第 25 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 25, No.5
1993 年 9 月 ACTA MECHANICA SINICA Sep., 1993

刚性微粒填充的高聚物非线性粘弹性本构关系的微力学分析[1)]

杨黎明
(北京大学力学系，北京 100871)
王礼立
(中国科技大学近代力学系，宁波大学，宁波 315211)
朱兆祥
(中国科学院力学研究所，北京 100080)

提要 在应变具有可加性条件下，本文分析表明 Eshelby 线性微力学理论，包括其等效包含体方法和相应的平均化方法可推广应用于研究高刚度微粒填充高聚物的非线性粘弹性本构关系.

关键词 微力学，二相粒子复合材料，非线性粘弹性本构关系

一、引　　言

人们对于微粒 (短纤维和粒子) 增强材料在准静态和线性范围的力学性能已有较多了解，但对其动态、非线性力学性能的了解则远远不足 [1]. 特别在高技术所常涉及的冲击载荷条件下，材料所经受的应变率常高出准静态下七、八个量级，其变形也超过了小变形范围. 这时，对于以高聚物为基体的玻璃短纤维或球珠等微粒增强材料 (PCP) 来说，一方面由于高聚物是典型的粘弹性材料，需计及本构特性的应变率相关性；另一方面则由于微粒的刚度往往比高聚物的刚度高两个数量级，微粒在这类复合材料中的变形远远小于高聚物基体的变形，微粒可近似地看成刚性体，所以问题可归结为研究刚性微粒增强材料的非线性、率相关本构关系.

人们从理论和试验研究两方面对微粒增强材料本构特性作了探索． 50 年代后期兴起的微力学理论既与多晶金属材料的性能及夹杂物等对其影响的研究有关，也与本目标的追求有关. 这方面的工作可参看 Mura 的专著 [2]. 可惜这类理论迄今仅适用于线性范围. 在试验研究方面，本文作者曾以短纤维增强聚碳酸酯为代表研究了复合材料在 10^{-4}—10^3/s 应变率范围内的一维非线性粘弹性行为 [3], 并发现复合材料的非线性粘弹性本构关系 $\sigma_c(\varepsilon,\dot\varepsilon)$ 可由基体的非线性粘弹性本构关系 $\sigma_m(\varepsilon,\dot\varepsilon)$ 与反映纤维特性的增强系数 G 之乘积来表述

$$\sigma_c = G\cdot\sigma_m(\varepsilon,\dot\varepsilon) \tag{1}$$

1) 本文于 1992 年 11 月 6 日收到.
本文英文稿已在《力学学报》英文版 1993 年第 9 卷第 3 期刊登.

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

式中 $\varepsilon,\dot{\varepsilon}$ 分别表示材料在外载方向上宏观的应变和应变率．由试验支持的这一结果是令人鼓舞的．但式 (1) 是否反映出 PCP 的普遍规律，从理论角度怎样来理解并给以证明，以及 G 与材料的特征参量有何定量关系等等，尚需作进一步研究．

为此，我们一方面对这一问题作了微力学的理论研究，主要是把 Eshelby 等效包含体理论从线弹性推广到非线性粘弹性，确定 PCP 的宏观本构关系；另一方面进一步对以多种不同的热塑性塑料为基体并含有不同含量短纤维的一系列 PCP 在 10^{-4}—10^{3}/s 应变率范围进行了系统的试验研究 [4]．本文给出这一研究的理论部分的主要结果．

二、在非线性粘弹性基体中含刚性微粒的等效包含体方法

1. 基体和微粒的本构关系

在 PCP 中，由于微粒与高聚物基体相比其刚度大得多而粘滞性小得多，可设微粒满足线弹性定律

$$\boldsymbol{\sigma}^I=\lambda^I I\mathbf{I}+2\mu^I\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

式中 λ^I, μ^I 为微粒的弹性常数． I 是应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的第一不变量，并记 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的第二、第三不变量分别为 II 、 III. 上标 I 指属于微粒的量，记上标 M 属于基体的量．

试验研究表明，许多高聚物的本构特性可用非线性弹性和线性粘弹性之和所组成的 IWT 方程表述 [5]．据此，我们假定高聚物基体的本构模型为

$$\boldsymbol{\sigma}^M=\boldsymbol{\sigma}^E(\varepsilon)+\sum_{n=1}^{N}\int_0^t[2\mu_n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t')+\lambda_n\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t')\mathbf{I}]\exp\Big(-\frac{t-t'}{\tau_n}\Big)\mathrm{d}t' \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^E(\varepsilon)=\lambda_0(I,II,III)I\mathbf{I}+2\mu_0(I,II,III)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3b}$$

式中 N 是高聚物在很宽的应变率谱 (或频率谱) 上主要松弛转变过程的次数，λ_n, μ_n $(n=1,\cdots,N)$ 是相应的弹性模量， τ_n 是相应的松弛时间． $\boldsymbol{\sigma}^E$ 是平衡态应力，仅是应变的非线性函数．我们假定这非线性依赖关系是拟线性的，即 λ_0, μ_0 是依赖于应变不变量 I 、 II 、 III 的割线模量．试验结果还表明，高聚物的 Poisson 比 ν 在变形过程中除初始阶段有轻微的提高，其后即保持恒定．我们假定各个松弛机制中的 Poisson 比 ν_n 在变形过程中保持恒定，且都等于基体的总 Poisson 比 ν.

$$\nu=\nu_n=\frac{\lambda_n}{2(\lambda_n+\mu_n)}=\text{常数}\quad(n=0,1,\cdots,N) \tag{4}$$

为处理粘弹性本构关系中对时间 t 的依赖关系，对 (2) 和 (3) 式中的 t 作 Laplace 变换，定义

$$\bar{f}=F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp(-st)\mathrm{d}t\quad(s>0)$$

得

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^I=\lambda^I\cdot\bar{I}\cdot\mathbf{I}+2\mu^I\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^M=\overline{\lambda_0 I}\mathbf{I}+2\overline{\mu_0\boldsymbol{\varepsilon}}+\bar{\lambda}^M\bar{I}\mathbf{I}+2\bar{\mu}^M\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

式中

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}^M &= \sum_{n=1}^{N}\frac{s\mu_n}{s+1/\tau_n}\\ \bar{\lambda}^M &= \sum_{n=1}^{N}\frac{s\lambda_n}{s+1/\tau_n}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这样，只要基体遵循广义 ZWT 方程 (式 (3)), 非线性粘弹性问题就转化为非线性弹性问题.

我们定义割线模量为材料的刚度，那么微粒的刚度远高于基体的刚度意味着

$$\lambda^I >> \lambda_0(I,II,III)\ ,\ \lambda^M\ ;\quad \mu^I >> \mu_0(I,II,III)\ ,\ \mu^M \tag{8}$$

2. Eshelby 等效包含体方法的非线性推广

本文采用线性应变描述材料的变形，因而具有可加性. 线性应变实际上可适用于描述转动很小但伸缩度在 0 、 1 范围之内的大变形 [6], 这正是球形微粒增强高聚物在一维外力作用下的实验研究所涉及的，也是本文讨论的实际应变范围.

设 PCP 在外载作用下，基体的平均应变为 $\langle\varepsilon\rangle_m$, 记异质包含体 (微粒) 引起的扰动应变为 ε^c, 则微粒中的应变 $\langle\varepsilon\rangle_I$ 为 $\langle\varepsilon\rangle_m+\varepsilon^c$. 把 Eshelby 的等效同质包含体概念推广到非线性材料，将同质包含体中的 ε^c 看作是在外载和本征应变 ε^* 共同作用下产生的扰动应变，考虑到 Mori-Tanaka 的宏观平均理论 [7], 在复合体内微粒中的应力 σ^I, 或表为其 Laplace 变换的形式 $\bar{\sigma}^I$, $\bar{\sigma}^I$ 等于

$$\begin{aligned}&\lambda^I\mathrm{tr}(\langle\bar{\varepsilon}\rangle_m+\bar{\varepsilon}^c)\mathbf{I}+2\mu^I(\langle\bar{\varepsilon}\rangle_m+\bar{\varepsilon}^c)\\ =\ &\overline{\lambda_0(I^a,II^a,III^a)I^a}\mathbf{I}+2\overline{\mu_0(I^a,II^a,III^a)\varepsilon^a}+\bar{\lambda}^m\bar{I}^a\mathbf{I}+2\bar{\mu}^M\bar{\varepsilon}^a\end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$\varepsilon^a=\langle\varepsilon\rangle_m+\varepsilon^c-\varepsilon^*=\langle\varepsilon\rangle_I-\varepsilon^* \tag{10}$$

I^a, II^a, III^a 是 ε^a 的三个不变量， ε^* 是微粒所对应等效同质包含体的本征应变.

如果基体的本构关系是线性的，即 μ_0, λ_0 是不依赖于应变的常量，那么

$$\varepsilon^c=\mathbf{S}:\varepsilon^*\quad(\bar{\varepsilon}^c=\mathbf{S}:\bar{\varepsilon}^*) \tag{11}$$

四阶的 Eshelby 张量 $\mathbf{S}$ 是基体材料 Poisson 比 ν 的函数，由假定 (4) 式知 $\mathbf{S}$ 不是时间的函数. 对球形微粒

$$S_{iiii}=\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}=a\ ,\quad S_{iijj}=\frac{5\nu-1}{15(1-\nu)}=b\ ,\quad S_{ijij}=S_{jiji}=\frac{4-5\nu}{15(1-\nu)}$$

上式的 $i,j=1,2,3,\ i\neq j$; 式中的重复指标不取和， $\mathbf{S}$ 的其它分量为零. 在本文所讨论的微粒刚度比基体刚度高得多的情况下，即考虑到 (8) 式，可近似忽略微粒的变形. 这实质上是将微粒近似地看作不变形的刚性体，则近似地有

$$\langle\bar{\varepsilon}\rangle_I=\langle\bar{\varepsilon}\rangle_m+\bar{\varepsilon}^c=0 \tag{12a}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

并从而由 (11) 式近似地有

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = -\mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{12b}$$

由上述讨论可以看到对于本构行为线性依赖于应变和应变率及其历史的材料中的等效包含体问题，只需利用 Laplace 变换，可将其化成等价的线弹性问题 [8]. 换句话说，这类材料的率依赖关系并没有给解决相应的等效包含体问题带来困难，我们总能用 Laplace 变换来处理这类材料的率依赖关系. 然而，当基体的本构关系为非线性时， μ_0, λ_0 是应变不变量的函数，这时本征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 与扰动应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ 的关系通常不满足 (11) 式，在探讨 PCP 的本构关系中，非线性本构带来的第一个困难在于如何确定 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ 间的关系. 一般地说，我们设想可用某个非线性张量函数 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}^c)$ 来描述 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ 间的关系

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}^c) : \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{13}$$

这样， Eshelby 等效包含体方法能否用于研究非线性 PCP 问题，其关键在于确定 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}^c)$. 下面来说明，对于高刚度的微粒， $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}^c)$ 可近似地化为 Eshelby 张量 $\mathbf{S}$.

先选取两种假想的线弹性基体材料 A 和 B, 使其 Poisson 比均与 PCP 中的非线性基体材料 (记为 P) 的 Poisson 比相等

$$\nu_A = \nu_B = \nu \tag{14}$$

而它们的本构关系分别为

$$\sigma^A = \lambda_A I\mathbf{I} + 2\mu_A \boldsymbol{\varepsilon} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^B = \lambda_B I\mathbf{I} + 2\mu_B \boldsymbol{\varepsilon} \tag{16}$$

在本文所关心的应变率范围内，让 A 的刚度高于 P 的刚度，而 P 的刚度又高于 B 的刚度，因而有

$$\mu^I >> \mu_A > \mu_B\ , \quad \lambda^I >> \lambda_A > \lambda_B \tag{17}$$

假想以 A 和 B 为基体，分别加入与 PCP 中相同形状、相同含量的微粒，构成复合材料 PCA 和 PCB.

既然等效本征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 实质上描述异质微粒与基体间的不协调应变，则当材料的宏观变形给定，随着微粒与基体的刚度相差增大，本征应变在数值上将增大. 这样，若三种复合材料 PCA, PCP, PCB 有相同的宏观应变 $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$, 对本问题考虑到微粒的应变近似为零，即若它们基体的平均应变 $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m$ 相等，那么按 (17) 式必有

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_A^*| \le |\boldsymbol{\varepsilon}^*| \le |\boldsymbol{\varepsilon}_B^*| \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}_A^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}_B^*$ 分别为 PCA 、 PCP 、 PCB 在相同的 $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m$ 下，微粒所对应的等效包含体的本征应变， $|\boldsymbol{\varepsilon}^*|$ 等表示对 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 的各个分量取绝对值. 由于 PCA 和 PCB 是线弹性材料，容易写出其微粒内的应力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_A^I &= \lambda^I \mathrm{tr}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}_A^c)\mathbf{I} + 2\mu^I(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}_A^c) \\ &= \lambda_A \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_A^a \mathbf{I} + 2\mu_A \boldsymbol{\varepsilon}_A^a\end{aligned}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_B^I &= \lambda^I \mathrm{tr}(\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}_B^c) + 2\mu^I(\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}_B^c) \\ &= \lambda_B \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_B^a \mathbf{I} + 2\mu_B \boldsymbol{\varepsilon}_B^a\end{aligned}$$

并且

$$\boldsymbol{\varepsilon}_A^c = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}_A^*\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_B^c = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}_B^*$$

下标 A 和 B 分别表示属于 PCA 和 PCB 中的量. 在刚性微粒假定下，可求得类似于 (12) 式的结果

$$\boldsymbol{\varepsilon}_A^c = \boldsymbol{\varepsilon}_B^c = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}_A^* = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}_B^* = -\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m \tag{19}$$

从而，根据 (18) 式，在 PCP 中，有下式成立

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{20}$$

即当微粒的刚度远远高于基体的刚度时， (13) 式中的 $\mathbf{T}(\boldsymbol{\varepsilon}^c)$ 近似等于 Eshelby 张量 $\mathbf{S}$. 将 (20) 式代入 (9) 式，容易看到，即使基体的本构关系是非线性的，但 $\boldsymbol{\varepsilon}^c$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 的关系仍可由线性的 (20) 式表述.

同理，上述结论可用于研究在外载荷作用下，复合体内具有附加本征应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^T$($\boldsymbol{\varepsilon}^T$ 与外力场无关) 的刚性微粒内的应力. 若将基体材料 P 的本构关系 (3) 式简记为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon})$$

则在外力场和 $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ 的共同作用下，基体的平均应变为 $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m$, 微粒内的应力 $\boldsymbol{\sigma}^I$ 为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^I &= \lambda^I \mathrm{tr}(\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^T)\mathbf{I} + 2\mu^I(\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^T) \\ &= \mathbf{N}(\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^T - \boldsymbol{\varepsilon}^{**}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^c &= \mathbf{S} : (\boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^{**})\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

考虑到微粒刚度远高于基体刚度的条件，从上式我们得到近似关系

$$\left.\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m + \boldsymbol{\varepsilon}^c - \boldsymbol{\varepsilon}^T = 0 \\ &\boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{S} : (\boldsymbol{\varepsilon}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^{**})\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

(22) 式是线性方程，可将 $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{**}$ 写成

$$\left.\begin{aligned}&\langle\boldsymbol{\varepsilon}^d\rangle_m = \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m + \langle\boldsymbol{\varepsilon}^{Tm}\rangle_m \\ &\boldsymbol{\varepsilon}^{**} = \boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^{T*}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中， $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 分别是复合体仅在外力场作用下基体的平均应变和微粒所对应的等效包含体的本征应变； $\langle\boldsymbol{\varepsilon}^{Tm}\rangle$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{T*}$ 分别是在外力自由的复合体中微粒具有附加

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

本征应变 ε^T 时，基体的平均应变和微粒所对应的等效包含体的本征应变．ε^{T*} 等于将应力自由的微粒放入应变为 $-\varepsilon^T$ 的基体中，微粒对应的等效包含体的本征应变．

若三种复合材料 PCA 、 PCP 、 PCB 在外力作用下，具有相同的宏观应变，现假想让这三种复合材料中的微粒产生相等的附加本征应变 ε^T, 则根据上述的讨论容易知道，在这三种复合材料中，由外力产生的微粒的等效本征应变是相等的，由 ε^T 所产生的微粒的等效本征应变也是相等的，所以这三种材料的微粒总的等效本征应变是相等的，并且在它们的微粒内均有 (21) 式成立，从 (21) 式可知，三者基体的平均应变 $\langle\varepsilon^d\rangle_m$ 也是相等的．

三、 PCP 非线性本构关系

设两种复合材料 PCP 和 PCA 分别在外力 $\mathbf{F}(t)$ 和 $\mathbf{F}_A(t)$ 作用下，其对应宏观应力 (应力的体积平均) 记为 $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{\sigma}_A\rangle$, 产生了相同的宏观应变 $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$

$$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle=\frac{1}{V}\int_V\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V=f\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_I+(1-f)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_m \tag{24}$$

$$\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle=\frac{1}{V}\int_V\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}V=f\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_I+(1-f)\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m=(1-f)\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m \tag{25}$$

式中 V 是复合材料的体积，f 是微粒的体积含量，$\langle\ \rangle_I$ 和 $\langle\ \rangle_m$ 分别表示在微粒和基体中取体积平均． (25) 式中的最后一个等式已计及刚性微粒的近似关系 (12a) 式．此结果意味着若这两种材料的 $\langle\varepsilon\rangle$ 相等，则它们的基体平均应变也相等． (24) 式是对 PCP 材料写出的，但对 PCA 材料也成立，只需将式中的 $\boldsymbol{\sigma}$ 换成 $\boldsymbol{\sigma}_A$. 现在让在这种外载作用下的材料 PCP 和 PCA 中的微粒产生相同的附加本征应变 $\varepsilon^T=\varepsilon^0$, 对于刚性微粒由前面的分析已知，两基体的平均应变 $\langle\varepsilon^d\rangle_m$ 相等．现选取 $\varepsilon^T=\langle\varepsilon^d\rangle_m$, 则对于 PCP 从 (21) 和 (22) 式可得到

$$\boldsymbol{\sigma}^I=\mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon}^0)\quad \boldsymbol{\varepsilon}^c=0 \tag{26}$$

而对于 PCA, 类似地有

$$\boldsymbol{\sigma}^I=\mathbf{L}^A(\boldsymbol{\varepsilon}^0)\ ,\quad \boldsymbol{\varepsilon}^c=0 \tag{27}$$

$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{L}^A(\boldsymbol{\varepsilon})$ 是基体材料 A 的线弹性本构关系．注意到附加本征应变 ε^T 只改变材料中的内应力，不改变宏观应力或远场应力；再注意到 $\varepsilon^c=0$ 意味着微粒不引起扰动应变，或即微粒的应变 (附加本征应变) 与基体的平均应变相等，而基体的应变不均匀只能由微粒引起，当微粒不产生应变扰动时，基体的应变必是均匀的，且等于微粒的应变，即微粒附加的本征应变 $\varepsilon^T=\varepsilon^0$. 进一步可推知应力也必是均匀的．这样，(26) 和 (27) 式表明：若材料 PCP 和 PCA 分别在 $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{\sigma}_A\rangle$ 作用下产生了相同的宏观应变 $\langle\varepsilon\rangle$, 则基体材料 P 和 A 分别在 $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ 和 $\langle\boldsymbol{\sigma}_A\rangle$ 作用下将产生相同的应变 ε^0. $\langle\varepsilon\rangle$ 与 $<\varepsilon^0$ 的关系则可由线弹性材料 PCA 确定如下：

对于线弹性材料 PCA, 从平均应力的关系 (24) 式，利用线弹性的等效包含体方法，可以求得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0=\mathbf{G}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle \tag{28}$$

$$\mathbf{G}=\frac{f}{1-f}\mathbf{S}^{-1}+\mathbf{I}^{(4)} \tag{29}$$

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

式中 $\mathbf{S}^{-1}$ 是 $\mathbf{S}$ 的逆，$\mathbf{I}^{(4)}$ 是四阶单位张量. 从上述已知，(28) 式同样适用于非线性材料 PCP 中. (28) 式意味着，PCP 和 P 在相同的外载荷作用下，若 PCP 的宏观应变为 $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$, 那么基体材料 P 的应变为 $\mathbf{G}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle$. 如果已知基体材料 P 的本构关系为 (3) 式，那么对应的高刚度微粒增强体 (PCP) 的本构关系则为

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \boldsymbol{\sigma}^{Ec} + \sum_{n=1}^{N}\int_0^t [2\mu_n \mathbf{G}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t') + \lambda_n \mathrm{tr}[\mathbf{G}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t')]\mathbf{I}]\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_n}\right)\mathrm{d}t' \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{Ec} = \lambda_0(J_1,J_2,J_3)J_1\mathbf{I} + 2\mu_0(J_1,J_2,J_3)\mathbf{G}:\boldsymbol{\varepsilon} \tag{30b}$$

式中 J_1, J_2, J_3 分别是 $\mathbf{G}:\boldsymbol{\varepsilon}$ 的第一、第二、第三不变量.

如果复合材料 PCP 在一维应力作用下，且取外力方向为标架的 x_1 轴向，那么 (28) 和 (29) 式可写成标量关系式

$$\varepsilon_{11}^0 = g\langle\varepsilon_{11}\rangle \tag{31}$$

并且

$$\nu^c = -\frac{\langle\varepsilon_{22}\rangle}{\langle\varepsilon_{11}\rangle} \tag{32}$$

其中

$$g = \frac{k^2 + k(2a+b) + a^2 + ab - 2b^2}{k(a-2\nu b) + a^2 + ab - 2b^2} \tag{33}$$

$$\nu^c = \frac{\nu(a^2+ab-2b^2) + k[\nu(a+b) - b]}{k(a-2\nu b) + a^2 + ab - 2b^2} \tag{34}$$

$k = f/(1-f)$ 是微粒体积与基体体积之比. 基体本构关系 (3) 式的一维表达式可化为

$$\sigma_{11} = E_0(I,II,III)\varepsilon_{11} + \sum_{n=1}^{N}\int_0^t E_n \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_n}\right)\dot{\varepsilon}_{11}\mathrm{d}t' \tag{35}$$

式中

$$E_i = (1-2\nu)\lambda_i + 2\mu_i \quad (i = 0,1,\cdots,N)$$

那么，我们容易得到 PCP 的一维本构关系

$$\sigma_{11}^c = E_0(J_1,J_2,J_3)g\varepsilon_{11} + \sum_{n=1}^{N} g\int_0^t E_n \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_n}\right)\dot{\varepsilon}_{11}\mathrm{d}t' \tag{36}$$

式中

$$J_1 = (1-2\nu)g\varepsilon_{11}\,, \quad J_2 = \nu(2-\nu)g^2\varepsilon_{11}^2\,, \quad J_3 = \nu^2 g^3\varepsilon_{11}^3$$

四、结 语

本文在研究高刚度微粒填充非线性粘弹性高聚物的本构关系中，首先借助 Laplace 变换方法，将描述材料力学行为的应变率及其历史依赖性的积分型本构方程化为代

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

数式，解决了由于本构关系的时间 (速率) 依赖性所产生的问题．这样我们只需探讨和解决因材料的非线性弹性所造成的困难．然后用等效包含体方法分析高刚度微粒填充非线性弹性材料，结果表明等效包含体的本征应变与复合材料宏观应变的关系不依赖于基体材料的模量，仅与基体的 Poisson 比和微粒的体积含量有关．以此为基础，本文主要得到如下两点结论：

1. 在应变具有可加性的条件下， Eshelby 线性等效包含体方法的非线性推广实际上可归结为求解：联系微粒、基体两者本构关系的非线性方程 (9) 式和联系本征应变 ε^* 与扰动应变 ε^c 的非线性关系 (13) 式．问题的关键在于确定 (13) 式中的 $\mathbf{T}(\varepsilon^c)$．对于高刚度微粒，本文证明了 $\mathbf{T}$ 可化为 Eshelby 张量 $\mathbf{S}$. 这就是说，在这类非线性材料中，仍可以用等效包含体方法研究材料的力学特性．

2. 通过分析复合体中具有附加本征应变的高刚度微粒的变形，得到了复合材料 PCP 的宏观应变 $\langle\varepsilon\rangle$ 与纯基体材料 P 的应变 ε^0 之间的关系 (28) 式．虽然 $\langle\varepsilon\rangle$ 和 ε^0 均为宏观力学量，但两者间的关系是在考虑到 ε^* 等微力学参量，经过一系列细观分析计算后确定的，所以 (28) 式实质上是表征宏观量与细观量之间的联系．应该指出 (28) 式的误差为微粒应变的量级．根据 (28) 式，我们可以直接从高聚物的非线性粘弹性本构关系得到相应的高刚度微粒填充复合材料的本构关系．

参 考 文 献

[1] Christensen RM. Fiber reinforced composite materials. *Appl. Mech. Rev.*, 1985, 38:1267–1270

[2] Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. Dordrecht Martinus Nijhoff Publishers, 1987

[3] 杨黎明，朱兆祥，王礼立．短纤维增强对聚碳酸酯非线性粘弹性能的影响．爆炸与冲击， 1986, 6:1–9

[4] 杨黎明．热塑性塑料及其短纤维增强材料在高速变形下一维非线性粘弹性能的研究．中国科技大学博士论文， 1989

[5] 王礼立，杨黎明．固体高分子材料非线性粘弹性本构关系．《冲击动力学进展》 (王礼立、余同希、李永池编), 中国科学技术大学出版社，合肥 :1992: 88–106

[6] 朱兆祥．论非线性应变．力学进展， 1983, 13:259–272

[7] Mori T and Tanaka K. Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusion. *Act. Metall.*, 1973(1):571–574

[8] 杨黎明，王礼立．用 Eshelby 理论研究复合材料线性粘弹性本构关系．爆炸与冲击， 1991, 11:244–251

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

A MICROMECHANICAL STUDY ON THE NONLINEAR VISCOELASTIC CONSTITUTIVE RELATION OF HIGH RIGIDITY PARTICULATE-FILLED POLYMERS

Yang Liming
(*Peking University, Beijing* 100871, *China*)
Wang Lili
(*University of Science and Technology of China; Ningbuo University, Zhejiang Ningbuo* 315211, *China*)
Zhu Zhaoxiang
(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract In this paper, a micromechanical theory is used to study the nonlinear viscoelastic constitutive relation of high rigidity particulate-filled polymers. It is demonstrated that the linear Eshelby's equivalent inclusion method and the relevant macroscopic average method can be generalized to research the constitutive relation of the composites, when the deformation of the materials is described with linear strain and the particle's rigidity is very much higher than the matrix's.

Key words micromechanics, particulate-filled polymers, nonlinear viscoelastic constitutive relation

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.