

平面混合流拟序结构的直接数值模拟*

傅德薰 马延文

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 采用高阶精度差分格式, 求解二维可压缩 N-S 方程, 直接数值模拟了可压缩平面混合流的二维拟序结构, 给出了流动失稳、Kelvin-Helmholtz 不稳定波的发展、展向大涡的卷起和相邻两涡卷对并, 包括 3 次对并的发展过程. 研究了平面混合流时-空的发展和可压缩效应对其发展的影响.

关键词 拟序结构 涡卷对并 高阶差分格式

直接数值模拟方法用于研究不可压缩湍流已取得了可喜的进展, 对一些典型流动得到了与实验相当一致的定量结果, 且发现了一些新的流动机理, 证实了直接数值模拟方法是研究湍流的重要手段之一. 因很多实际问题要求认识可压缩湍流及其流动转换的机理, 故直接数值模拟可压缩湍流及其转换的研究, 虽然刚刚开始, 但发展很快^[5~7].

近年来, 人们之所以倾注更多的注意力研究可压缩平面混合流动, 一方面, 为提高超声速冲压发动机的燃烧效率, 需研究其中燃气和空气的掺混机理及其控制方法; 另一方面, 这也是可压缩湍流的一个典型问题.

可压缩平面混合流流场是具有多尺度旋涡、旋涡-激波干扰的非定常复杂流场. 为了正确模拟该类流场, 要求采用高精度高分辨率的计算方法, 使其不但能够较好模拟流动中的高波数物理量, 又能较好地捕捉激波. 由于有限差分方法相对较为灵活, 且有利于捕捉激波, 因而在求解可压缩流动时, 采用有限差分方法更为合适.

本文采用高阶精度的差分方法, 数值模拟了二维时间发展的可压缩平面混合流. 计算方法的基本思想是以作者提出的五阶精度迎风紧致差分格式^[8]逼近二维可压缩 N-S 方程中的对流项; 以六阶精度对称紧致差分格式逼近粘性项; 以三阶精度的 R-K 方法逼近时间导数项. 所采用的方法精度高, 所需用格点少, 模拟高波数物理量的能力强. 又因格式具有迎风机制, 使能抑制数值解中的非物理高频振荡^[9]. 为了更好捕捉激波, 计算中还采用了作者提出的耗散比拟修正^[9]. 文中通过数值模拟给出了时间发展的平面混合流的失稳、拟序结构的形成及其发展过程. 所得 3 次对并的结果, 在对流 Mach 数 $Ma=0.2$ 时, 与文献[4]中采用谱方法模拟的不可压平面混合流 3 次对并的结果一致. 在此基础上, 文中讨论了可压缩性对拟序

1995-07-21 收稿, 1996-02-26 收修改稿

* 国家自然科学基金重大项目和国家攀登计划资助项目

结构的影响,给出了旋涡-激波束的流动结构.

1 计算方法

1.1 模型方程及差分逼近式

为了简便,首先以模型方程为例,简述本文的计算方法.考虑以下模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad f = cu, \quad (1)$$

方程(1)的半离散化形式可写为

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = \mu \frac{s_j}{\Delta x^2} \quad (2)$$

这里, $F_j/\Delta x$ 为 $\partial f/\partial x$ 的差分逼近式, $s_j/\Delta x^2$ 为 $\partial^2 u/\partial x^2$ 的差分逼近式. 对于不同的差分格式, F_j 和 s_j 将有不同的形式. 对于 $\partial f/\partial x$ 采用五阶精度迎风紧致格式^[6]逼近,则有

$$\frac{3}{5} F_j + \frac{2}{5} F_{j-1} = \delta_x^- \tilde{f}_j^+, \quad c > 0; \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} F_{j+1} + \frac{3}{5} F_j = \delta_x^+ \tilde{f}_j^-, \quad c < 0; \quad (4)$$

$$\tilde{f}_j^\pm = [-f_{j\pm 2} + 11f_{j\pm 1} + 47f_j + 3f_{j\mp 1}]/60.$$

这里,

$$\delta_x^- f_j = f_j - f_{j-1}; \quad \delta_x^+ f_j = f_{j+1} - f_j.$$

对于 $\partial^2 u/\partial x^2$, 采用六阶精度对称型紧致差分逼近,则有

$$2s_{j-1} + 11s_j + 2s_{j+1} = 12(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \frac{3}{4}(u_{j-2} - 2u_j + u_{j+2}). \quad (5)$$

对于方程(2)中的 $\partial u_j/\partial t$ 采用三阶精度的 R-K 方法逼近. 将方程(2)写为以下形式,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = L(u_j).$$

$L(u_j)$ 表示方程(2)中的空间差分算子. 三阶精度的 R-K 方法有以下形式,

$$u_j^{(0)} = u_j^{(n)} + \Delta t L(u_j^{(n)}), \quad (6a)$$

$$u_j^{(2)} = \frac{3}{4} u_j^{(n)} + \frac{1}{4} u_j^{(0)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u_j^{(0)}), \quad (6b)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{3} u_j^{(n)} + \frac{2}{3} u_j^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u_j^{(2)}). \quad (6c)$$

可以看出,该格式为三阶精度的 3 层显式格式,不但有较高的精度,且节省内存.

1.2 基本方程及差分逼近式

对于完全气体,在直角坐标系中,二维可压缩 N-S 方程的无量纲形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} f_v + \frac{\partial}{\partial y} g_v, \quad (7)$$

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, E]^T,$$

$$\begin{aligned} f &= [\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, u(E+P)]^T, \\ g &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, v(E+P)]^T, \\ E &= \left(c_v T + \frac{u^2 + v^2}{2} \right). \end{aligned}$$

方程(7)中的右端为粘性项; u, v, ρ, P 和 T 对应为 x, y 方向的速度分量, 密度, 压力和温度. 对应的无量纲化参数为 $u_1, v_1, \rho_1, \rho_1 u_1^2$ 和 T_1 . 下标 1 表示来流参数. c_v 为定容比热.

采用上述方法求解 N-S 方程(7). 将方程(7)改写为以下形式,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial g^+}{\partial y} + \frac{\partial f^-}{\partial x} + \frac{\partial g^-}{\partial y} = \frac{\partial f_v}{\partial x} + \frac{\partial g_v}{\partial y}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} f^+ + f^- &= f, & f^\pm &= A^\pm U, \\ g^+ + g^- &= g, & g^\pm &= B^\pm U. \end{aligned}$$

矩阵 A 和 B 对应为 Jacobian 矩阵

$$A = \frac{\partial f}{\partial U}, \quad B = \frac{\partial g}{\partial U},$$

$$A^\pm = S_a^{-1} \Lambda_a^\pm S_a, \quad B^\pm = S_b^{-1} \Lambda_b^\pm S_b.$$

Λ_a^\pm 和 Λ_b^\pm 对应为矩阵 A 和 B 分裂后的特征值 λ_k^\pm 的对角矩阵. 这里所采用的特征分裂形式为按符号分裂, 即设某一特征值为 λ , 则

$$\lambda^\pm = \frac{1}{2} (\lambda + |\lambda|).$$

这里从方程(8)出发简述构造 N-S 方程的差分逼近式的方法. 采用方程(3)类型的差分式逼近方程(8)中左端的第 2 和第 3 项, 以方程(4)类型的差分式逼近第 4 和第 5 项. 由于粘性项中二阶导数的形式为 $\partial(k\partial g/\partial x_j)/\partial x_i$ ($i=1, 2; j=1, 2; x_1=x, x_2=y; g=u, v, T$), 其差分逼近式可采用两次一阶导数的差分逼近式. 例如, 对于 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, 以 $G_j/\Delta x$ 表示其差分逼近式, $G = \mu_j F_j/\Delta x$. 而 $F_j/\Delta x$ 为 $\partial u/\partial x$ 的差分逼近式. 采用六阶精度对称型紧致差分格式^[7], 则有

$$\frac{1}{5} F_{j+1} + \frac{3}{5} F_j + \frac{1}{5} F_{j-1} = \frac{14}{15} \delta_x^0 u_j + \frac{1}{30} \delta_x^0 (u_{j+1} - u_{j-1}), \quad (9a)$$

$$\frac{1}{5} G_{j+1} + \frac{3}{5} G_j + \frac{1}{5} G_{j-1} = \frac{14}{15} \delta_x^0 (\mu F_j) + \frac{1}{30} \delta_x^0 [(\mu F)_{j+1} - (\mu F)_{j-1}], \quad (9b)$$

$$G_j = (\mu F)_j/\Delta x, \quad G_j/\Delta x \sim \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (9c)$$

这里 $\delta_x^0 u_j = (u_{j+1} - u_{j-1})/2$.

方程(8)中的时间导数项以差分式(6)逼近. 由此所得到的差分方程是时间为三阶精度, 空间为五阶精度的显式差分方程.

2 平面混合流的数值模拟

采用以上计算方法数值模拟了时间发展的可压缩平面混合流. 考虑两股速度大小相等, 方向相反且平行的均匀流, 被一无限平板隔开, 在某一时刻, 隔板突然消失, 两股流动在全长同时相遇, 很快形成随时间发展的自由剪切层.

2.1 初始流场和边界条件

初始流场的速度是平均流加几个低波数的扰动量. 平均流的初值为双曲正切分布,

$$\begin{aligned} \bar{u} &= A[B + \tanh(\beta y)], \quad \beta > 0, \\ \bar{v} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$A = (u_1 - u_2)/2, \quad B = (u_1 + u_2)/2,$$

这里 u_1 和 u_2 对应为上下两股流动的速度. 初始扰动速度取以下形式,

$$\begin{aligned} u' &= \sum_j \varepsilon_j \{ \varphi_{\alpha_j, r}(y) \cos(\alpha_j x) - \varphi'_{\alpha_j, i}(y) \sin(\alpha_j x) \}, \\ v' &= \sum_j \varepsilon_j \alpha_j \{ \varphi_{\alpha_j, r}(y) \sin(\alpha_j x) + \varphi_{\alpha_j, i}(y) \cos(\alpha_j x) \}, \\ j &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (11)$$

其中取 α_1 为线性理论给出的最不稳定模态的波数, $\alpha_1 = 0.4446$, $\varphi_{\alpha_1, r}$ 和 $\varphi_{\alpha_1, i}$ 对应为流函数在波数 α_1 时的特征函数的实部和虚部. $\varphi'_{\alpha_1, r}$, $\varphi'_{\alpha_1, i}$ 为 $\varphi_{\alpha_1, r}$, $\varphi_{\alpha_1, i}$ 对 y 的导数; $\varphi_{\alpha_2, r}$, $\varphi_{\alpha_2, i}$, $\varphi'_{\alpha_2, r}$, $\varphi'_{\alpha_2, i}$ 为波数 α_2 的特征函数及其对 y 的导数^[9].

初始压力取为来流值, 在本文无量纲定义下, 初始压力 $P = \frac{1}{rM_\infty^2}$. 初始温度由

Busemann-Crocco 关系式确定: $T_1 = T_2 = \left[1 + \frac{r-1}{2} M_\infty^2 (1 - \bar{u}^2) \right]$, $M_\infty = Ma$. 初始的密度由完全气体状态方程确定.

本文采用文献[3]中的对流 Mach 数定义: $Ma = (u_1 - u_2)/(c_1 + c_2)$, c 为声速, 下标 1 和 2 表示上下流动中的参数. 取初始涡量厚度 δ_w^0 为特征长度. 计算中取 $u_1 = -u_2 = 1$; $\beta = 1$;

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.05$, $\alpha_1 = 0.4446$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} \alpha_1$, $\alpha_3 = \frac{1}{4} \alpha_1$, $\alpha_4 = \frac{1}{8} \alpha_1$; Reynolds 数 $Re = 400$. 计算区域为 $0 \leq x \leq 16\pi/\alpha_1$, $-12\pi/\alpha_1 \leq y \leq 12\pi/\alpha_1$.

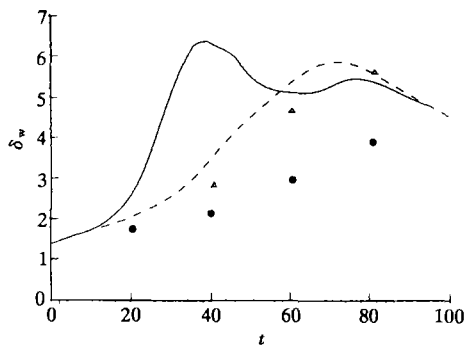


图 1 涡量厚度随时间的变化

边界条件: 在 y 方向上下边界处取来流条件, x 方向取周期边界条件.

2.2 计算结果及分析

首先, 为了验证计算方法, 选取文献[1]中相同的初始条件, 给出了 $Ma = 0.4$ 和 0.8 两种状态的结果. 在图 1 中给出了混合层涡量厚度随时间的变化, $M_\infty = 0.4$ 的结果为实线, $M_\infty = 0.8$ 的结果为虚线. 本文的计算网格点为 76×76 . 可以看出, 随着 Mach 数增加涡量厚度的增长率显著下降. 为了比较, 图 1 中还给出

了文献[1]中采用 TVD 格式给出的 $M_\infty=0.8$ 的计算结果,其中圆点是网格点为 75×75 的结果,三角点是网格点为 150×150 的结果.可以看出,本文的方法采用较少的网格点所得结果精度更好些.

本文中给出的初始值,扰动速度(见(11)式)是 1 个基本模加 3 个亚谐波,对应 3 次涡卷对并的初值.计算中对流 Mach 数 $Ma=0.2$ 时,取网格点为 200×200 ; $Ma=0.8$ 时,取网格点为 502×156 .在图 2 中给出了 $Ma=0.2$ 时,各特征时刻处的等涡量线;特征时间 T_{pn} 为第 n 次涡卷对并的时刻, T_{sn} 为第 n 次对并后,涡量通过螺旋肩向辫子区输入涡量的时刻. $Ma=0.2$ 的计算结果表明,开始由于自由剪切流的失稳,首先出现了 Kelvin-Helmholtz 不稳定波,一定时间内扰动量以指数形式增长.在基本扰动波的作用下,初始时刻流向基本均匀分布的涡量,逐渐沿流动方向重新分布,形成 8 个规整的 K-H 涡卷,其后非线性效应增加,亚谐波扰动显著增长,并逐渐处于主导地位,导致了相邻涡卷的第 1 次对并(见图 2 中 $T=40.00$ 的结果),涡卷数由 8 个减为 4 个,混合层厚度和涡卷之间的尺度加倍.余下的辫子区内的涡量继续被吸入到涡卷内,直到辫子区内的涡量差不多都被吸入到新涡卷中后,从新涡卷中伸出一螺旋肩(Spiral-arm^[4]),根据能量守恒的要求,展向涡量将通过螺旋肩再返回辫子区(见图 2 中 $T=65.33$ 的结果).每次对并将基本重复以上过程(见图 2).在图 3 中给出了混合层动量厚度 δ_m 和 $-\omega_b$ 随时间 t 的变化. ω_b 为两涡卷之间中心垂直线上展向涡量 ω_z 的绝对值的最大值.这里可以看出,每次对并前 $-\omega_b$ 变得很小,因辫子区内的涡量被吸入到涡卷中了.之后,涡量通过螺旋肩再入辫子区,图 3 中以 $-\omega_b$ 的突然增加表征.另外,除每次对并后

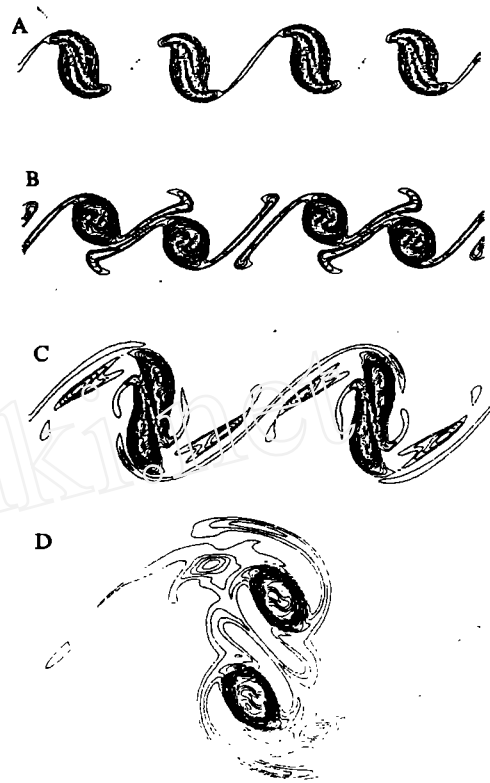


图 2 $Ma=0.2$ 的涡量等值线
A— $T=40.00$, B— $T=65.33$, C— $T=93.33$,
D— $T=213.33$

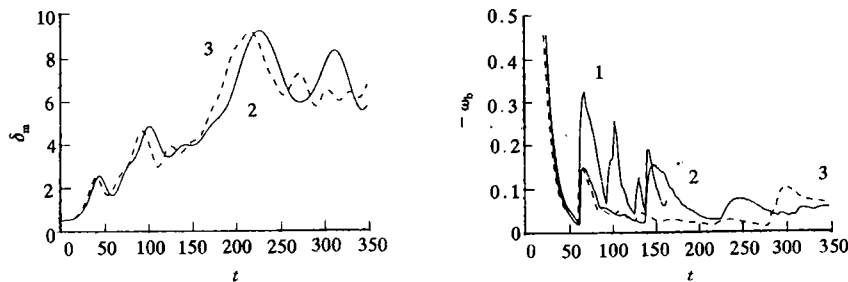


图 3 δ_m 和 $-\omega_b$ 随时间的变化
1— $Ma=0.4$, 1 次对并, 2— $Ma=0.4$, 3 次对并, 3— $Ma=0.2$, 3 次对并

展向涡量再入辫子区外,多次对并后仍有涡量增加,这是超饱和态时通过对流输入辫子区的涡量.从图 3 还可以看到, $T=T_{pn}$ 时刻也是动量厚度 δ_m 达到最大值的时刻.由于每次对并完成后,混合层的流向尺度和厚度都增加 1 倍,而速度尺度基本不变,故时间尺度也增加 1 倍.这从图 3 和表 1 中都可以看到.在表 1 中列出了本文计算结果给出的特征时间.为了比较,表中还列出了文献[4]中,对于不可压平面混合流采用谱方法得到的计算结果.可以看出, $Ma=0.2$ 时两者附合甚好.本文给出的 $Ma=0.2$ 流动特征与文献[4]给出的不可压的流动特征基本一致.表明对流 Mach 数较低时,流动特征类似于不可压缩流.也进一步证实了本文提出的计算方法的有效性.

表 1 特征时间比较^{a)}

特征时间	不可压流	$Ma=0.2$ $Re=490$ 3 次对并	$Ma=0.4$ $Re=400$ 3 次对并	$Ma=0.4$ $Re=5000$ 1 次对并
T_{n1}	21.5	40.33	43.67	44.78
T_{s2}	47.0	92.33	100.00	
T_{p3}	103.7	215.63	224.31	
T_{s1}	32.0	65.33	65.00	67.52
T_{s2}	66.7	132.65	147.00	
T_{s3}	139.8	296.61	250.63	
T_{o1}				102.54
T_{o3}		307.66	316.95	

a) 本文计算中的时间尺度与文献[4]相差 1 倍,故比较时应将本文计算得的特征时间除以 2

2.3 可压缩效应的讨论

实验结果指出,可压缩混合层的增长率随着对流 Mach 数 Ma 的增加而减小.本文数值模拟结果也证实了这一点(见图 1).文献[5]中对可压缩混合层增长率下降的机理进行了简单分析,着重讨论了线性理论的指数增长范围.本文将以前 3 次涡卷对并的数值模拟结果为基础讨论流动机理.本文指出,在可压缩混合流中,拟序结构是以波-涡相互干扰所控制的.众所周知,在可压缩流动中流体内部有纵波和横波存在.前者是由流体的压缩和膨胀而产生的,如 Mach 波和激波;后者是剪切作用而引起的涡波,如混合层中的 Kelvin-Helmholtz 波(简称 K-H 波).在可压缩混合流中,涡波的存在导致了纵波的产生.纵波和横波与旋涡运动的干扰确定了可压缩混合流的拟序结构.

考虑以对流速度 U_c 运动的坐标,在不可压混合流中,首先使涡量产生再分配的是横波(即 K-H 波)的非稳定性导致涡卷的形成,使得涡量从 2 个涡卷之间的驻点被带入到涡心,混合层厚度增加.在可压缩混合层中,除以上机制外,还由于纵波的影响,流体离开 2 个涡卷之间的驻点向涡心膨胀,然后经过涡心压缩且减速走向另一个驻点.这种膨胀和压缩的过程使得驻点附近的涡量增加,涡心附近的涡量减少.这与横波非稳定特性导致的涡量再分配的作用刚好相反^[9].这种相反的作用导致了混合层增长率初始阶段的下降.然而,从图 3 中可以看出,在 $Ma=0.2$ 和 0.4 时,初始线性理论区混合层的增长率基本相同(与文献[5]中结果一致),但由于纵波的影响加大了对流作用,使涡卷对并推迟(见表 1).另外,正如文献[4]中指出,在不可压混合流中,使得涡量伸展开来仅有的机制是粘性耗散,因每次对并后混合层厚度增加

1倍, Reynolds数也增加1倍, 故耗散不可能与涡卷的对并齐步前进, 所以每增加一次对并, 相对于长度尺度涡量就更加集中(见图2, 因 $Ma=0.2$ 近似于不可压流). 然而, 在可压缩流中, 通过流动膨胀和压缩使涡量带入到辫子区内, 从而妨碍了涡量的集中(比较图2和图4). 以上可压缩效应随着对流 Mach 数的增加而增加, 使得两种效应成为可比较的, 混合层的增长率显著下降. 图4中给出了 $Ma=0.8$ 在3次涡卷对并时的等涡量线和等密度线的计算结果. 这里的膨胀和压缩过程更加明显. 从图4中可以看出, 在第1次对并过程中, 流体膨胀使得流场的局部区域当地 Mach 数超过1, 且首先在涡卷附近 Mach 波相交产生激波. 之后, 激波逐渐向外延伸, 流体过激波后变为亚声速, 然后进入辫子区, 流体进一步压缩减速直到驻点. 流场中形成涡-激波束的结构(见图4中 $T=64$ 的结果). 在对并过程中, 激波强度改变. 流场

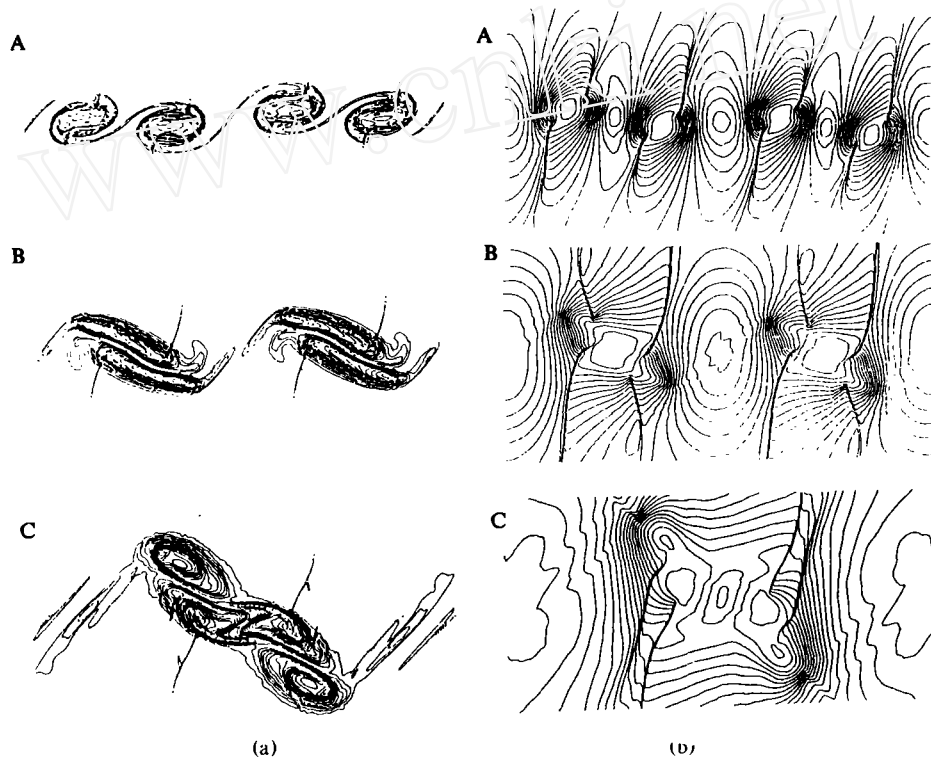


图4 涡量与密度的等值线图

(a) $Ma=0.8$ 的涡量等值线, (b) $Ma=0.8$ 的密度等值线, A— $T=64.00$, B— $T=96.00$,
C— $T=223.88$

中激波束的强度是不相同的, 且在弱激波之间的辫子区越来越小, 而强激波之间的辫子区越来越拉开, 为下一次的对并创造了条件. 多次对并过程中, 涡卷的变形也导致了激波的变形. 从图4还可以看出, 在对流 Mach 数 $Ma=0.8$ 时, 二维混合流的拟序结构中, 大涡结构仍然存在. 每次对并除涡卷数减半, 混合层厚度和涡卷间尺度加倍外激波对的个数也减半. 这里进一步说明了波-涡之间的干扰确定了可压缩混合流的拟序结构.

致谢 在本文的写作过程中, 通过与周恒教授的讨论, 得到了有益的启发, 特此致谢.

参 考 文 献

- 1 Sandham N D, Yee H C. A numerical study of a class of TVD schemes for compressible mixing layers. NASA-TM-102194, A-89139, 1989
- 2 Michalke A. On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile. *J Fluid Mech*, 1964, 19: 543~556
- 3 Papamoschou D, Roshko A. The compressible turbulent mixing layer: an experimental study. *J Fluid Mech*, 1988, 197: 453~477
- 4 Moser R D, Rogers M M. The Three-dimensional evolution of a plane mixing layer: Pairing and transition to turbulence. *J Fluid Mech*, 1993, 247: 275~320
- 5 Lele S K. Direct Numerical Simulation of Compressible Free Shear Flows. AIAA Paper 89-0374, 1989
- 6 Rai M M, Moin P. Direct numerical simulation of transition and turbulence in a spatially evolving boundary layer. *J of Comput Phys*, 1993, 109: 169~192
- 7 Lee S, Lele S K, Moin P. Eddy shocklets in decaying compressible turbulence. *J Phys of Fluids A*, 1991, 3 (4): 657~664
- 8 傅德薰, 马延文. 物理问题的数值模拟及高精度差分格式. *计算物理*, 1992, 9(4): 501~503
- 9 Ma Yanwen, Fu Dexun. Diffusion analogy and shock capturing for solving aerodynamic equations. *Science in China, Series A*, 1992, 35(9): 1090~1100