

# 相变增韧陶瓷平面应变 I 型 定常扩展裂纹的渐近分析 ( I )\*

张 沛

(中南工学院, 湖南, 衡阳, 421001)

叶裕恭

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

**摘 要** 采用 Budiansky 等人提出的相变增韧陶瓷材料的体膨胀本构关系, 利用渐近解法得到该材料平面应变 I 型定常扩展裂纹尖端附近的应力、速率沿角度的分布情况, 给出相变区高度和相变造成的韧性增值的计算公式.

**关键词** 相变增韧陶瓷, 定常扩展裂纹, 韧性增值, 渐近解法

## 1 引言

Garvie 等人<sup>[1]</sup>通过实验发现: 在陶瓷材料的宏观裂纹尖端附近的  $ZrO_2$  粒子, 由于较高应力的作用, 会发生从四方相到单斜相的相变, 而且伴随体积膨胀. 后来 Chen 和 Reyes Morel<sup>[2,3]</sup>等实验工作表明, 相变过程中还存在不可忽略的剪切变形. 他们的结果都说明二相粒子的相变能够在裂尖前缘产生屏蔽效应和增加韧性. 这一过程被称作相变增韧且受到材料学家和力学家的广泛关注.

关于相变增韧陶瓷材料本构关系的研究工作已取得了一定进展. 奠基性的工作是 Budiansky 等人<sup>[4]</sup>利用 Hill 自治理论提出的, 在他们的本构关系中计及了相变产生的塑性体膨胀. 之后, Lambropoulos<sup>[5]</sup>在他的工作中讨论了相变引起的剪切效应以及二相粒子大小和分布方向对相变增韧的作用. 黄克智等<sup>[6]</sup>根据 Rice 内变量理论同样导出了与二相粒子含量, 分布有关以及考虑剪切效应的本构关系. 近年, 叶裕恭等<sup>[7]</sup>根据实验结果<sup>[2,3]</sup>给出了一种较为完整的同时考虑体膨胀和剪切变形的本构关系. 从他们的研究结果可以看出, 相变产生的塑性体膨胀在相变增韧中仍起着主要作用. 因此, Budiansky 等人<sup>[4]</sup>提出的本构关系虽然没有计及剪切变形, 但对于研究陶瓷相变产生的增韧效应仍具有重大的意义.

在陶瓷相变增韧力学的研究中为了数学上方便均假定材料具有超临界性质<sup>[4,5]</sup>. 对于亚临界性质的材料一般都利用有限元方法进行数值分析. 而采用渐近解方法求解这类具有压力敏感性能的陶瓷材料的裂尖力学场以及韧性增值的近似计算却研究甚少. 直到近几年这方面的工作才得以重视. Li 和 Pan<sup>[8,9]</sup>讨论了 I 型静止裂纹在平面应力和平面应变情况下尖端场的渐近解法. Bigoni 和 Radi<sup>[10]</sup>对平面 I 型定常扩展裂纹尖端各力学量的分布进行了渐近分析. 在分析中他们都采用了 Prager-Drucker 屈服面; 材料硬化特征由简单剪切实验给出.

\* 国家自然科学基金资助项目.

1994-03-25 收到第 1 稿, 1995-03-17 收到修改稿.

他们的计算结果也表明塑性体膨胀能降低应力场的奇异性和增加材料的韧性值. 杨卫<sup>[11]</sup>给出了较为广泛的结构增韧材料的韧性增值的近似计算方法和由实验工作标出扩展裂纹尖端附近的分区构形. 我们的研究工作着重于相变陶瓷本构关系的特征, 对定常扩展裂纹尖端场和韧性增值的计算进行渐近分析. 在本文中, 我们采用 Budiansky 等人提出的相变增韧陶瓷的体膨胀本构关系. 我们将在下文中给出本构关系考虑剪切变形时的结果. 文中应力、速率场采用类似于 Ponte Castañada<sup>[12]</sup>给出的线性硬化材料平面应变 I 型裂纹尖端场的分离形式的渐近表达式. 利用渐近解法得到相变增韧值和相变尾区高度的近似计算公式, 同时给出裂纹尖附近的应力、速率沿角度的分布情况. 最后给出了几种具体材料参数下的计算结果, 并与有限元结果进行比较.

## 2 基本方程和解法

### 2.1 本构关系

Budiansky 等人<sup>[4]</sup>在忽略相变产生的剪切变形的情况下, 对由二相粒子与基体组成的各向同性复合体提出了一种均匀化的体膨胀本构关系. 该本构关系假设相变前后以及相变过程中复合体的剪切模量始终保持线性, 但体膨胀却产生类似于典型塑性的不可逆变形, 相变过程中体模量降低, 直到完全相变后才恢复到初始的弹性体模量值. 该本构关系的率形式为:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{S}_{ij}/2G + \dot{\sigma}_m \delta_{ij}/3B + (\alpha - 1)\dot{\sigma}_m \delta_{ij}/3B \tag{1}$$

其中  $\alpha = \begin{cases} 1 & \text{相变卸载或完全相变} \\ B/\bar{B} & \text{相变加载} \end{cases}$

式中  $G, B$  为弹性剪切模量和体模量,  $\bar{B}$  为相变阶段的体模量, 本文要求  $\bar{B}$  为大于零的常数, 也即材料体膨胀线性硬化.  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 记号,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  为应变率张量,  $\dot{S}_{ij}$  为应力率偏量,  $\dot{\sigma}_m$  为应力率球量.

在相变过程中, 加卸载准则可由  $\dot{\sigma}_m$  给出,  $\dot{\sigma}_m > 0$  为相变加载,  $\dot{\sigma}_m < 0$  为相变卸载,  $\dot{\sigma}_m = 0$  为中性变载.

相变开始和达到完全相变的判别条件分别用平均应力  $\sigma_m$  达到临界值  $\sigma_m^*$  和塑性体膨胀  $\theta^p$  达到临界值  $\theta^{p*}$  给出.

### 2.2 基本方程

在小范围相变条件下, 可把裂纹扩展近似看作定常扩展过程. 平面应变 I 型定常扩展裂纹尖端附近和尾区的典型结构见图 1. 裂尖前缘  $0 < \theta < \beta$  的区域为相变加载区, 往往为剧裂变形区. 而  $\beta < \theta < \pi$  的区域称为尾区. 在尾区内上面为相变卸载区, 下面为完全相变区. 它们的高度分别为  $H$  和  $H_r$ . 有时在相变加载区内一部分也存在完全相变区, 但由于  $\theta^r$  比  $\sigma_m^*/B$  大得多, 其尺寸就相对于整个区域要小得多. 在文[10]中假设裂纹面附近存在重新相变加载区, 但在相变增韧陶瓷裂纹问题中, 裂纹面附近是完全相变区, 这种分区构造不可能成立.

设想裂纹以恒速  $v$  向右扩展, 裂纹顶端将移至  $o$  点, 建立图 1 所示空间坐标系  $ox_1x_2x_3, \vec{e}_i$  ( $i=1, 3$ ) 表示其单位矢. 以  $o$  点为极点建立极坐标系  $(r, \theta)$ . 任何力学量的物质导数满足如下关系式:

$$\left( \dot{\phantom{x}} \right) = -v\partial(\phantom{x})/\partial x_1 \tag{2}$$

极坐标下平衡方程表示为:

$$\begin{aligned} (r\sigma_{rr})_{,r} + \sigma_{r\theta,\theta} - \sigma_{\theta\theta} &= 0, \\ (r\sigma_{r\theta})_{,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

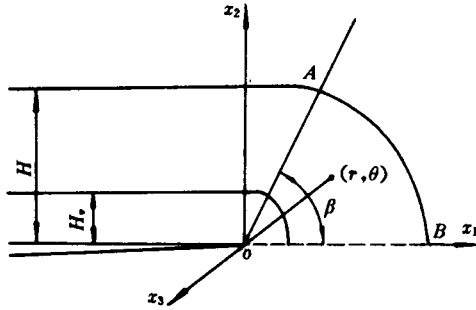


图 1 定常扩展裂纹典型分区构造

平面问题只存在两个速率场  $(v_r, v_\theta)$ , 相应的几何方程为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{rr} &= v_{r,r}, \\ \dot{e}_{\theta\theta} &= (v_{\theta,\theta} + v_r)/r, \\ \dot{e}_{r\theta} &= \frac{1}{2}[v_{\theta,r} + (v_{r,\theta} - v_\theta)/r], \\ \dot{e}_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

考虑到关系式:  $(\dot{e}_i \cdot \vec{\sigma} \cdot \dot{e}_j) \cdot \dot{e}_k = \dot{e}_i \cdot \vec{\sigma} \cdot \dot{e}_j + \dot{e}_i \cdot \vec{\sigma} \cdot \dot{e}_k + \dot{e}_k \cdot \vec{\sigma} \cdot \dot{e}_j$ , 可以给出:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{r\theta} &= v \left[ \frac{\sin\theta}{r} \sigma_{r\theta,\theta} - \cos\theta \sigma_{r\theta,r} + \frac{\sin\theta}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right], \\ \dot{\sigma}_{rr} &= v \left[ \frac{\sin\theta}{r} \sigma_{rr,\theta} - \cos\theta \sigma_{rr,r} - \frac{2}{r} \sin\theta \sigma_{r\theta} \right], \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= v \left( \frac{\sin\theta}{r} \sigma_{\theta\theta,\theta} - \cos\theta \sigma_{\theta\theta,r} + \frac{2}{r} \sin\theta \sigma_{r\theta} \right), \\ \dot{\sigma}_{33} &= v \left( \frac{\sin\theta}{r} \sigma_{33,\theta} - \cos\theta \sigma_{33,r} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

对于相变加卸载边界上的连续性条件, 由文[13]可知, 所有应力在此边界上满足连续, 即应力沿  $\theta$  角不存在间断.

### 2.3 渐近解法

由(1)、(3)、(4)式组成的偏微分方程组在  $\bar{B} > -\frac{4}{3}G$  时保持强椭圆性条件<sup>[4]</sup>, 且它们对  $r$  都具有齐次性, 所以可用分离变量的渐近方法求解. 参照文[10],[12], 令各力学量的渐近式为:

$$\begin{aligned} u_r &= K(v/E)y_1(\theta)(2\pi r)^s/s, \\ v_\theta &= K(v/E)y_2(\theta)(2\pi r)^s/s, \\ \sigma_{r\theta} &= Ky_3(\theta)(2\pi r)^s, \\ \sigma_{rr} &= Ky_4(\theta)(2\pi r)^s, \\ \sigma_{\theta\theta} &= Ky_5(\theta)(2\pi r)^s, \\ \sigma_{33} &= Ky_6(\theta)(2\pi r)^s. \end{aligned} \tag{6}$$

式中  $K = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{-s} \sigma_{\theta\theta}(r, 0)$  为相变强度因子;  $s$  为小于零的待定常数;  $y_i (i=1, 6)$  为待定函数.

将(6)式各量代入(5)式得到其率形式, 然后将其代入本构方程(1), 以及将(6)式代入平衡方程中得到关于  $y_i$  且具有本征值  $s$  的六阶一次常微分方程组.

$$\begin{aligned}
 y_3' &= y_5 - (1 + s)y_4, \\
 y_5' &= -(s + 2)y_3, \\
 y_1' &= (1 - s)y_2 - 2s^2(1 + \mu)(\cos\theta y_3 + \sin\theta y_4), \\
 y_4' &= sy_4 \cot\theta + 2y_3 + \dot{\sigma}_{rr}/\sin\theta, \\
 y_6' &= sy_6 \cot\theta + \dot{\sigma}_{33}/\sin\theta, \\
 y_2' &= -y_1 + s(1 + \mu)(\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \dot{\sigma}_{33}).
 \end{aligned} \tag{7}$$

式中  $y_i' = dy_i/d\theta$ ,  $\mu$  为 Poisson 比,

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij}/[vK(2\pi)^s r^{s-1}], \\
 \dot{\sigma}_{\theta\theta} &= -s(y_3 \sin\theta + y_5 \cos\theta), \\
 \dot{\sigma}_{rr} &= y_1/(1 + \mu)/(1 - \eta) + \eta \dot{\sigma}_{\theta\theta}/(1 - \eta), \\
 \dot{\sigma}_{33} &= \eta(\dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{\theta\theta}), \\
 \dot{\sigma}_{r\theta} &= -s(y_4 \sin\theta + y_3 \cos\theta), \\
 \eta &= [3\mu - (1 - 2\mu)(\alpha - 1)]/[3 + (1 - 2\mu)(\alpha - 1)]
 \end{aligned} \tag{8}$$

定解条件为: 由对称性, 有

$$y_2(0) = y_3(0) = y_1'(0) = y_4'(0) = y_5'(0) = y_6'(0) = 0. \tag{9}$$

裂纹面上无外载要求  $y_3(\pi) = y_5(\pi) = 0. \tag{10}$

$y_5(0)$  由归一化条件可令  $y_5(0) = 1$ . 在(7)式中令  $y_4'(0) = y_6'(0) = 0$  可推出:

$$\begin{aligned}
 y_4(0) &= -y_1(0)/(1 + \mu)/s/(1 - \eta) + \eta/(1 - \eta), \\
 y_6(0) &= \eta - \eta y_4(0).
 \end{aligned} \tag{11}$$

由(7)、(9)、(10)、(11)组成的常微分方程组边值问题可由试射法求解除  $K$  之外所有  $y_i$  和本征值  $s$  的值. 考虑到  $y_4, y_6$  在  $\theta \rightarrow 0, \pi$  时会趋近  $\infty$ , 我们采用四阶 Runge-Kutta-Treansor 方法求解上述问题. 通过猜测  $s$  和  $y_1(0)$  并代入(9)和(11)式得到问题的初值, 然后用上述方法计算  $\theta \rightarrow \pi$  时  $y_3$  和  $y_5$  的值, 不断试凑直到(10)式得到近似满足. 求解过程中没有发现困难, 通过控制步长和逼近精度可得到相当满意的结果.

### 3 尾区增韧值近似计算

假设相变区以外均为弹性区, 它对相变区内体积膨胀起着约束作用. 象文[4]、[5]一样, 我们假设弹性区具有与线弹性断裂力学相同的应力场. 的确相变区的体积膨胀对弹性区的应力分布有一定影响, 但从文[4]的有限元结果可以看到这种影响并不大. 由全弹性解得到

A、B 两点的平均应力值，代入相变开始条件中，得到相变区的水平和垂直方向的尺寸：

$$R = \frac{2(1 + \mu)}{9\pi(1 - \mu)} \frac{EJ_\infty}{(\sigma_m^c)^2} \tag{12}$$

$$H = c_1 R.$$

式中  $J_\infty$  表示外部加载水平， $c_1 = \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta$ .

从(12)式可知当  $\mu = 0.3$  时  $H$  的最大值为  $0.0853 \frac{EJ_\infty}{(\sigma_m^c)^2}$  小于文[11]中参考的有限元计算结果. 这主要是因为本文没有考虑剪切效应对相变开始条件的影响. 如果采用激光拉曼等实验手段能够测出相变尾区高度  $H$  的话，由(12)式可反算出  $\sigma_m^c$  值的大小.

由上节渐近解也可求出 A 点的平均应力值，代入相变开始条件可得到  $K$  与  $H$  之间的关系：

$$K = c_2 \sigma_m^c (2\pi H)^{-1/2} \tag{13}$$

式中  $c_2 = (\sin \beta)^2 / \Sigma_m(\beta)$ ， $\Sigma_m(\beta) = [y_4(\beta) + y_5(\beta) + y_6(\beta)]/3$ .

同时由完全相变条件得到完全相变区高度  $H_r$  的大小. 完全相变条件可表示为：

$$\Theta^p = y \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \tag{14}$$

式中  $\Theta^p$  为相变塑性体膨胀率，由本构关系可知  $\Theta^p = \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B} \right) \dot{\sigma}_m$ .

又因为：

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_m &= (1 + \eta)(\dot{\sigma}_\pi + \dot{\sigma}_{\theta\theta})/3 \\ &= \frac{2\pi(1 + \eta)}{3(1 - \eta)} \left\{ \frac{y_1(\theta)}{1 + \mu} - s[y_3(\theta)\sin\theta + y_4(\theta)\cos\theta] \right\} v_k \left( \frac{2\pi y}{\sin\theta} \right)^{-1} \end{aligned} \tag{15}$$

将(13)，(15)式代入(14)式中得到：

$$H_r/H = (c_3 \Theta^p / v / \sigma_m^c)^{1/2} \tag{16}$$

式中  $\frac{1}{c_3} = \frac{1 + \eta}{3(1 - \eta)} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B} \right) c_2 \int_0^{\theta} \frac{1}{(\sin\theta)^{s+1}} \left\{ \frac{y_1(\theta)}{1 + \mu} - s[y_3(\theta)\sin\theta + y_4(\theta)\cos\theta] \right\} d\theta$

其积分值可由 Gauss 数值积分获得. 从(16)式可看到完全相变区高度与裂纹扩展速率有关，并随着扩展速率的增加而增加. 这点与 Hom 和 McMeeking<sup>[14]</sup>的有限元计算结果有相似.

在  $J$  积分控制扩展条件下，由能量积分可求出材料平面应变 I 型裂纹从起裂到定常扩展所可能实现的韧性增值为：<sup>[4,11]</sup>：

$$\Delta J = J_\infty - J_{up} = 2 \int_0^H U(y) dy \tag{17}$$

式中  $U(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \{w(+x, y) - w(-x, y)\}$  为标高  $y$  的物质单元从裂纹前方无限远处随裂纹扩展而退至裂纹后无限远处残余的应变能密度.

由小变形条件下应变加法分解可得：

$$U(y) = \int_0^{\sigma_m^c(\infty, y)} \sigma_{\theta\theta} d\epsilon_{\theta\theta} = y \int_0^{\theta} \sigma_m \Theta^p \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \tag{18}$$

再次利用关系式  $\Theta^p = \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B} \right) \dot{\sigma}_m$  和(15)式，则有：

$$U(y) = c_4 v (\sigma_m^c)^2 \left( \frac{y}{H} \right)^{2s} \tag{19}$$

式中  $c_4 = \frac{1 + \eta}{3(1 - \eta)} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B} \right) c_2^2 \int_0^{\theta} \frac{\Sigma_m(\theta)}{(\sin\theta)^{2s+1}} \left\{ \frac{y_1(\theta)}{1 + \mu} - s[y_3(\theta)\sin\theta + y_4(\theta)\cos\theta] \right\} d\theta > 0$

$\Sigma_m(\theta) = [y_4(\theta) + y_5(\theta) + y_6(\theta)]/3$ . 其积分值也可根据渐近分析结果和 Gauss 数值积分法求得.

将(19)式代入(17)式并考虑到完全相变区的特点,也即在完全相变区内  $U(y) = U(H_r)$ , 则有:

$$\begin{aligned} \Delta J &= 2U(H_r) \cdot H_r + 2 \int_{H_r}^H U(y) dy = \frac{2}{1+2s} c_4 v(\sigma_m^e)^2 H + \frac{4s}{1+2s} c_4 v(\sigma_m^e)^2 H \left(\frac{H_r}{H}\right)^{1-2s} \\ &= \frac{2}{1+2s} c_5 v E J_\infty \left[ 1 + 2s \left(\frac{H_r}{H}\right)^{1-2s} \right] \end{aligned} \tag{20}$$

式中  $c_5 = c_4 \cdot c_1$ .

从(20)式我们可以看到,因为  $1+2s > 0$  和  $H_r/H < 1$ ,则右边恒大于零,也即  $J_\infty > J_{up}$ . 二相粒子相变使陶瓷的断裂韧性增加. 另外,韧性增值与裂纹扩展速率有关,将(16)式代入(20)式可以看出,扩展速率增加并不一定使方括号内的值增加. 所以  $\Delta J$  可能在定常扩展之前达到其最大值. 这结论与文[14]有相同之处.

我们取  $\mu = 0.3$  和  $B/\bar{B} = 1.333, 10, 100, 1000$ ,对裂纹尖端场进行渐近计算. 不同  $B/\bar{B}$  值下的特征值  $s$ ,初值  $y_1(0)$ ,相变卸载角  $\beta$  和相变尾区总高度  $H$  列于表 1. 从表 1 可以看到  $\bar{B}$  减小,也即材料塑性体膨胀效应增强,裂尖应力场的奇异性因子  $s$  减小. 这与文[4]、[10]的结果完全一致. 另外  $\bar{B}$  减小也使  $H$  值减小,这主要是因为周围弹性介质对较软介质的体膨胀的约束作用相对增强的缘故. 但却使  $\beta$  角增大,相变加载区域变大.

表 1 不同  $B/\bar{B}$  值下的  $s, y_1(0), \beta, H$  值

$B/\bar{B}$	$s$	$y_1(0)$	$\beta$	$H(\sigma_m^e)^2/EJ_\infty$
1.333	-0.4850	0.2580	61°	0.0852
10.0	-0.3992	0.2834	64°	0.0848
100.0	-0.3729	0.3023	66°	0.0843
1000.0	-0.3705	0.3053	70°	0.0828

图 2 给出不同  $B/\bar{B}$  值下裂尖附近三轴应力随角度变化的情况. 从图 2 可以看出,  $\bar{B}$  减小不仅使应力奇异性降低,而且使三轴平均应力的幅值也降低,但随  $\theta$  变化却较缓慢. 计算结果表明,三轴平均应力水平的降低是使材料韧性提高的一个重要原因.

图 3 和图 4 分别给出  $B/\bar{B} = 1000$  在  $r$  固定时,裂尖附近的速率和应力场. 对其它  $B/\bar{B}$  值得到了相似的计算结果.  $\sigma_{rr}$  和  $\sigma_{33}$  在  $\theta \rightarrow \pi$  时趋向无穷大,那么当  $r \rightarrow \infty$  时的  $\sigma_{rr}$  和  $\sigma_{33}$  值就为负常数,这与文[4]的分析结果一致. 在图 4 中  $\sigma_{33}$  始终为负值,这就要求为了使问题满足平面应变条件必须在  $x_3$  方向施加压力以阻止体积膨胀. 这些与文[10]剪切线硬化材料下的结果完

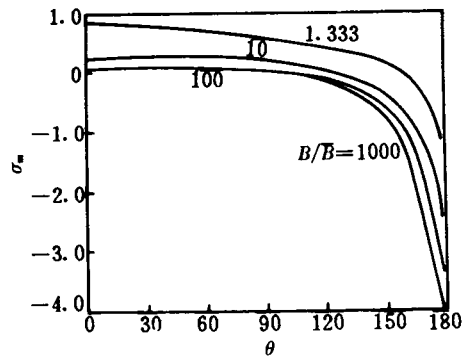


图 2 不同  $B/\bar{B}$  值下  $\sigma_m$  与  $\theta$  的关系

全不同. 从图 3 和  $v_r, v_\theta$  的渐近式分析可知,  $v_r$  始终为一个沿  $-x_1$  方向运动的速率, 而  $v_\theta$  在  $\theta \rightarrow \pi$  时表现为一张开的速率, 这些与文[4]的计算和实验结果相似. 综上所述, 整个相变区由于  $x_3$  方向的平面应变条件和裂纹附近弹性介质的挤压, 使得体膨胀只能沿  $-x_1$  方向发展.

对于韧性增值的计算, 由于涉及到扩展速率的大小, 无法给出其具体数值.

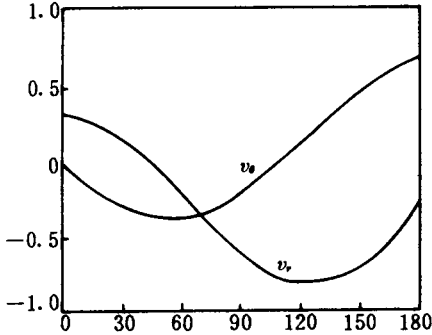


图 3  $B/\bar{B}=1000$  时在  $r$  固定时裂尖附近速率场

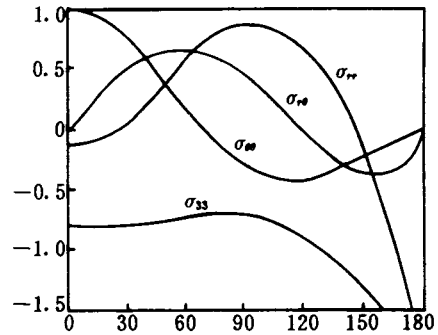


图 4  $B/\bar{B}=1000$  时在  $r$  固定时裂尖附近应力场

## 5 结论

本文利用渐近解法得到相变增韧陶瓷材料平面应变 I 型定常扩展裂纹尖端附近的速率, 应力场. 并且随着体膨胀效应增强, 使应力奇异性降低, 也使裂尖前缘三轴应力水平降低. 从计算结果中我们探讨了由相变产生的体膨胀的发展趋势. 文中还给了由能量积分推出的韧性增值的近似计算公式和相变区的尺寸. 从中看到韧性增值不仅与体膨胀有关而且还与裂纹扩展速率有关.

## 参 考 文 献

- 1 Garvie R C et al. Ceramic Steel? Nature, 1975, 258(4):703-704
- 2 Chen I W, Reyes-Morel P E. Implications of transformation plasticity in  $ZrO_2$ -containing ceramics: I, shear and dilatation effects. J Am Ceram Soc, 1986, 69(3):181-189
- 3 Reyes-Morel P E, Chen I W. Transformation plasticity of  $CeO_2$ -stabilized tetragonal zirconia polycrystals: I, stress assistance and autocatalysis. J Am Ceram Soc, 1988, 71(5):343-353
- 4 Budiansky B et al. Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics. Int J Solids Struct, 1983, 19(4):337-355
- 5 Lambropoulos J C. Shear, shape and orientation effects in transformation toughening. Int J Solids Struct, 1986, 22(8):1083-1106
- 6 黄克智, 孙庆平, 余寿文. 具有体膨胀和剪切效应的结构陶瓷相变塑性细观本构模型: I. 非比例加载历史. 力学学报, 1991, 23(3):299-308
- 7 Ye Yugong, Liang Xiaoqing. A computational modeling of transformation toughening in ceramics. Proceeding of Asian Pacific Conference on Fracture and Strength'93, Tsuchiura, Ibaraki, Japan, 1993:671-676
- 8 Li F Z., Pan J. Plane-strain crack-tip fields for pressure-sensitive dilatant materials. J Appl Mech, 1990, 57(1):40-49
- 9 Li F Z., Pan J. Plane-stress crack-tip fields for pressure-sensitive dilatant materials. Engr Fract Mech, 1990, 35

(5):1105—1116

- 10 Bigoni D., Radi E. Mode I crack propagation in elastic-plastic pressure-sensitive materials. *Int J Solids Struct.* 1993,30(7):899—919
- 11 杨卫. 结构增韧材料在裂纹扩展中的韧度增值. *力学学报*, 1991,23(1):61—71
- 12 Ponte Castañeda P. Asymptotic fields in steady crack growth with linear strain-hardening. *J Mech Phys Solids*, 1987,35(2):227—268
- 13 Narasimhan A, Rosakis A J. Reexamination of jumps across quasi-statically propagating surfaces under generalized plane stress in anisotropically hardening elastic-plastic solids. *J Appl Mech*, 1987,54(3):519—524
- 14 Hom C L, McMeeking R M. Numerical results for transformation toughening in ceramics. *Int J Solids Struct*, 1990,26(11):1211—1223

## ASYMPTOTIC ANALYSIS OF PLANE-STRAIN MODE I STEADY-STATE CRACK GROWTH IN TRANSFORMATION TOUGHENING CERAMICS( I )

Zhang Xi

(*Zhong nan Institute of Technology, Hengyang, Hunan, 421001*)

Ye Yugong

(*Institute of Mechanics, CAS, Beijing, 100080*)

**Abstract** The asymptotic crack-tip stress, velocity fields and the formula for the enhancement of toughness are numerically obtained for the plane-strain mode I steady-state crack growth in transformation toughening ceramics. The incremental small-strain constitution presented by Budiansky et al. is employed.

**Key words** transformation toughening ceramics, steady-state crack growth, enhancement of toughness, asymptotic analysis