

气泡在波浪中的运动

刘春嵘 周显初

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 本文研究了单个球形小气泡在理想流体的波浪场中在浮力作用下的运动。忽略气泡对波浪场的影响, 导出了气泡运动的方程组。对方程组进行了求解, 发现气泡运动中非线性耦合的影响随气泡半径的增大而增大, 对于较小的气泡可以忽略; 在小气泡情况下, 由于重力波频率与气泡本征振动频率相差太远, 二者的振动不会耦合, 在气泡的上升过程中, 气泡的振动很快衰减, 基本上可以忽略。给出了气泡上升运动的轨迹及所需的时间, 在波浪较大, 气泡较小的情况下, 上升轨迹可以呈螺旋形。

关键词 气泡, 气泡运动

1 引言

气泡的运动是个古老而又困难的问题, Rayleigh 早在 1917 年就研究了气泡运动学, 并指出在液体不可压且忽略表面张力及流体粘性的情况下, 气泡的半径由下式决定:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho} (P(R) - p_\infty) \quad (1)$$

这里 ρ 为液体密度, $P(R)$ 及 P_∞ 分别为气泡边界及无穷远处的液体压力。方程(1)中被忽略的表面张力及粘性的影响很容易进行修正。到目前为止, 其修正后的方程一直是研究气泡半径变化的主要方程。在他之后, 由于气蚀、声学和化工的需要, 气泡动力学被广泛地研究了。很多研究集中在气泡的固有振动频率及非线性对其的影响, 还有一部分考虑了质量运输扩散的影响, 70 年代后还有一部分研究考虑了非球形气泡动力学, 主要是气泡上升运动中的非球对称变形及气泡与固壁的相互作用。这些较早的研究可在 Plesset 和 Prosperetti(1977)^[1] 的综述中找到。气泡的运动是一个困难的问题, 其主要表现在: (a) 其基本方程(1)是非线性的; (b) 由于气泡半径的变化, 其边界条件是在未知边界上满足的, 每次边界形状都是在求解过程中确定的; (c) 气泡在运动过程中的变形使得问题不是一维的, 往往是二维的, 甚至是三维的, 这些都给数值计算带来很大的困难。近期的气泡研究中, 气泡的随机运动、气泡的崩塌及气泡运动的数值模拟是研究的主要方面。

关于气泡平动方面的研究工作并不很多, Moore(1965)^[2] 用渐进展开的方法研究了气泡发生小变形后的上升运动; Ryskin 和 Leal(1984)^[3] 用数值模拟方法研究了气泡发生大变形后的上升运动; 在上升运动中, 由于气泡外部压力的变化, 气泡的半径要随之发生变化, 但是他们的研究都未考虑气泡半径变化对气泡上升的影响。B. B. Chakraborty 和 G. S. Tuteba(1993)^[4] 研究了气泡半径变化和上升运动的耦合影响, 建立了运动方程, 用数值计算得出了气泡半径变化

本文于 1996 年 4 月 1 日收到。

对上升运动的影响。T. Watanabe 和 Y. Kukita(1993)^[5]考虑了声波对气泡运动的影响,但没有考虑重力产生的上浮运动。

为了研究海气相互作用中气泡对海气相互作用的影响,作为第一步要了解气泡在海洋中的运动,为此必须考虑气泡在波浪条件下在重力场中的运动状况。本文将对气泡在上升,水平,半径变化三个自由度下的运动状况进行研究。我们采用一些假定,使运动方程得到简化,从而不需要大型数值模拟,而只作一些简单的数值计算,并对结果进行分析。在第二节中我们将导出气泡运动的方程。在第三节中对计算结果作一些分析,讨论在波浪场中气泡运动的非线性影响、气泡上升的轨迹和时间以及气泡半径的变化。

2 基本方程

由于海洋中的气泡都很小,其半径难得有超过毫米量级的^[6],所以我们这里假设气泡的非球对称变形可以忽略,而认为气泡是球形的。对于气泡周围的流体,我们假设其是不可压缩流体,且运动是无旋的。由于海洋环境中的波长都较长,远大于气泡直径,因此气泡的存在对波浪没有影响。气泡在波浪场中可以当作质点处理。气泡在波浪中运动的速度势 Φ 可以认为是波浪的速度势 Φ_w 和气泡本身的速度势 Φ_b 的叠加。即

$$\Phi = \Phi_w + \Phi_b \quad (2)$$

而 Φ_b 满足下列方程

$$\nabla^2 \Phi_b = 0$$

$$\nabla \Phi_b = 0 \quad \text{无穷远处} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial n} = \vec{U}_b \cdot \vec{n} + \frac{dR}{dt} \quad \text{在气泡边界上}$$

这里 $\vec{U}_b = \vec{U} - \nabla \Phi_w$, \vec{U}_b 为气泡相对运动速度,下标 b, W 分别表示气泡和波浪。假如气泡离自由面不太近,而且流体是不可压的,扰动传播速度为无穷大,所以 Φ_b 的解可以近似地用以气泡的球心为原点的球坐标来表示

$$\Phi_b = -\frac{U_b R^3 \cos \theta}{2r^2} - \frac{R^2 \dot{R}}{r} \quad (4)$$

由于该坐标是运动的,应用关于动坐标系下的柯西-拉格朗日积分^[7],可得

$$P_w = P_w - \rho_l \left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial t} + \nabla \cdot \Phi_b \cdot \left(\frac{\nabla \Phi_b}{2} - \vec{U}_b \right) \right]_{bc} \quad (5)$$

其中 $P_w = P_a - \rho_l \left[\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi_w)^2 + gz \right]_{bc}$, 下标 bs, bc 分别表示气泡的表面和中心, P_a 为自由面的大气压力值, ρ_l 为流体的密度。以 P_g 表示气泡内部的压力, $\bar{P} = \frac{1}{4\pi R^2} \int P ds$ 表示气泡外部流体作用在气泡上的平均压力。那么按照气泡内外压力平衡可以得到气泡半径变化的方程

$$P_g = \bar{P} + \frac{2\sigma}{R} \quad (6)$$

把(4),(5)式代入(6)式,有

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{U_b^2}{4} = \frac{1}{\rho_l} (P_g - P_w - \frac{2\sigma}{R}) \quad (7)$$

这个方程形式上与[4]完全相同。这里的 P_w 代表了重力和波浪共同引起的压力,它替换了[4]中的 $P_c - \rho_l g z$, 而表示波浪对气泡半径的影响。(7)式在 $\vec{U}_b = 0$ 时与[5]的(1)式一样。这里的 P_g , 我们考虑绝热过程, $P_g = P_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}$, 其中 P_0 为 $R = R_0$ 时刻的压力值, γ 为比热比。气泡平动所满足的方程为

$$\frac{d}{dt}(m_b \vec{U}_b) + \frac{d}{dt}(m_b \nabla \Phi_w) = - \int P n ds - \frac{1}{2} \rho_l |U_b| \vec{U}_b A C_d + m_b \vec{g} \quad (8)$$

把(5)式代入(8)式,经过整理,并且由于附加质量 $\frac{2}{3} \pi R^3 \rho_l$ 比气泡质量大很多,所以含 m_b 的项可以忽略。于是得

$$\frac{d}{dt}(R^3 \vec{U}_b) = - 2R^3 \nabla P_w - \frac{3}{4} |U_b| \vec{U}_b R^2 C_d \quad (9)$$

气泡运动所受的阻力我们用阻力系数的方式来表示。阻力系数可以有不同的取值方法,可以用理论结果,也可以用实验结果。我们这里采用的是 Crum^[8] 的实验结果。

$$C_d = 27.0 Re^{-0.78}$$

其中

$$Re = \frac{2U_b R}{\nu}$$

Crum 的结果适用于 Re 在 1—200 之间。这对于我们研究的气泡是合适的。(9)式与[5]中的结果在形式上完全一致,只是用 P_w 代替了相应的 P ; 若 C_d 采用 Stokes 的理论结果 $C_d = \frac{24}{Re}$, 那么(9)式与[4]的结果相同。

用初始的气泡半径 $R(0)$ 、静水中气泡稳定上升速度 U_{b0} 、液体的密度 ρ_l 作为特征长度、速度、密度把方程无量纲化,并将其化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = Q \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} (P_g - P_w - \frac{2}{RW} - \frac{3}{2} Q^2 + \frac{U_b^2}{4}) \\ \frac{dU_{bx}}{dt} = - 2 \frac{\partial P_w}{\partial x} - \frac{3}{4} \sqrt{U_{bx}^2 + U_{bz}^2} U_{bx} C_d / R - 3QU_{bx} / R \\ \frac{dU_{bz}}{dt} = - 2 \frac{\partial P_w}{\partial z} - \frac{3}{4} \sqrt{U_{bx}^2 + U_{bz}^2} U_{bz} C_d / R - 3QU_{bz} / R \\ \frac{dX}{dt} = U_x = U_{bx} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial X} \\ \frac{dZ}{dt} = U_z = U_{bz} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial Z} \end{cases} \quad (10)$$

这里, $\frac{\rho_l U_b^2}{\sigma}$ 为 Weber 数, 方程组(10)用龙格—库塔法求解。其初值为

$$R(0) = 1, \quad Q(0) = Q_0, \quad U_{bx}(0) = U_{bz}(0) = 0, \quad X(0) = 0, \quad Z(0) = Z_0$$

这里,为了简单我们采用深水波,其速度势为

$$\Phi_w = \Phi_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t + \theta_0)$$

3 结果与讨论

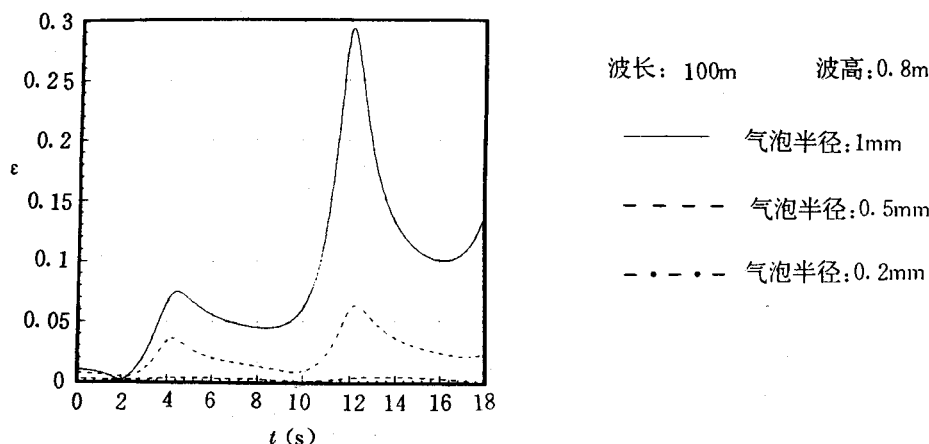


图 1

3.1 气泡运动中非线性影响

当气泡很小时,由于上升速度很小,故我们可以认为波浪场中的气泡运动是波浪的诱导运动和气泡的稳定上升运动的叠加。但当气泡较大时,由于上升速度变大,非线性效应一定会体现出来。为此,我们引入一个量 $\epsilon = \frac{|\vec{U}_b - \vec{U}_d|}{\vec{U}_d}$, 其中 \vec{U}_b 为气泡运动速度, $\vec{U}_d = \vec{W}_b + \nabla\phi_w$,

\vec{W}_b 是气泡稳定上升速度,可由浮力和阻力的平衡 $\frac{4}{3}(\rho_l - \rho_g)\pi R^3 g = \frac{1}{2}AW_b^2 C_d$ 而算出。图 1 显示了 ϵ 随 t 的变化。 ϵ 呈现周期变化,且随时间的增加而增加。从图中可以看出,半径为 0.2mm 的气泡 ϵ 很小,完全可以忽略。而半径为 0.5mm 的气泡在 t 较小时 ϵ 在 0.05 以下,粗略一点也可以把它忽略。但在 t 较大时 ϵ 已经超过 0.05,因此,需要考虑非线性耦合效应。当气泡半径为 1mm 时,从图上可知非线性的耦合效应已经不能忽略了。

3.2 气泡的上升轨迹与时间

按照气泡半径的大小,在波浪场中气泡上升的轨迹可分为四种(如图 2)。气泡半径大时, (如图 2(a)中半径 1.5mm)由于浮力的作用很大,气泡的上升速度很大,且气泡在水下不深处,在 1/4 波浪周期内,气泡可以升到水面,其轨迹是一条单调向上的曲线,这种情况下气泡上升时间最短。气泡半径较大时(如图 2(b)中半径 1mm),气泡上升速度比波浪的诱导速度大,若在 1/4 周期还上升不到水面,其轨迹呈现一种类似于正弦曲线的曲线。气泡半径较小时,(如图 2(c)中半径 0.5mm)气泡上升速度比波浪的诱导速度小,若在 1/4 波浪周期不能上升到水面,其轨迹会往下形成一个圈,而后再上升。当气泡半径很小时(如图 2(d)中半径 0.2mm)气泡上升速度比波浪诱导速度小很多,这时气泡的轨迹就形成一种螺旋线,由于波浪场的速度随深度而减少,所以螺旋的轴线与铅垂方向有一个角度。这种情况下,气泡的上升时间最长。

3.3 气泡半径的变化

气泡在波浪场中上升时,随着外界压力的减小,气泡半径逐渐变大。从图 3 可知,在我们所计算的这种情况下,气泡半径增加不大,不会超过 0.1。由于我们的初始条件是气泡处于静止

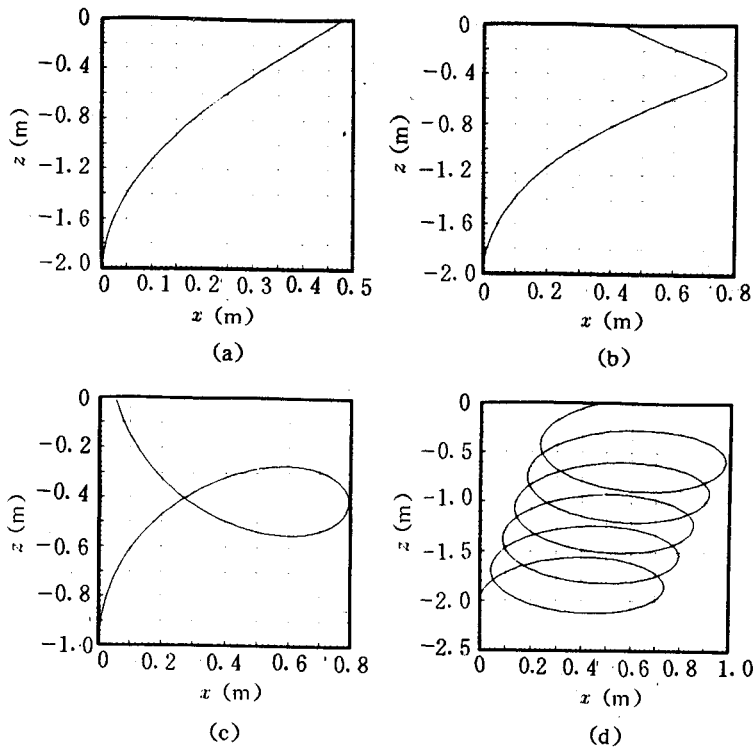


图 2

- | | |
|---------------|--------------|
| 波长: 100m | 波高: 0.8m |
| a. 气泡半径 1.5mm | 上升时间: 2.25s |
| b. 气泡半径 1.0mm | 上升时间: 5.8 s |
| c. 气泡半径 0.5mm | 上升时间: 7.58s |
| d. 气泡半径 0.2mm | 上升时间: 41.53s |

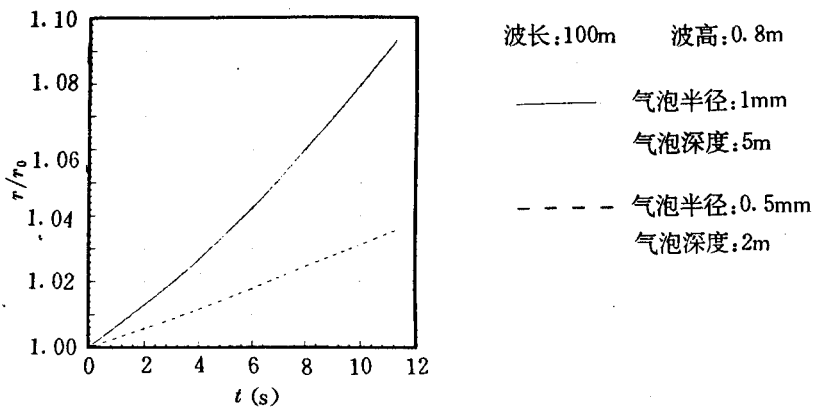


图 3

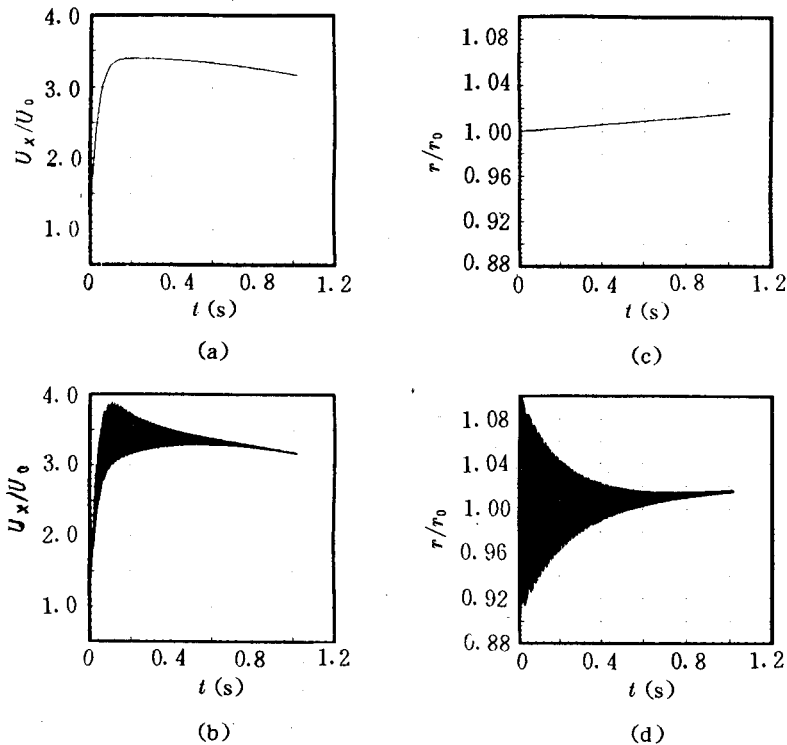


图 4

a,c: $\Delta t=0.02$ 有初始振动及初始静止的情况

b,d: $\Delta t=0.00001$ 有初始振动的情况

状态,再加上波浪的频率($O(1)$)远小于气泡振动的固有频率(10^3-10^4),因此,两者之间几乎没有能量交换,不会耦合,所以气泡没有出现振动,而是呈光滑曲线增大。对于初始不是静止状态的气泡,从图 4(d)可知,气泡半径在初始时刻呈振动状态,但很快就衰减,此后气泡半径单调增大。但这种情况下,数值计算所用的 Δt 很小,计算很费时间。为了减少计算时间,我们采用气泡初始处于静止时的 Δt 作为初始处于非静止状态的 Δt ,进行数值计算。从图 4 可知,在 Δt 较大时,气泡有无振动的两种计算结果完全一致。在气泡有振动时,大 Δt 的计算结果是小 Δt 的平均效果。所以,在研究气泡运动时,可以不考虑气泡半径的高频振动。这一点也可以从运动方程加以说明。在气泡高频有振动的情况下,对方程(7)、(9)在一个周期内取平均,若振动量是小量,则忽略其二阶量之后,其平均量服从与(7)、(9)完全相同的方程。当然如果振动量不是小量,二阶量不能忽略,那么结果就不一样了。

参 考 文 献

- 1 Milton S. plesset and Andrea Prosperetti, Bubble Dynamics And Cavitation, Ann. Rev. Fluid Mech. ,1977,9: 145.

- 2 Moore D W. The Velocity of Rise of Distorted Gas Bubbles in a Liquid of Small Viscosity. *J. Fluid Mech.*, 1965,23:749.
- 3 Ryskin G. and Leal L G. Bubble Deformation in an Axisymmetric Straining Flow, *J. Fluid Mech.*, 1984, 148:37.
- 4 Chakraborty B B. and Tuteja. G S. Motion of an Expanding, Spherical Gas Bubble in a Viscous Liquid under Gravity. *Phys. Fluids(A)*,1993,5(8):1879.
- 5 Watanabe T. and Kukita. Y. Translational and Radial Motions of a Bubble in an Acoustic Standing Wave Field. *Phys. Fluids(A)*,1993,5(11):2682.
- 6 Svein Vagle and David M. Farmer. The Measurement of Bubble-size Distribution by Acoustical Backscatter. *J. of Atmospheric and Oceanic Technology*, 1991,9:630.
- 7 清华大学工程力学系编. 流体力学基础. 1980年,169.
- 8 Crum. L A. Bjerknes Forces on Bubbles in Stationary Sound Field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1975,57:1363.

The Motion of a Bubble in Waves

Liu Chun-rong Zhou Xian-chu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract The motion of a single spherical bubble due to buoyancy in the ideal fluid with waves is studied in this article. Assuming that the bubble has no effect on the wave field, equations of a bubble motion are attained. The equations are solved. It is found that the nonlinear effect increases with the increase of the bubble radius. Since the difference between the frequencies of gravity waves and the eigenfrequency of bubbles is great for small bubbles, their oscillations can not be coupled. During the rising of a bubble, the oscillation of the bubble decays very fast, so it can be ignored. The rising time and the motion orbit are given. When the wave is high and the bubble is small, the spiral orbit may appear.

Key words bubble, bubble motion.