^m) \alpha_{i+1/2}^m + \frac{1}{2} (\Delta t) a_{i+1/2}^m (\alpha_1)_{i+1/2}^m \quad (17)$$

其中  $\alpha_1^m$  是方程组

$$\sum_{m=1}^5 (\alpha_1^m R^m)_{i+1/2} = 0.5[\tilde{Q}(U_i) + \tilde{Q}(U_{i+1})] \quad (18)$$

的解。式中  $R^m$  ( $m=1\sim 5$ ) 为列阵, 满足

$$[R^1, R^2, R^3, R^4, R^5] = R \quad (19)$$

对于数值通量  $\tilde{G}$  与  $\tilde{H}$  的计算, 可仿照上述过程完成。详细的细节可参见文献[9]。

## 五、主方程离散及推进求解

在引进了 Harten 的数值通量并计入非齐次项的影响之后, 数值求解的主方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} U d\Omega = \iiint_{\Omega} \tilde{Q} d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \tilde{E} ds \quad (20)$$

式中  $\tilde{E}$  定义为

$$\tilde{E} = \tilde{F} \vec{i} + \tilde{G} \vec{j} + \tilde{H} \vec{k} \quad (21)$$

将方程(20)用于任一有限体积元  $\Omega_{i,j,k}$  上, 得半离散方程

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega_{ijk} U_{ijk}) = \Omega_{ijk} \tilde{Q}_{ijk} - \sum_{m=1}^6 (s \vec{n} \cdot \tilde{E})_m \equiv Q_{ijk} \quad (22)$$

(22)式完成了对空间离散, 下步要进行时间推进以得到定常解。本文采用了多步 Runge-Kutta 法以保证差分格式在时间方向上具有二阶精度。

边界条件, 参考了文献[10]的处理过程。对于有限体积法, 由于物面边界(简记为  $\Gamma$ )上恒有  $(\vec{v} \cdot \vec{n})_r = 0$ , 故只要知道物面上的压力便可算出(22)式右端项  $Q_{ijk}$ ; 相对于其它方法, 这里边界条件处理较为容易。

(22)式的数值求解, 采用了四步 Runge-Kutta 法。为便于叙述, 下文用  $\mathbf{W}$  (注意这里  $\mathbf{W}$  不代表相对速度) 表示  $(\Omega_{ijk} U_{ijk})$  项, 用  $\mathbf{R}$  (注意这里  $\mathbf{R}$  不代表  $\mathcal{A}$  的特征向量矩阵) 表示  $Q_{ijk}$  项, (22)式可写为

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} = \mathbf{R} \quad (23)$$

标准的 R-K 四步格式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}^{(0)} &= \mathbf{W}^n \\ \mathbf{W}^{(m)} &= \mathbf{W}^{(0)} + \alpha_m \Delta t \mathbf{R}^{(m-1)}, \quad m=1 \sim 4 \\ \mathbf{W}^{n+1} &= \mathbf{W}^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中  $\mathbf{W}^n$  和  $\mathbf{W}^{n+1}$  分别表示第  $n$  与第  $n+1$  时间步的  $\mathbf{W}$  值,  $\mathbf{R}^{(m-1)}$  表示用  $\mathbf{W}^{(m-1)}$  计算的残值; 符号  $\alpha_m (m=1 \sim 4)$  并不代表(15f)式的值, 在这里  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\alpha_4$  分别取作  $1/4, 1/3, 1/2$  和  $1$ ;  $\Delta t$  为时间步长, 它与 CFL 数成正比, 为加速收敛, 采用隐式残值光顺加速收敛技术<sup>[11]</sup>, 即在 Runge-Kutta 法的第二与第四步引进隐式残值光顺步。计算表明, 隐式残值光顺技术对提高允许的 CFL 数十分有效。本文在计算时 CFL 数可取到 6; 算例表明, 仅需推进百余步便可获得收敛的流场解。

## 六、典型算例

为考查本格式对非齐次双曲型守恒律方程组的有效性和它具有的高分辨率特点, 本文选用了内流中流场和激波都比较复杂的跨声速压气机转子流场, 即对 DFVLR 轴流式压气机转子内的三维跨声速流场进行了计算。该转子由 28 个 MCA 型叶片组成, 设计

转速 20260 转/分, 流量为 17.3 千克/秒, 设计滞止压比为 1.51, 叶片前缘顶部直径为 339 毫米, 轮毂比为 0.5, 计算取设计工况, 进口处相对马赫数沿叶高在 0.73~1.37 左右, 计算时采用贴体网格, 它用简单几何办法生成, 即采用沿径向、周向、轴向定比划分流道的办法得到  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  这三族曲面, 图 1 给出叶面到叶面(即  $S_1$  面)、叶根到叶

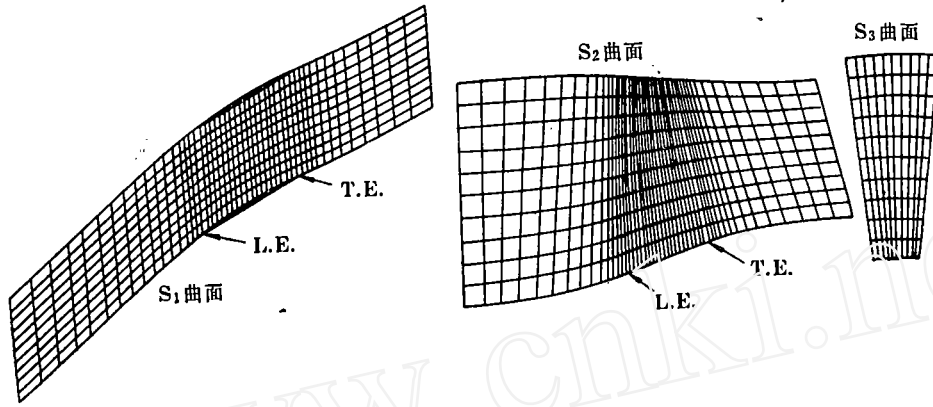


图 1 投影在平面上的三族空间曲面及计算网格  
Fig.1 Coordinate surfaces and calculation grid projected on planes

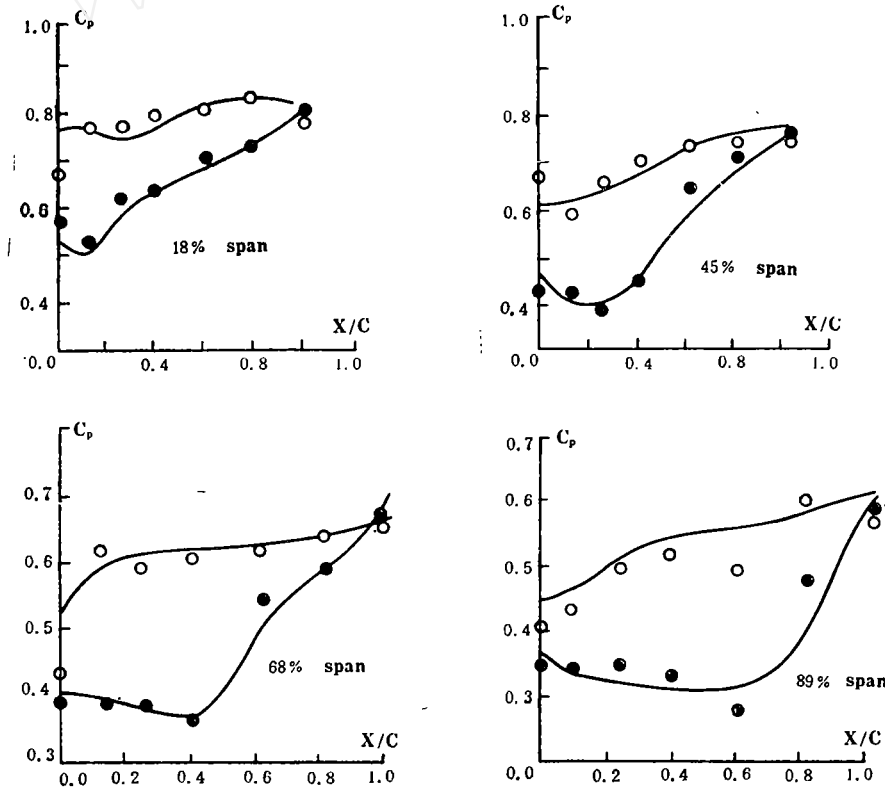


图 2 计算的叶面压力系数与实验的比较  
Fig.2 Comparisons of computed surface pressure and DFVLR data

顶(即  $S_2$  面)以及周向截面(即  $S_3$  面)上的网格。这三族曲面相互交织便得到有限体积法

中一系列的单元，本文选取的单元数(沿轴向、周向、径向)为  $49 \times 10 \times 10$ ；图 2 给出四个  $S_1$  面(即 18%，45%，68%和 89% 相对叶高处的四个回转面)上压力系数  $C_p$  (即静压与进口相对总压的比)沿叶面的分布及与实验数据<sup>[12]</sup> 的比较。图 3 给出 89% 截面全场等马赫线的分布，看来它与实验图形较相近。图 4 分别给出三个  $S_2$  面(即叶片的吸力面，50% 叶距的  $S_2$  面又简称中心  $S_2$  曲面，以及叶片的压力面)上等马赫线的分布。(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t 分别为 1.48, 1.42, 1.36, 1.30, 1.24, 1.18, 1.13, 1.08, 1.02, 0.96, 0.90, 0.84, 0.78, 0.74, 0.70, 0.68, 0.65, 0.60, 0.55, 0.52)。图 5 给出三个典型  $S_1$  面(即 68%，89%和 100% 相对叶高处的回转面)上捕捉的通道激波的位置。图 4 和图 5 中激波的形状和位置反映了激波间断

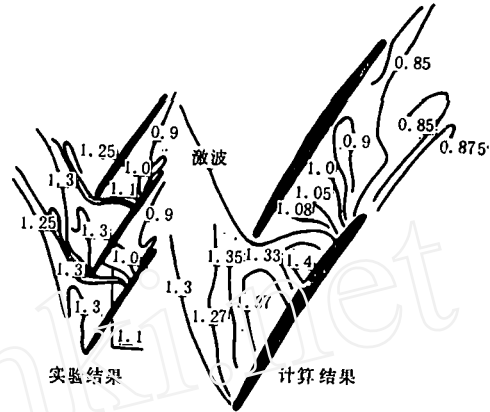


图 3 89% 叶高面上等马赫线分布与实验的比较  
Fig.3 Computed Mach number contours distribution at 89% span and comparison with experimental data

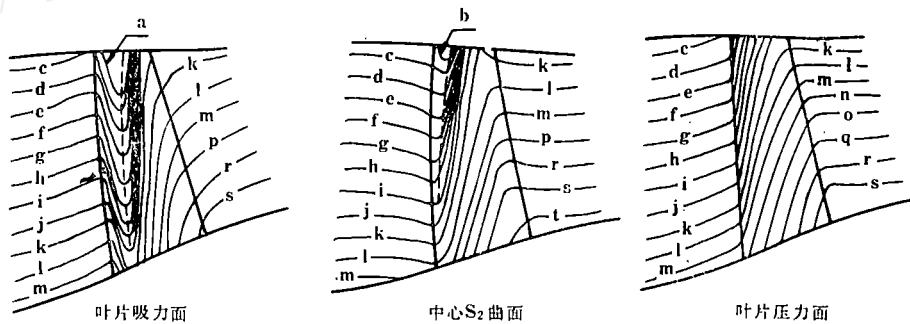


图 4 三个  $S_2$  面上等马赫数线的分布  
Fig.4 Computed Mach number contours distribution on three  $S_2$  surfaces.

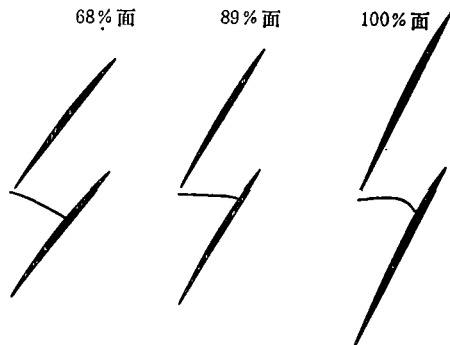


图 5  $S_1$  面上计算出的激波位置  
Fig.5 Computed shock on  $S_1$  surfaces

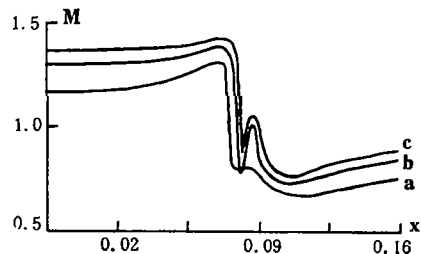


图 6 沿 a, b, c 线马赫数的变化  
Fig.6 Mach number variation along a-, b- and c-lines

面的空间形状和翘曲的状态。显然，图 5 中三个  $S_1$  面与中心  $S_2$  面相交得到三条空间曲线，



不妨分别称作  $a, b, c$  线(注意, 通常它们不一定是流线), 图 6 给出了沿这三条空间曲线的马赫数分布, 它反映了沿中心  $S_2$  面上气流的流动。整个求解中, 激波前后没出现“低亏、过跳”、伪振荡现象, 即激波前后没有出现大的数值波动。计算出的熵分布也较为合理。计算时选用了大的 CFL 数(本文取为 6), 采用了隐式残值光滑技术, 仅推进了 150 个时间步, 残差便下降三个数量级。捕捉的激波分辨率较高, 激波宽度不超过两个网格间距, 计算的含激波间断跨声速流场与实验较接近。

## 七、结 论

本文发展了一种求解非齐次双曲型守恒律方程组的高分辨率格式。它结合了 Harten 的 TVD 概念和他的修正数值通量技术, 改进了限制函数, 并用有限体积法离散及多步 Runge-Kutta 法求解, 成功地求解了带非齐次源项的三维跨声速 Euler 方程组。典型内流算例表明: 该算法计算稳定, 能使用大的 CFL 数, 收敛较快, 推进百余步就能得到收敛解, 且捕捉的激波仅占一至两个网格间距, 具有较高的分辨率。

## 参 考 文 献

- 1 Harten A. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 1984, 21(1):1~23
- 2 庄逢甘, 王垒. 空气动力学学报, 1987, 5(4):318~325
- 3 黄敦, 陈让福. 构造总变差不增格式的思路和若干数学论证, 1989 年北京计算流体力学讨论会文集, 27~38
- 4 张涵信. 空气动力学学报, 1988, 6(2):143~165
- 5 周新海. 工程热物理学报, 1989, 10(3):269~272
- 6 王保国, 陈乃兴. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 6(3):204~213
- 7 沈孟育, 周盛, 林保真. 叶轮机械中的跨声速流动, 北京: 科学出版社, 1988. 1~24
- 8 刘高联, 王甲升. 叶轮机械气体动力学基础. 北京: 机械工业出版社, 1980.
- 9 王保国. 跨声速叶栅流动数值计算的新方法, 博士学位论文, 中国科学院, 1990, 1~149
- 10 张耀科, 沈孟育. 空气动力学学报, 1985, 3(2):29~36
- 11 Jameson A and Baker T J. AIAA paper 83-1929
- 12 Dunker R J, Strinning P E and Weyer H B. ASME paper 77-GT-28

## Finite Volume-TVD Scheme for 3-D Euler Transonic Flows Computations in Rotating Curvilinear Coordinates

Wang Baoguo Bian Yingui  
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

**Abstract** An efficient algorithm that exploits the properties of both total variation diminishing(TVD) schemes developed by Harten and Runge-Kutta ones developed by Jameson is presented in this paper. In the algorithm, TVD is implemented in the framework of an explicit finite volume approach. The discretized flux at an arbitrary computational cell interface is evaluated by Harten's modified numerical flux. Time integration of the system of ordinary differential equations, obtained after spatial discretization, is performed by a Runge-Kutta algorithm and implicit residuals averaging technique in accelerating convergence. The goal of this work is to extend one-dimensional Harten's scheme to three dimensional nonlinear hyperbolic conservation laws with source (i. e. , nonhomogeneous hyperbolic conservation laws). The new algorithm has been used to compute 3-D Euler transonic or supersonic flows in rotating frame of reference.

Numerical test has been selected the 3-D transonic flow field within an axial-flow single-stage compressor rotor tested by DFVLR. The rotating frame has been selected a body-fitted coordinate system rotating with the blade row. Comparisons between the computed flow field and the experimental data have been made. It is clear that the agreement of prediction with experiment is good. Numerical results show that this algorithm can capture the shock in 1-3 grid points. It indicated that the algorithm is quite robust and can generate good shock resolution.

**Key words** transonic flow, body-fitted coordinate, finite volume method, TVD, modified numerical flux, Euler equation, comparison of numerical calculation with experiment,