

相变增韧陶瓷平面应变 I 型定常 扩展裂纹的渐近分析(II)*

张 浠¹ 叶裕恭²

(汤任基推荐, 1996年4月17日收到, 1997年4月17日收到修改稿)

摘 要

本文采用一种考虑相变剪切变形的陶瓷材料本构关系, 对平面应变 I 型定常扩展裂纹尖端场进行渐近分析. 给出了裂纹尖端附近环区域内的应力、速率分布以及应力奇异性指数. 对不同材料参数下的变化规律进行了详细的分析和讨论.

关键词 相变增韧陶瓷 剪切效应 扩展裂纹 渐近解

一、引 言

在结构陶瓷相变增韧机理的研究过程中, Budiansky 等人^[1]首先提出了仅考虑相变引起的塑性体膨胀的本构关系, 他们认为相变粒子引起的宏观塑性剪切变形可以忽略不计, 但是其理论值远小于实测值. 后来, Chen 和 Reyes-Morel^{[2],[3]}的实验结果表明相变塑性剪切变形和体膨胀都不能忽略. 因此许多力学模型被提出来改进 Budiansky 等人的本构关系. 例如, 黄克智等人^[4]利用自治理论和热力学内变量方法, 基于伴随相变的构元能量分析, 导出了材料的宏观本构关系. 叶裕恭等人^[5]利用实验观测结果也提出了较完整地考虑相变剪切效应和体膨胀的本构模型, 并用于静止裂纹的有限元分析. Stam 等^[6]在有限元数值计算中采用了文[4]提出的本构方程. 他们的结果都表明: 考虑剪切效应后的韧性增值计算值会更接近实际观测值.

裂纹尖端附近的应力场的精确分析一直是断裂力学关注的问题. 对具有压力敏感性材料的尖端场渐近分析, Li 和 Pan^[7]讨论了平面静止裂纹的情况, 而 Bigoni 和 Radi^[8]对平面扩展裂纹进行了研究. 但是他们均采用 Drucker-Prager 屈服面和正交法则, 并且没有考虑到相变增韧陶瓷材料的特点. 我们在文[9]中对 Budiansky 等人的本构框架下的平面应变定常扩展裂纹尖端场进行了渐近分析. 从中可以看到, 随着相变后体模量减小, 应力场奇异性指数也减小, 裂尖前缘三轴应力水平降低, 而且沿角度变化趋于平缓, 材料的断裂韧性提高. 在本文中, 我们将讨论剪切效应对裂尖场的影响. 给出了文[5]的本构方程的推导过程, 并利用该方程对平面应变 I 型定常扩展裂纹尖端场进行渐近分析. 本文给出了裂尖附近环区域内应力、速率场的渐近求解方法, 并结合一些具体材料参数进行详细的讨论和分析.

* 国家自然科学基金资助项目.

1 核工业总公司中南工学院, 衡阳 421001.

2 中国科学院力学研究所, 北京 100080.

二、基本方程

1 本构关系

文[5]给出的相变塑性本构关系是基于Chen和Keyes-McCreel^{[2],[3]}的实验结果中的如下事实:(1)相变塑性屈服函数为两个不变量 σ_m , σ_e 的线性组合, 其中 σ_m 为平均应力, $\sigma_m = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij}$, σ_e 为等效应力, $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$, σ_{ij} 为Cauchy应力, δ_{ij} 为Kronecker记号。(2)本构方程满足正交法则。黄克智等人^[4]也指出该正交条件自然满足。相变塑性加载面函数如下:

$$f = \sigma_m + \mu \sigma_e - \sigma_m^* - H(\bar{d}\epsilon^p) = 0 \quad (2.1)$$

式中 μ 称为等效应力敏感因子, μ 越大表明剪切效应越大。 σ_m^* 为初始屈服平均应力值, H 为累积等效塑性应变的函数, $\bar{d}\epsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}$, $d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_{ij}^e + \mu d\epsilon_m^e \delta_{ij}$, 其中 $d\epsilon_{ij}^e$ 和 $d\epsilon_m^e$ 分别表示塑性偏应变增量和体膨胀增量。

由一致性条件可得:

$$\dot{f} = d\sigma_m + \mu d\sigma_e - H' \bar{d}\epsilon^p = 0 \quad (2.2)$$

利用正交法则得到:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left(\frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \mu \frac{s_{ij}}{\sigma_e} \right) \quad (2.3)$$

若定义塑性体膨胀切线模量 $\bar{B} = d\sigma_m / d\epsilon_m^p$ 和塑性等效切线模量 $\bar{G} = d\sigma_e / d\bar{\epsilon}^p$, 其中 $d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{(2/3) d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}$, 通过运算可得到各向同性线性硬化材料的率形式本构方程:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \dot{\sigma}_{ij} - \nu \dot{\sigma}_m \delta_{ij}] + \frac{\alpha}{H'} (Q_{kl} \dot{\sigma}_{kl}) Q_{ij} \quad (2.4)$$

其中 $\dot{\epsilon}_{ij}$, $\dot{\sigma}_{ij}$ 分别为应变率和应力率张量, ν 为泊松比, E 为弹性模量,

$$H' = 3(\bar{B} + \mu \bar{G}) / \sqrt{2 + 9\mu^2}, \quad \bar{B}, \bar{G} \text{ 为常数,}$$

$$Q_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \mu \frac{s_{ij}}{\sigma_e}$$

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{(弹性阶段和相变卸载)} \\ 1 & \text{(相变加载)} \end{cases}$$

实验结果表明^{[2],[3]}: 对于Mg-PSZ陶瓷材料, 有 $\bar{B} > 0$, $\bar{G} > 0$, 因此 $H' > 0$ 。相变加载卸载准则表示为:

$$Q_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \begin{cases} > 0 & \text{(相变加载)} \\ = 0 & \text{(中性变载)} \\ < 0 & \text{(相变卸载)} \end{cases} \quad (2.5)$$

相变屈服条件由下式给出:

$$\sigma_m + \mu \sigma_e = \sigma_m^* \quad (2.6)$$

相变结束条件为:

$$\Theta = \Theta^x \quad (2.7)$$

式中 Θ 表示塑性体膨胀, Θ^x 为常数。相变结束条件对塑性剪切应变没有任何限制。

2 基本方程

在小范围相变条件下, 平面应变 I 型定常扩展裂纹的典型构形见图 1。坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 为与裂尖一起运动的随体坐标系。为了方便, 同时也选取如图所示极坐标系 $Or\theta$, e_r, e_θ 为基矢。裂纹以稳恒扩展速度 v 向右扩展。则任一力学量的物质导数满足下式:

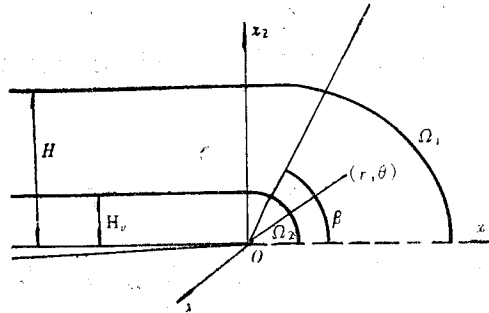


图1 定常扩展裂纹尖端区和尾区

$$(\) = -V\partial(\)/\partial x_1 = V\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\right] \quad (2.8)$$

裂尖附近区域划分为: $0 < \theta < \beta$ 为相变加载区, $\beta < \theta < \pi$ 为尾区; 在 Ω_2 以内为完全相变区, 高度为 H_c , 而尾区的高度为 H 。 Ω_1 和 Ω_2 之间的环形域为以下渐近解法成立的范围。在本文中我们要求材料参数 \bar{B} 和相变强度 $\omega = E\Theta^x(1+\nu)/\sigma_c^2/(1-\nu)$ 满足 $\bar{B} > 0$ 和 $\omega > 10$ 。常见的陶瓷材料 Mg-RSZ 和 TZP 均符合以上条件。Stam 等^[9] 的有限元结果表明在上述条件下, 完全相变区高度远远小于整个相变区的高度。而且, 实验结果也说明^[10], 对于高韧性材料, 即 ω 较大, 裂尖附近的完全相变区无法用 Raman 光谱仪找到, 最多只有 80% 的 ZrO 粒子发生了相变。因此, 在上述条件下, 环形区域会足够大, 使得渐近解法成立, 而完全相变区内的变形不会对其内应力分布产生显著的影响。

极坐标下平衡方程为:

$$\begin{aligned} (r\sigma_{rr})_{,r} + \sigma_{r\theta,\theta} - \sigma_{\theta\theta} &= 0 \\ (r\sigma_{r\theta})_{,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

几何方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} &= v_{r,r}, \quad \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = (v_{\theta,\theta} + v_r)/r \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2}[v_{\theta,r} + (v_{r,\theta} - v_\theta)/r] \\ \dot{\epsilon}_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

考虑到关系式(2.8)和下列等式

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \sigma \cdot e_j)' &= e_i \cdot \sigma \cdot e_j + e_i \cdot \dot{\sigma} \cdot e_j + e_i \cdot \sigma \cdot e_j \\ \dot{e}_r &= V \frac{\sin\theta}{r} e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -V \frac{\sin\theta}{r} e_r \end{aligned} \quad (2.11)$$

得到各应力率分量的表达式:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{r\theta} &= V \left[\frac{\sin\theta}{r} (\sigma_{r\theta,\theta} - \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - \cos\theta \sigma_{r\theta,r} \right] \\ \dot{\sigma}_{rr} &= V \left[\frac{\sin\theta}{r} (\sigma_{rr,\theta} - 2\sigma_{r\theta}) - \cos\theta \sigma_{rr,r} \right] \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= V \left[\frac{\sin\theta}{r} (\sigma_{\theta\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta}) - \cos\theta \sigma_{\theta\theta,r} \right] \\ \dot{\sigma}_{33} &= V \left[\frac{\sin\theta}{r} \sigma_{33,\theta} - \cos\theta \sigma_{33,r} \right]\end{aligned}\quad (2.12)$$

在相变加卸载边界 Γ 上, 依照文[11]的结论, 可以要求所有应力、速率分量均满足连续性条件。

三、奇异场渐近分析

由于 $H' > 0$, (2.4), (2.9), (2.10)式组成的偏微分方程组满足强椭圆性条件^[6]且各式对 r 都具有齐次性。所以可用类似于HRR^[8]奇异场的分离变量形式的渐近表达式进行求解^{[8],[12]}。则有:

$$\begin{aligned}v_r &= K(V/E)y_1(\theta)(2\pi r)^s/s \\ v_\theta &= K(V/E)y_2(\theta)(2\pi r)^s/s \\ \sigma_{r\theta} &= Ky_3(\theta)(2\pi r)^s/s \\ \sigma_{rr} &= Ky_4(\theta)(2\pi r)^s \\ \sigma_{\theta\theta} &= Ky_5(\theta)(2\pi r)^s \\ \sigma_{33} &= Ky_6(\theta)(2\pi r)^s\end{aligned}\quad (3.1)$$

式中 $K = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{-s} \sigma_{\theta\theta}(r, 0)$ 称为相变应力强度因子, s 为小于零的待定常数, $y_i (i=1, 6)$ 为待定函数。

将(3.1)式分别代入(2.12), (2.10), (2.9), (2.4)式得到关于 y_i 且具有本征值 s 的六阶一次常微分方程组:

$$\begin{aligned}y_3' &= y_5 - (1+s)y_4 \\ y_5' &= -(1+s)y_3 \\ y_4' &= (sy_4 \cos\theta + \dot{\sigma}_{rr})/\sin\theta + 2y_3 \\ y_6' &= (sy_6 \cos\theta + \dot{\sigma}_{33})/\sin\theta \\ y_2' &= -y_1 + s[\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \nu(\dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{33}) + \underline{A}Q_{\theta\theta}] \\ y_1' &= (1-s)y_2 + 2s[(1+\nu)\dot{\sigma}_{r\theta} + \underline{A}Q_{r\theta}]\end{aligned}\quad (3.2)$$

其中 $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}/[vK(2\pi)^s r^{s-1}]$, $y_i' = dy_i/d\theta$,

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{\theta\theta} &= -s(y_3 \sin\theta + y_5 \cos\theta) \\ \dot{\sigma}_{r\theta} &= -s(y_4 \sin\theta + y_3 \cos\theta), \\ Q_{rr} &= \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\mu \frac{s_{rr}}{\sigma_e}, \quad Q_{\theta\theta} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\mu \frac{s_{\theta\theta}}{\sigma_e} \\ Q_{33} &= \frac{1}{3} + \frac{3}{2}\mu \frac{s_{33}}{\sigma_e}, \quad Q_{r\theta} = \frac{3}{2}\mu \frac{s_{r\theta}}{\sigma_e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \dot{\sigma}_{\theta\theta} \left[\nu(1+\nu) \frac{H'}{E} + \nu Q_{33}(Q_{33} - Q_{\theta\theta}) - Q_{rr}(Q_{\theta\theta} + \nu Q_{33}) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{\sigma}_{r\theta} Q_{r\theta}(Q_{rr} + \nu Q_{33}) + y_1 \left(\frac{H'}{E} + Q_{33}^2 \right) \right\} \\ \dot{\sigma}_{33} &= \frac{1}{H'/E + Q_{33}^2} \left[\nu \frac{H'}{E} (\dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}) - Q_{33}(Q_{rr}\dot{\sigma}_{rr} + Q_{\theta\theta}\dot{\sigma}_{\theta\theta} + 2Q_{r\theta}\dot{\sigma}_{r\theta}) \right] \\ \Delta &= (1-\nu^2) \frac{H'}{E} + Q_{33}^2 + Q_{rr}^2 + 2\nu Q_{rr}Q_{33} \\ \underline{\Delta} &= \frac{E}{H'} (Q_{rr}\dot{\sigma}_{rr} + Q_{\theta\theta}\dot{\sigma}_{\theta\theta} + Q_{33}\dot{\sigma}_{33} + 2Q_{r\theta}\dot{\sigma}_{r\theta}) \end{aligned}$$

若 $\underline{\Delta} < 0$ 则表示相变卸载阶段, 令 $Q_{rr} = Q_{33} = Q_{\theta\theta} = Q_{r\theta} = 0$ 代入方程中。

上述方程的定解条件:

由于对称性要求:

$$y_2(0) = y_3(0) = y_4'(0) = y_5'(0) = y_6'(0) = 0 \quad (3.3)$$

裂纹面上无外载要求:

$$y_3(\pi) = y_6(\pi) = 0 \quad (3.4)$$

由归一化条件可得:

$$y_5(0) = 1 \quad (3.5)$$

同时由 $y_4'(0) = y_6'(0) = 0$ 可得:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= -s \{ y_4(0) - \nu [y_5(0) + y_6(0)] + Q_{rr}(0) \underline{\Delta}(0) \} \\ y_6(0) &= \nu [y_4(0) + y_5(0)] - Q_{33}(0) \underline{\Delta}(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

上述边值问题可由试射法结合四阶 Runge-kutta 法进行求解除 K 之外的所有 y_i 和本征值 s 。需要调整的初始值为 $y_4(0)$ 和 s 。猜测不同的 $y_4(0)$ 和 s , 代入方程中计算出 $y_3(\pi)$ 和 $y_6(\pi)$, 直到边值条件(3.4)得到近似满足。可以通过控制步长和逼近精度得到满意的结果。

四、数值计算结果

本文取 35mol% 的 Mg-PSZ 陶瓷材料进行尖端场渐近计算, 各材料参数为 $E=208\text{GPa}$, $\nu=0.3$, $\bar{B}/E=0.063$ 和 $\bar{G}/E=0.226$, 以及 μ 值分别取 0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.6。表1给出了数值计算的结果。从表中看到, 随着 μ 值增加, 应力奇异性指数降低, 但相变卸载开始的角度 β 变化不大。

表 1 不同 μ 值下的 s 和 β 值

μ	0	0.1	0.2	0.5	0.6
s	-0.40825	-0.38109	-0.35505	-0.30110	-0.28767
β	64°	67°	68°	69°	72°

图2和图3分别给出了不同 μ 值下裂尖附近的平均应力和等效应力沿角度的分布情况。当 $\mu \leq 0.2$ 时, 应力的角因子没有明显的变化, 且裂尖前缘变化梯度较小。当 μ 值增大后, 应力变化梯度迅速增大。随着 μ 值增加, 裂尖前缘等效应力水平下降, 而平均应力角因子却上升,

因此 σ_m/σ_e 值也迅速增大, 表明 μ 值越大, 裂尖前缘约束程度越高。从图中还可以看到, 在裂纹面上始终存在很大的压应力。

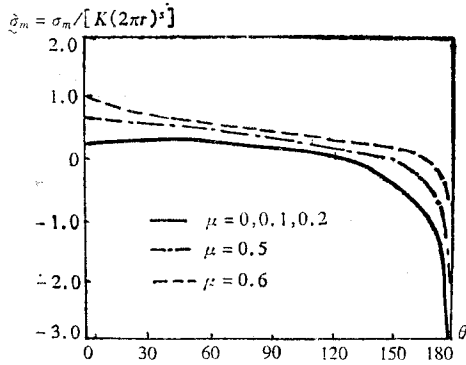


图2 不同 μ 值下平均应力的角因子

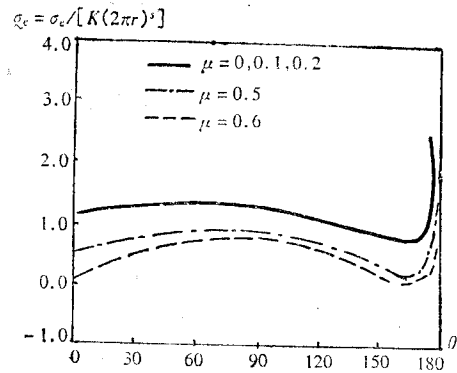


图3 不同 μ 值下等效应力的角因子

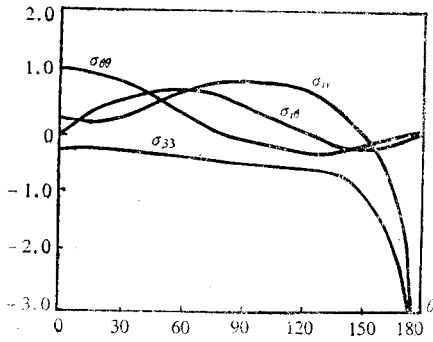


图4 $\mu = 0.1$ 时裂尖应力场的角因子

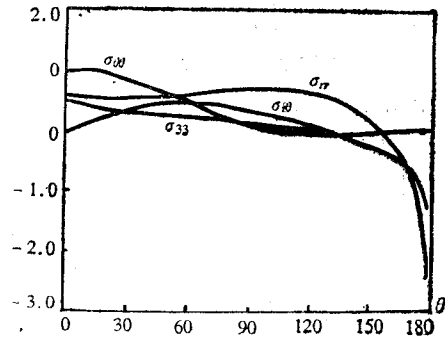


图5 $\mu = 0.5$ 时裂尖应力场的角因子

图4和图5分别给出了 $\mu = 0.1$ 和 0.5 时裂尖附近各应力角因子的变化情况。从中可以看到, 随着 μ 值增大, 裂尖前缘 $\theta = 0$ 处的应力状态趋于静水拉伸状态。这点与Bigoni和Radi^[8]的结果是一致的。由于加载面存在此种角点效应, 当 μ 值等于 0.617 时, 上述计算方法失效。因此利用这类本构关系进行渐近分析, μ 值应该存在一个极限值。由于文[8]采用了与本文不同的本构方程, 两者无法直接比较。同时, 我们发现由于 μ 值的限制, 由Drucker-Prager屈服面无法得到Budiansky等提出的本构方程, 但此文中若设 $\mu = 0$ 则(2.4)式退还为仅考虑体膨胀的本构方程。

从图中还可以看到: 当 $\theta \rightarrow \pi$ 时, σ_{rr} 和 σ_{33} 均趋向负无穷大, 也即在尾区中离裂尖较远处应存在一常值压应力区, 这点与文[1]的分析一致。但是文[8]中由于重新加载区的存在, σ_{rr} 和 σ_{33} 都趋向正无穷大, 只有当其定义的 μ 值较大时才会出现 σ_{rr} 和 σ_{33} 趋向负无穷大的结果。

五、结 论

本文采用文[5]给出的一种相变增韧陶瓷材料的本构模型, 对定常扩展裂纹尖端附近环

形域内应力、速率场进行了渐近分析。裂纹尖端区是由相变塑性加载区和卸载和完全相变共存的弹性区组成。渐近场的构造依赖于等效应力敏感因子的选取。其变化规律如下:

1. 随着 μ 值增大, 应力奇异性指数下降;
2. 随着 μ 值增大, 裂尖前缘等效应力水平降低;
3. 随着 μ 值增大, 比值 σ_m/σ_e 会迅速提高, 约束程度增强;
4. μ 值较小时, 应力场随角度的变化很小, 主要依赖于材料参数 \bar{B} 的大小。

同时我们也看到: 由于 μ 值存在极限值, 利用 Drucker-Prager 屈服面进行渐近分析比较适合材料塑性变形以剪切变形为主的具有压力敏感性材料; 但对于以塑性体膨胀为主要特征的相变增韧陶瓷材料宜采用文[5]提出的本构方程, 结果表明, 它能较好地反映裂尖附近的受力情况。

参 考 文 献

- [1] B. Budiansky et al, Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics, *Int. J. Solids Struct.*, 19 (1983), 337—355.
- [2] I. W. Chen and P. E. Reyes-Morel, Implications of transformation plasticity in Zrocontain ceramics: I, shear and dilatation effects, *J. Am. Ceram. Soc.*, 69 (1986), 181—189.
- [3] P. E. Reyes-morel and I. W. Chen, Transformation plasticity of CeO-stabilized tetragonal zirconia polycrystals: I, stress assistance and autocatalysis, *J. Am. Ceram. Soc.*, 71 (1988), 343—353.
- [4] 黄克智等, 具有体膨胀和剪切效应的结构陶瓷相变塑性细观本构模型: I. 非比例加载, 力学学报, 23(3) (1991), 299—308.
- [5] Y. G. Ye, et al, A computational modelling of transformation toughening in ceramics, *Proc. Asian Pacific Conf. on Fract. and Strength*, 93, Tsuchiura, Ibaraki, Japan 671—676.
- [6] G. M. Stam, et al, Effects of transformation-induced shear strains on crack growth in zirconiacontaining ceramics, *Int. J. Solids Struct.*, 31 (1994), 1923—1948.
- [7] F. Z. Li and J. Pan, Plane-strain crack-tip fields for pressure-sensitive dilatant materials, *J. Appl. Mech.*, 57 (1990), 40—49.
- [8] D. Bigoni and E. Radi, Mode I crack propagation in elastic-plastic pressure-sensitive materials, *Int. J. Solids Struct.*, 30 (1993), 899—919.
- [9] 张滢、叶裕恭, 相变增韧陶瓷平面应变 I 型定常扩展裂纹的渐近分析(I). 固体力学学报, 16 (4) (1995).
- [10] D. B. Marshall, et al, Crack-tip transformation zone in toughened zirconia, *J. Am. Ceram. Soc.*, 73 (1990), 2659—2666.
- [11] R. Narasimhan and A. J. Rosakis, Reexamination of jumps across quasi-statically propagating surface under generalized plane stress in anisotropically hardening elasticplastic solids, *ASME. J. Appl. Mech.*, 54 (1987), 519—524.
- [12] P. E. Ponte-Castanade, Asymptotic fields in steady crack growth with linear strainhardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 35 (1987), 227—268.

Asymptotic Analysis of Plane-Strain Mode I Steady-State Crack Growth in Transformation Toughening Ceramics(II)

Zhang Xi

(Zhongnan Institute of Technology, Hengyang, Hunan 421001, P. R. China)

Ye Yugong

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract

Based on a constitutive law which includes the shear components of transformation plasticity, the asymptotic solutions to near-tip fields of plane-strain mode I steady propagating cracks in transformed ceramics are obtained for the case of linear isotropic hardening. The stress singularity, the distributions of stresses and velocities at the crack tip are determined for various material parameters. The factors influencing the near-tip fields are discussed in detail.

Key words transformation toughening ceramics, shear effect, crack growth, asymptotic method