

# 动载下桶基周围影响区范围和到达稳态的时间估算

鲁晓兵, 王 丽, 张旭辉, 王淑云  
(中国科学院 力学研究所, 北京 100081)

**摘要:** 为了获得桶形基础实验的模型律, 进行了量纲分析, 获得了桶形基础实验的 3 个主要相似参数, 由此分析了渗流相似模拟的简化方法。同时通过多尺度渐进展开方法, 分析了桶基周围的极限影响区范围和到达稳态的特征时间尺度, 为实验和数值分析提供了依据。

**关键词:** 桶形基础; 影响区; 稳态时间

## 1 前 言

桶形基础是近年来发展起来的新型平台基础, 由于多种优越性而受到广泛的重视。但是关于其承载力特性, 尤其是动载下的承载力特性仍然不清楚<sup>[1-3]</sup>。动冰载是渤海地区海洋平台设计的控制载荷, 波浪载荷是南海地区的控制载荷, 在动冰载或波浪载荷作用下, 冰或波浪、结构与桶形基础之间会产生复杂的动力学耦合作用。为了能给今后在渤海地区或南海地区的桶形基础平台设计打下基础和提供基础参数, 就需要在这方面进行深入的研究。需要研究的具体内容主要包括动载下桶形承载力与变形、桶周土体液化条件及影响范围, 以及稳定性评价分析方法等。

该问题涉及到复杂的流固土耦合效应, 国外在这方面的研究很少, 且因保密原因, 我们难以得到具体数据, 国内没有这方面的研究。鉴于此, 我们首先必须开展的工作是进行大量的实验以获得大量基础数据。现场原型实验是最能反映实际的, 但是由于花费巨大且实验周期长, 实验条件也难以控制, 因此一般不采用。小尺度模型实验能较快实施, 花费也小, 但是由于不能反映现场的实际应力水平, 即不能满足重力相似, 而土体的一个重要特性就是土性是依赖于应力水平的, 在本问题缺乏一手资料, 对基本特性完全不了解的情况下, 采用该类实验也是不合适的。离心机实验由于使模型处于高加速度场中, 能满足重力相似, 或者说, 能以小比尺模型模拟大比尺实际结构的效应, 因此离心机实验是模拟本问题的合适的选择。但是离心机实验中也存在较难处理的问题, 如存在渗流和惯性两个不同的时间比尺, 即渗流耗散特征时间是  $1/N^2$ , 而惯性作用时间是  $1/N$ , 而渗流效应和惯性效应在本问题中同等重要, 因此如何解决这两个时间尺度冲突就成了本问题离心机模拟的关键。因此分析桶基在动载下的模型律, 获得实验的控制参数, 以及主要的特征值范围是必须的。下面我们将通过量纲分析获得实验的主要相似参数, 以及桶基周围的极限影响区范围和到达稳态的特征时间尺度。

## 2 控制相似参数分析

动量守恒方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = (1-\varepsilon)\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \varepsilon\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon\mu}{K}(v_i - \frac{\partial u_i}{\partial t}) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

质量守恒方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon\rho}{\partial t} + \varepsilon\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial(1-\varepsilon)\rho_s}{\partial t} + (1-\varepsilon)\rho_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

本构关系

$$\sigma_{ij} = G\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij} \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (3)$$

其中： $\rho$  为孔隙流体密度； $s$  为固相密度； $u_i$  为固相位移； $v_i$  为孔隙流体速度； $p$  为孔压； $\sigma_{ij}$  为有效应力； $g$  为重力加速度； $G$  为剪切模量； $\nu$  为泊松比。

引入如下的流函数和势函数：

$$\begin{cases} \bar{u} = \text{grad}\varphi_s + \text{curl}\bar{\psi}_s \\ \bar{v} = \text{grad}\varphi + \text{curl}\bar{\psi} \\ \text{div}\bar{\psi}_s = 0 \\ \text{div}\bar{\psi} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)带入式(1)至式(3), 得到

$$\begin{aligned} \frac{2G(1-\nu)}{\rho_s(1-2\nu)} \nabla^2 \varphi_s = \\ \frac{\mu\omega}{\rho_s K} \left[ \frac{\partial \varphi_s}{\partial \tau} + \frac{\omega \rho_s K}{\mu} (1-\varepsilon) \left( 1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\rho}{\rho_s} \right) \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial \tau^2} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

和

$$\frac{G}{\rho_s} \nabla^2 \bar{\psi}_s = \omega^2 \left( 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon \rho}{\rho_s} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s}{\partial t^2} \quad (6)$$

其中  $\tau = \omega t$ ,  $\omega$  为载荷频率。

在本问题中,  $\eta = \omega \rho_s K / \mu$  是一个小参数, 应用多尺度渐进展开方法, 即设

$$\begin{cases} \varphi_s = \varphi_s^0(x_i, \tau_1, \tau_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \varphi_s^{(n)}(x_i, \tau_1, \tau_2) \\ \bar{\psi}_s = \bar{\psi}_s^0(x_i, \tau_1, \tau_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \bar{\psi}_s^{(n)}(x_i, \tau_1, \tau_2) \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\tau_1 = \tau$ ,  $\tau_2 = \eta\tau$ 。将上面两式代入式(5)和式(6), 可以得到：

$$D \nabla^2 \varphi_s^{(1)} = \frac{\partial \varphi_s^{(1)}}{\partial \tau} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D \nabla^2 \varphi_s^{(n)} = \frac{\partial \varphi_s^{(n)}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial \varphi_s^{(n-1)}}{\partial \tau_2} \\ + (1-\varepsilon) \left( 1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\rho}{\rho_s} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi_s^{(n-1)}}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_s^{(n-2)}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \frac{\partial^2 \varphi_s^{(n-3)}}{\partial \tau_2^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda \nabla^2 \bar{\psi}_s^{(0)} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(0)}}{\partial \tau_1^2} \quad (10)$$

$$\lambda \nabla^2 \bar{\psi}_s^{(1)} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(1)}}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(0)}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \quad (11)$$

$$\lambda \nabla^2 \bar{\psi}_s^{(n)} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(n)}}{\partial \tau_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(n-1)}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}_s^{(n-2)}}{\partial \tau_2^2} \quad (12)$$

其中  $D = \frac{2GK(1-\nu)}{\mu\omega(1-2\nu)}$ ,  $\varphi_s^{(0)} = 0$ ,  $\lambda = \frac{G}{\omega^2[(1-\varepsilon)\rho_s + \varepsilon\rho]}$ 。

可以看出,  $\psi_s^{(0)}$  是高频分量(惯性响应), 是一个剪切波动过程, 即惯性响应是一个快过程, 介质中对应的只有剪切波传播, 反映外载荷在介质中的传播。 $\psi_s^{(1)}$  和  $\varphi_s^{(1)}$  是低频分量(渗流固结), 是一个慢的扩散过程, 反映介质的渗流和变形。同时可以看出, 在满足几何相似且不换材料时, 三个无量纲参数需要满

足： $\frac{\rho g L}{\sigma}$ ， $\frac{R}{\rho \omega^2 L^2}$ 和 $\frac{RK}{\mu \omega L^2}$ ，其中  $R$  代表系统刚度，在离心机实验中，第一个参数自然满足，由前面的讨论可知，第二个参数只影响一阶近似解，因此如果只要求满足一阶近似，则只需满足第二个无量纲参数，第三个参数只影响渗流时间，起次要作用。

### 3 动载下影响区和达到稳态的时间

其中  $\Delta$  为边界上的特征位移， $T$  为特征时间， $L$  为所考虑问题的特征长度，这样，就有

$$\frac{2G(1-\nu)}{\rho_s(1-2\nu)} \frac{T^2}{L^2} \frac{\rho_s K}{\mu T} \nabla^2 \Phi_s = \frac{\rho_s K}{\mu T} (1-\varepsilon) \left(1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\rho}{\rho_s}\right) \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial \tau} \tag{13}$$

这样，无量纲波速约为：

$$c = (a/b)^{0.5}, \quad a = \frac{2G(1-\nu)}{\rho_s(1-2\nu)} \frac{T^2}{L^2} \frac{\rho_s K}{\mu T}, \quad b = \frac{\rho_s K}{\mu T} \left(1 - \varepsilon\right) \left(1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\rho}{\rho_s}\right)$$

影响区范围为：

$$\delta = \frac{c}{\omega} \tag{14}$$

图 1 中实线为根据该式计算的理论值（根据三轴实验和渗透实验，土体的参数为  $E=8\text{MPa}$ ， $K=2 \times 10^{-9} \text{m}^3/\text{s}/\text{kg}$ ， $\omega=1.26 \sim 7.85 \text{s}^{-1}$ ），点为实验值。土体表面变形从桶壁由近到远逐渐变小。可以看到，二者是比较接近的。

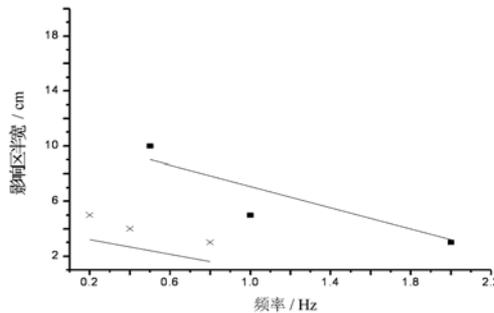


图 1 动载下影响区宽度的理

下面给出求解特征时间的过程，设  $L$  为特征长度， $\mu$  为水的黏性系数， $k$  为渗透率， $u$  为特征位移，则孔压  $p$ 、有效应力  $\sigma_e$ 、惯性力  $\sigma_d$  分别为： $p = \frac{\mu L}{k} \dot{u}$ ， $\sigma_e = E \frac{u}{L}$ ， $\sigma_d = \frac{\rho L}{2} \ddot{u}$ ， $F(t)$  为外力，这样，力平衡方程为：

$$\frac{\rho L}{2} \ddot{u} + \frac{\mu L}{k} \dot{u} + E \frac{u}{L} = F(t) \tag{15}$$

或者

$$m \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F(t) \tag{16}$$

其中

$$m = \frac{\rho L}{2}; \quad C = \frac{\mu L}{k}; \quad K = \frac{E}{L}$$

求得  $F(t) = 0$  时该方程的解的频率为：

$$m \omega_0^2 - i C \omega_0 - K = 0 \tag{17}$$

$$\omega_0 = \frac{i C \pm \sqrt{-C^2 + 4 m K}}{2 m} = i \frac{\mu}{\rho k} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \rho E \frac{k^2}{\mu^2 L^2}}\right) \tag{18}$$

对于足够小的  $2 \rho E \frac{k^2}{\mu^2 L^2}$ ，有

$$\omega_{01} = i \frac{2\mu}{\rho k}; \quad \omega_{02} = iE \frac{k}{\mu L^2} \quad (19)$$

因此达到稳态的特征时间应为： $\frac{\mu L^2}{Ek}$ 。根据该式及实验条件，估算离心实验时达到的稳态时间为：3h 左右，其中  $k = 5 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ ， $\mu = 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$ ， $E = 2 \text{ MPa}$ ， $L = 0.05 \text{ m}$ ，这与实验是接近的<sup>[6]</sup>。

#### 4 结 语

首先通过量纲分析获得了桶形基础实验的主要相似参数，分析了渗流相似模拟的简化方法；然后通过多尺度渐进展开方法，分析了桶基周围的极限影响区范围和到达稳态的特征时间尺度。

致谢：本文得到了中科院、中海油联合重大项目“海洋石油开发若干重大科学技术问题研究”（KJCX2-SW-L03-01）的资助。

#### 参考文献：

- 1 鲁晓兵，张金来．海洋平台桶型基础的研究与进展．力学进展，2003，33(1)：27 - 40．
- 2 Andersen K H, Jostad H P. Foundation design of skirted foundations and anchors in clay. OTC 10824, Proc. Offshore Tech. Conf., Houston, Texas, 1999 : 1-10.
- 3 Byrne B W, Houlsby G T. Experimental investigations of the responses of suction caissons to transient combined loading. ASCE J. Geotech. And Geoenviron. Engrg., 2004 , 130(3) : 240-253.
- 4 Taylor, R N. Geotechnical centrifuge technology. Blackie Academic & Professional, London,. 1995.
- 5 Lu X B, Liu Cheng, Wang S Y. On the bearing capacity of bucket foundations in saturated sands. Int. J. Offshore Polar Engrg.,2006,1 : 300 - 304.
- 6 Lu Xiaobing , Zhang Jianhong , Shuyun Wang et al. Experimental study of the pore pressure and deformation of suction bucket foundations under horizontal dynamic loading. Chinese Ocean Engrg. 2006,1 : 6712 - 680.