

三维离散元块体-质点计算模型^{*}

李世海 饶莹 赵满洪 田振农

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 本文提出了一种新的三维离散元计算模型, 该模型可以用于模拟岩土体的连续与非连续特征。新模型假设岩体是由一系列具有法向、切向刚度弹簧连接的块体组成, 而每个块体内部又是由按照具有一定规则连接的弹簧的质点构成。给出了求解单个块体内连接质点弹簧的泛函的一般表达式, 并通过变分的方法, 列出了求解弹簧刚度的基本方程。在此基础上, 模拟计算了立方体试样单轴压缩、纯剪切条件下变形规律, 结果表明, 新的模型模拟弹性体有较高的精度, 将该模型用于模拟岩土体的破坏试验, 给出了合理的物理图像。

关键词 三维离散元; 块体颗粒; 弹簧刚度; 变形破坏

1 前言

离散元块体模型方法对于描述具有非连续特征的地质体是非常有效的工具。然而, 在解决实际问题的过程中发现, 该方法仍然还有一些局限性。人们知道, 岩体中结构面对山体的稳定性起着非常重要的作用, 但是, 在山体破坏的最后阶段, 山体中处于特殊位置的个别岩块的破坏却是影响山体稳定性的关键因素, 这就需要考虑离散元中单元块体的破坏。对于土石混合物, 土的强度远低于岩块的强度, 如果采用块体模型, 山体的破坏面很有可能是穿过土块的, 也需要研究土单元的破坏行为。

关于岩石力学中目前采用的各种数值方法, Jing 和 Hudson (2002)^[1] 有比较详细而全面的评述。有限元方法面临的主要问题是有效的处理岩体中结构面以及裂隙发展演化, 离散元的块体模型的主要问题是有效的解决块体的变形、再断裂^[2-10]。本文提出的块体、质点模型, 一方面可以通过块体的接触面模拟岩体的结构面并方便的给出介质的非连续特性。另一方面通过质点的弹性连接模拟块体的弹性变形和断裂过程, 发展该模型对深入研究岩体的连续非连续特性有着重要的意义。

2 块体质点力学模型

块体-质点力学模型假设岩体是由一系列块体组成的, 块体是由有限个质点组成的。块体之间和块体内质点之间均由弹簧和阻尼器连接, 它们分别反映岩体结构面的力学特性和块体材料的力学特性。

2.1 块体的形状及其内部质点的空间分布

从理论上讲, 我们可以采取各种方式离散材料模型, 但随着与各点的相关点增加离散精度随之提高, 然而这也意味着相应的结构更加复杂。在这里, 只研究立方体单元和与其等效的 25 个质点构成的弹簧-质点系统 (如图 1)。

质点分布: 25 个质点其中一个位于质心, 其余 24 个质点分布在立方体的面上。每个面上 4 个点, 分别位于该面面心到 4 个角点连线的中点上。

* “滑坡灾害中的关键力学问题” 和 “灾害环境下重大工程安全性的基础研究” 2002cb412703 课题资助。

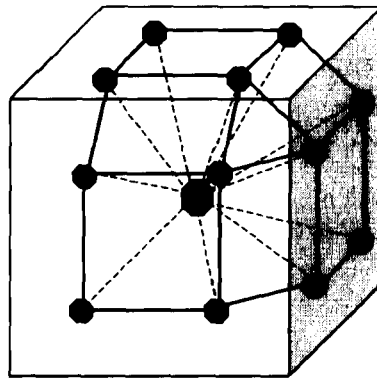


图1 块体内部弹簧系统示意图

连接方式：连接每个面上的质点假设由 5 根弹簧，分别与质心、同面上的两个点、异面上最近的两个点相连。

质量分配：25 个质点的质量和等于块体的质量，25 个质点对 3 根轴的转动惯量相等。

2.2 弹簧参数标定

2.2.1 立方体单元在均匀变形条件下的弹性力学解

假设单元在外力作用下处于平衡状态，并且不考虑块体的平动和转动。对均匀形变，作用于立方体边界面上的力与内部的应力满足简单的关系

$${}^n F_{kj} = \frac{S_k^j}{4} \sigma_{ij} \quad (1)$$

式中 $i, j=1, 2, 3$ 表示 x, y, z 三个方向； S_k^j 为立方块体上第 k 个面的面积矢量； ${}^n F_{kj}$ 分别表示作用于立方块体第 k 个面上第 n 个质点上的力； σ_{ij} 表示块体内部的应力。

块体面上位于坐标为 X_i, Y_i, Z_i 的质点的位移，与所受的边界力满足如下关系式：

2.2.2 质点弹簧系统中力与位移的关系

假设连接任意两个质点之间弹簧为线性的，作用于每个集中点上的力、位移和与之相连的弹簧的刚度满足如下表达式：

$$\begin{Bmatrix} {}^n u_{i1} \\ {}^n u_{i2} \\ {}^n u_{i3} \end{Bmatrix} = \frac{4}{ES_i} \begin{bmatrix} X_i & -vX_i & -vX_i & (1+v)Y_i/2 & 0 & (1+v)Z_i/2 \\ -vY_i & Y_i & -vY_i & (1+v)X_i/2 & (1+v)Z_i/2 & 0 \\ -vZ_i & -vZ_i & Z_i & 0 & (1+v)Y_i/2 & (1+v)X_i/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^n F_{11} \\ {}^n F_{22} \\ {}^n F_{33} \\ {}^n F_{12} \\ {}^n F_{23} \\ {}^n F_{31} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$${}^n F_{ij}^l = \sum_l^5 \sum_m^3 {}^n A_{ijm}^l K_m^l \quad (3)$$

$${}^n A_{ij}^l = \Delta^l \cos^2 \theta_{ij}^l \quad (4)$$

式中 $n=1, 25$ 表示块体内部 25 个质点； i 为第 n 个质点所在的面； l 表示与第 n 质点联系的 5 个质点的第 l 个质点； j 表示 x, y, z 三个方向的自由度； Δ^l ， θ_{ij}^l 分别表示连接第 n 质点和相连的第 l 个点的之间的弹簧的增长量（与两个质点的位移有关）和两点间连线的与 x, y, z 轴的夹角； ${}^n K_m^l$ 表示与第 i 面上第 n 个质点相关的第 l 个弹簧在其局部坐标系下 m 方向上的刚度。

2.2.3 弹簧刚度求解的基本方程

公式 (2) 给出的力和位移之间的关系可以作为弹性块体的力学实验结果，如果将 (2) 中作用于各个面上的均布荷载等效为作用在质点上的集中力，那么，就可以将质点的力和位移带入 (3) 式，进而给出未知量为刚度系数的线性方程组。设作用在某个标志点上的外力为 ${}^n F_{ij}$ ，不同

弹簧作用于该点的内力为 ${}^n F_{ij}^l$ 。由于内力与材料的性质有关, 取决于试验时标志点的位移。因此, 只要根据平衡条件, 作用在该点上的合力为零, 就可以建立弹簧的力与位移之间的关系。用于描述复杂材料的力学特性。为此, 我们选取如下的目标函数

$$\Pi = \sum_n^{25} \sum_j^3 ({}^n F_{ij}^c - {}^n F_{ij}^l)^2 \quad (5)$$

将 (3) 式代入, 即可以得到

$$\Pi = \sum_n^{25} \sum_j^3 ({}^n F_{ij}^c - \sum_{l=1}^5 \sum_m^3 {}^n A_{ij}^l {}^n K_i^l)^2 \quad (6)$$

将 Π 对各弹簧刚度求变分就可以得到 n 个关于弹簧刚度的线性方程组, 即

$$\sum_n^{25} \sum_j^3 2({}^n F_{ij}^c - \sum_{l=1}^5 \sum_m^3 {}^n A_{ij}^l {}^n K_i^l) {}^n A_{ij}^l = 0 \quad (7)$$

联立求解方程组 (7), 可以得到各弹簧刚度值作为数值模拟的已知材料常数。

4 块体-质点模型中单个质点的运动方程

块体质点模型中, 每个质点所受的力包括块体内部各个弹簧之间的作用力、块体间相互作用力, 就可以建立块体内部质点的平衡方程

$$m_n \frac{d^2 u_{ij}^n}{dt^2} + \sum_{l=1}^5 \sum_m^3 {}^n A_{ij}^l {}^n C_i^l \left(\frac{du_{ij}^n}{dt} - \frac{du_{ij}^l}{dt} \right) + {}^n C_i^b \left(\frac{du_{ij}^n}{dt} - \frac{du_{ij}^b}{dt} \right) + \sum_{l=1}^5 \sum_m^3 {}^n K_i^l (u_{ij}^n - u_{ij}^l) + {}^n K_i^b (u_{ij}^n - u_{ij}^b) = {}^n F_{ij}^c \quad (8)$$

式中 m_n 为第 n 个质点的质量; ${}^n C_i^l$ 为质点 n 与相邻的质点 l 之间弹簧的阻尼系数; ${}^n C_i^b$ 、 ${}^n K_i^b$ 分别为第 n 质点与相邻块体的第 b 个质点之间在 m' 方向上; ${}^n K_i^b$ 为块体间不同的弹簧阻尼系数和弹簧刚度, ${}^n F_{ij}^c$ 为边界面上质点所受的外力, 对研究区域内部的质点该值为零。

5 块体-颗粒模型的计算实例

5.1 模拟弹性块体变形

算例一: 上下表面均采用静力边界条件, 边界力为 5 MPa 的均布剪应力; 侧向为自由位移边界 (图 3)。

研究区域为 $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 5\text{ m}$ 的立体区域, 用水平及垂直结构面划分网格为正方体单元, 各组平面间距均为 0.5 m, 摩擦角取 36° , 其它参数取值见表 1, 忽略块体的重力。相应的拟合方程结果列于表 2 中:

表 1 模拟岩石单轴受压试验的离散元计算参数取值

块体弹性模量 E	泊松比	结构面法向刚度	结构面切向刚度
30 GPa	0.2	$6.5 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$	$6.5 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$

表 2 算例一的应力场、位移场结果对照 (应力单位 MPa, 位移单位 m)

算例编号	三维离散元模拟结果	理论解
算例一	$u = -1.70 \times 10^{-4} + 3.40 \times 10^{-5} x$	$u = -1.67 \times 10^{-4} + 3.33 \times 10^{-5} x$
	$v = -1.70 \times 10^{-4} + 3.40 \times 10^{-5} y$	$v = -1.67 \times 10^{-4} + 3.33 \times 10^{-5} y$
	$w = 8.66 \times 10^{-4} - 1.73 \times 10^{-4} z$	$w = 8.33 \times 10^{-4} - 1.67 \times 10^{-4} z$
	$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = -0.5$	$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = -0.5$
	剪应力各分量均为小量, 10^{-1} MPa	$\tau_{xy} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0$

算例二：上下表面均采用静力边界条件，边界力为 5 MPa 的均布压应力；侧向为自由位移边界。

研究区域为 5 m × 5 m × 5 m 的立体区域，用水平及垂直结构面划分网格为正方体单元，各组平面间距均为 0.5 m，摩擦角取 36°，其它参数取值见表 1。忽略块体重力的影响。相应的拟合方程结果列于表 3 中。

计算达到平衡后，由算例一，算例二给出的应力场和位移场与理论解吻合得很好。

表 3 算例二的应力场、位移场结果对照 (应力单位 MPa, 位移单位 m)

编号	三维离散元模拟结果	理论解
算例二	$u = 0$	$u = 0$
	$v = 2.06 \times 10^{-4} z - 0.00103$	$v = 2.08 \times 10^{-4} z - 0.00104$
	$w = 2.06 \times 10^{-4} z - 0.00103$	$w = 2.08 \times 10^{-4} z - 0.00104$
	$\tau_{xy} = 0 \quad \tau_{yz} = 4.12 \times 10^{-4} \quad \tau_{zx} = 0$ 正应力各分量均为小量, 小于 10^{-1} MPa	$\tau_{xy} = 0 \quad \tau_{yz} = 0.16 \times 10^{-4} \quad \tau_{zx} = 0$ $\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = 0$

5.2 模拟块体破坏

研究区域都选取 5 m × 5 m × 5 m 的立体区域，用水平及垂直结构面划分网格为正方体单元，各组平面间距均为 0.5 m，摩擦角取 36°，其它参数取值见表 2，忽略块体的重力。上表面采用混合边界条件，边界力为 2 GPa 的均布压应力，约束切向位移，下表面固支，侧向为自由位移边界。

通过计算给出的块体内部弹簧应变等值线图可以看到岩石内部的裂缝发展过程，块体外侧自由表面首先出现裂缝，裂缝进一步向内演化，直到出现图 2 所示的破坏形式，与试验中常见的破坏形式 (如图 3) 相吻合。

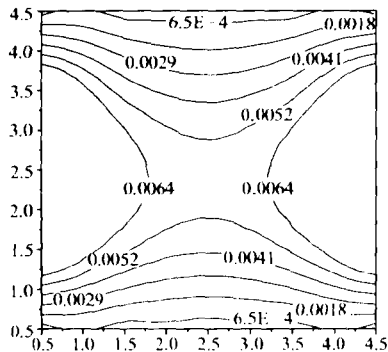


图 2 块体内部弹簧应变等直线图

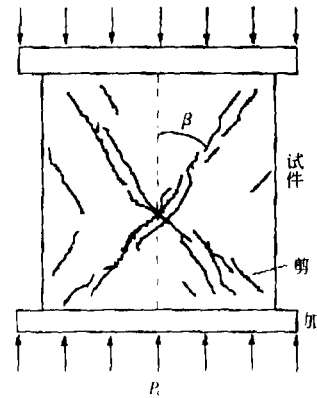


图 3 岩石抗压强度试验

块体-质点模型中单元内部弹簧的破坏准则与破坏过程与连续介质的描述方法不同，在离散单元块体-质点模型中，块体内部弹簧系统各个弹簧的破坏条件可以通过最大拉力和最大位移给出。在这里，我们提出了弹簧相对增长量的破坏准则。即，当

$$\frac{\Delta l_i}{l_i} \geq [\epsilon_0] \tag{9}$$

材料破坏。 Δl_i , l_i 其中分别表示第 i 个弹簧的增长量和初始长度； ϵ_0 为常数，算例中为 0.006，表示材料的最大相对增长量； Δl_i 为宏观可测量，因此，试验中可以直接建立与其它强度准则的

关系。

通过块体颗粒模型可以非常清晰地描述材料破坏的过程, 当任意一点的弹簧达到其强度时断开, 则该弹簧系统中由质点 n , l 相连的弹簧不再承担力, 原本由该弹簧承担的力转为由其它的弹簧承担, 系统实现自我平衡, 如果这时其它的弹簧在断裂就会引起一系列的连锁反映, 导致整体破坏。表 4 给出了材料的破坏状态与质点受力状态和连接弹簧之间的关系。

表 4 质点运动状态弹簧受力与材料破坏演化过程表

破坏状态	破坏前时刻	破坏后时刻	破坏演化过程	最后状态 (整体破坏)	最后状态 (整体稳定)
该质点受力	平衡	不平衡	不平衡	平衡	平衡
该质点运动	零	零	不等于零	匀速运动	等于零
相邻点受力	平衡	平衡	不平衡	平衡	平衡
相邻点速度	零	零	不等于零	匀速运动	等于零

6 结论

建立了三维离散元块体-质点模型, 给出了一种质点弹簧系统的连接方式, 和块体在弹性变形下, 弹簧刚度的求法。模拟了新模型下, 材料破坏的演化方式, 其结果与材料破坏试验结果具有相同的物理图像。新的模型即可以模拟材料的弹性变形, 又可以给出材料的破坏, 同时还保留了离散元描述非连续特性的功能。关于新模型在颗粒的空间布局以及应用方面还需要更深入的工作。

参考文献

- [1] Jing L and Hudson J. A. Numerical methods in rock mechanics. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2002, **39** (4): 409~427
- [2] Bontempi F and Casciati F "Scale Effect for Concrete Specimens: A numerical model Numerical modelling of concrete elements of increasing size" PROBAMAT - 21st century Probabilities and materials 347~366, 1998 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands
- [3] Belytschko T and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal re-meshing. *Int J Numer Methods Eng* **45** (1999), pp. 601~620
- [4] Belytschko T, N. Mo? s, S. Usui and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int J Numer Methods Eng* **50** (2001), pp. 993~1013
- [5] 刘晓宇, 梁乃刚, 李敏. 三维链网模型及其参数标定. *中国科学*, 2002, **10**: 887~894
- [6] 单衍景, 崔俊芝. 基于结构面统计模型和应力场的岩体稳定性分析的期望滑移路径方法. *岩土力学*, 2002, **21** (2): 151~157
- [7] Dowding C. H. T. B. Belytschko, & H. J. Yen. Dynamic computational Analysis of Opening in Joint Rock. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Dec. 1983, **109** (12): 1 551~1 556
- [8] Dowding C. H., Gilbert, 3-D Small displacement rigid block model. In *proceedings 7th international congress on rock mechanics Aachen Germany 1991*, 729~732
- [9] 李世海, 高波, 燕琳. 三峡永久船闸高边坡开挖三维离散元数值模拟. *岩土力学*, 2002, **23** (3): 272~277
- [10] 李世海, 董大鹏, 燕琳. 含节理岩块单轴受压试验三维离散元数值模拟. *岩土力学*, 2003, **24** (4)
- [11] G. Shi and R. E. Goodman. Two dimensional discontinuous deformation analysis. *Int J Numer Anal Methods Geomech* **9** (1985), 541~556