先进复合材料层合板壳的自由振动分析

马邦安* 何积范+

*(中国科学院力学研究所，北京 100080)

+(清华大学航天航空学院工程力学系，北京 100084)

摘要: 采用一个分层的剪切变形理论分析先进复合材料层合板壳的自由振动，假定层合板壳各层横向剪切应变彼此线性相关，从而未知函数的个数与一阶剪切变形理论相同，但控制微分方程组的阶数为十二阶，且不含剪切修正因子。文中给出了若干层合板壳的自由振动分析，数值结果与三维精确解、各种剪切变形理论解及经典层合理论解进行了比较。

关键词: 层板，层壳，剪切变形，自由振动

1 引言

基于克希霍夫－勒夫假设的经典层合理论是层合板壳常用的理论。然而，在分析由先进复合材料制成的中厚层合板壳自由振动时，必须考虑横向剪切效应。层合板壳的一阶剪切变形理论[1,2]已被广泛采用，它比经典层合理论明显提高了计算固有频率的精度。但它不能反映层合板壳变形时的断面翘曲现象，因此对板壳面内 (或切向)位移与应力计算的精度改进很少，而且在它的基本方程中含有的剪切修正因子的数值很难合理地确定。为此在文献中提出过多种改进的方案，其中包括假设面内 (或切向)位移沿板厚呈非线性变化的高阶剪切形理论[3~5]以及呈分层线性变化的分层剪切变形理论[6,7]。对于常用的多层板壳，只有后者才能较好地反映法线的曲折变形模式，然而分层理论中的未知函数个数随层数增加而增加，计算工作量太大。文献[8]曾提出，在分层理论中如要求在各层交界面上横向剪应力保持连续，就可以建立各层法线转角间的联系，从而减少未知函数个数。然而上述要求会导致横向剪应力沿板厚呈常量，以致法线的折线形状与真实情况相差较大，降低了计算精度。后来本文作者提出了另一种简化的分层剪切变形理论[9]，仍假定层合板壳的面内(或切向)位移呈分层线性变化，但考虑到板壳的横向剪应力沿厚度连续变化，假定各层横向剪应变之间彼此线性相关，相关系数待定。用能量原理可以导出基本微分方程组及用以确定相关系数值的线性代数方程组。无论层数多少，微分方程组恒为十二阶。文献[10,11]中用它计算层合板壳的静力变形与应力，均得到较好的精度。本文给出层合板壳的自由振动分析[12,13]，算例结果与三维精确解、各种剪切变形理论及经典层合理论解的结果进行了比较。

2 位移模式与基本方程

研究一块由 N_1+N_2+1 层先进复合材料单层组成的等厚层板，在层板几何中面及法线方向建立一组笛卡儿坐标系。各单层的厚度及其中面的法向 (z 向)坐标值分别为 t_i 及 z_i ($i=-N_2,\cdots,0,\cdots,N_1$)，其中 $-t_0/2<z_0\le t_0/2$，即层板几何中面在第 0 层内。假设层板自由振

动变形后，第 i 层各点位移为

$$
\begin{aligned}
u^{(i)}(x,y,z) &= u_m^{(i)}(x,y) + (z - z_i)\psi_x^{(i)}(x,y), \\
v^{(i)}(x,y,z) &= v_m^{(i)}(x,y) + (z - z_i)\psi_y^{(i)}(x,y), \\
w^{(i)}(x,y,z) &= W(x,y),
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 $u_m^{(i)}, v_m^{(i)}$ 是第 i 层中面各点 (x,y) 的面内位移，$\psi_x^{(i)}$，$\psi_y^{(i)}$ 是第 i 层中面法线的转角，W 是横向位移。由(1)式可求得第 i 层中的横向剪应变为

$$
\gamma_{zx}^{(i)} = \psi_x^{(i)} + \partial W / \partial x\,, \quad \gamma_{yz}^{(i)} = \psi_y^{(i)} + \partial W / \partial y. \tag{2}
$$

由于横向剪应力沿板厚连续变化，故假定它们与第0层的横向剪应变间线性相关，表示为

$$
\gamma_{zx}^{(i)} = \lambda_{11}^{(i)}\gamma_{zx}^{(0)} + \lambda_{12}^{(i)}\gamma_{yz}^{(0)}\,, \quad \gamma_{yz}^{(i)} = \lambda_{21}^{(i)}\gamma_{zx}^{(0)} + \lambda_{22}^{(i)}\gamma_{yz}^{(0)}\,, \tag{3}
$$

其中 $\gamma_{zx}^{(0)}$ 与 $\gamma_{yz}^{(0)}$ 表示第 0 层横向剪应变，$\lambda_{11}^{(i)}$ 等是待定常数。此外，各层面内位移在层间交界面上应保持连续，这样就可以将各层面内位移相互联系起来。定义 $U(x,y)$ 与 $V(x,y)$ 是层板几何中面各点的面内位移，则层板中各点的面内位移均可用 $U,V,W,\psi_x^{(0)}$ 及 $\psi_y^{(0)}$ 表示为

$$
\begin{aligned}
u^{(i)}(x,y,z) = {} & U(x,y) + [z_0 + s(i)t_{11}^{(i)}]\psi_x^{(0)}(x,y) + s(i)t_{12}^{(i)}\psi_y^{(0)}(x,y) \\
& - [z_i - z_0 - s(i)t_{11}^{(i)}]\partial W/\partial x + s(i)t_{12}^{(i)}\partial W/\partial y + (z - z_i)[\lambda_{11}^{(i)}\psi_x^{(0)}(x,y) \\
& + \lambda_{12}^{(i)}\psi_y^{(0)}(x,y) - (1 - \lambda_{11}^{(i)})\partial W/\partial x + \lambda_{12}^{(i)}\partial W/\partial y], \\
v^{(i)}(x,y,z) = {} & V(x,y) + [z_0 + s(i)t_{22}^{(i)}]\psi_y^{(0)}(x,y) + s(i)t_{21}^{(i)}\psi_x^{(0)}(x,y) \\
& - [z_i - z_0 - s(i)t_{22}^{(i)}]\partial W/\partial y + s(i)t_{21}^{(i)}\partial W/\partial x + (z - z_i)[\lambda_{22}^{(i)}\psi_y^{(0)}(x,y) \\
& + \lambda_{21}^{(i)}\psi_x^{(0)}(x,y) - (1 - \lambda_{22}^{(i)})\partial W/\partial y + \lambda_{21}^{(i)}\partial W/\partial x],
\end{aligned} \tag{4}
$$

其中

$$
t_{rs}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2}\delta_{rs}t_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}\lambda_{rs}^{(k)}t_k + \dfrac{1}{2}\lambda_{rs}^{(i)}t_i & i > 0 \\ \dfrac{1}{2}\delta_{rs}t_0 + \displaystyle\sum_{k=i+1}^{-1}\lambda_{rs}^{(k)}t_k + \dfrac{1}{2}\lambda_{rs}^{(i)}t_i & i < 0 \end{Bmatrix} \tag{5}
$$

$$
\delta_{rs} = \begin{Bmatrix} 1, & r = s \\ 0 & r \neq s \end{Bmatrix}, \qquad rs = 11,22,12,21, \tag{6}
$$

$$
s(i) = \begin{Bmatrix} 1, & i > 0 \\ 0, & i = 0 \\ -1, & i < 0 \end{Bmatrix}, \tag{7}
$$

在方程(5)式中，当 $i = 1$ 或 -1 时，则其中求和式消失。

定义：

$$
\begin{aligned}
&\in_x = \partial U/\partial x\,, \quad \in_y = \partial V/\partial y\,, \quad \gamma_{xy} = \partial U/\partial y + \partial V/\partial x\,, \\
&\kappa_x' = \partial\psi_x^{(0)}/\partial x\,, \quad \kappa_y' = \partial\psi_y^{(0)}/\partial y\,, \quad \kappa_{xy}' = \partial\psi_y^{(0)}/\partial x\,, \quad \kappa_{yx}' = \partial\psi_x^{(0)}/\partial y\,, \\
&\kappa_x'' = -\partial^2 W/\partial x^2, \quad \kappa_y'' = -\partial^2 W/\partial y^2, \quad \kappa_{xy}'' = \kappa_{yx}'' = -\partial^2 W/\partial x\partial y.
\end{aligned} \tag{8}
$$

则层板中面单位面积的应变能密度可表示为

$$E=\frac{1}{2}[N_x\in_x+N_y\in_y+N_{xy}\gamma_{xy}+M'_x\kappa'_x+M'_y\kappa'_y+M'_{xy}\kappa'_{xy}+M'_{yx}\kappa'_{yx}+M''_x\kappa''_x+M''_y\kappa''_y+M''_{xy}(2\kappa''_{xy})+Q'_x\gamma^{(0)}_{zx}+Q'_y\gamma^{(0)}_{yz}]. \tag{9}$$

此处$N_x,N_y,\cdots,Q'_y$是内力或广义内力。再定义下述列阵

$$\{N\}=[N_x\quad N_y\quad N_{xy}]^{\mathrm T},\quad \{M'\}=[M'_x\quad M'_y\quad M'_{xy}\quad M'_{yx}]^{\mathrm T},$$
$$\{M''\}=[M''_x\quad M''_y\quad M''_{xy}]^{\mathrm T},\ \{Q'\}=[Q'_x\quad Q'_y]^{\mathrm T},\ \{\in\}=[\in_x\quad \in_y\quad \gamma_{xy}]^{\mathrm T}, \tag{10}$$
$$\{\kappa'\}=[\kappa'_x\quad \kappa'_y\quad \kappa'_{xy}\quad \kappa'_{yx}]^{\mathrm T},\{\kappa''\}=[\kappa''_x\quad \kappa''_y\quad 2\kappa''_{xy}]^{\mathrm T},\ \{\gamma\}=[\gamma^{(0)}_{zx}\quad \gamma^{(0)}_{yz}]^{\mathrm T},$$

则可建立下述内力一变形关系式

$$\begin{bmatrix}\{N\}\\ \{M'\}\\ \{M''\}\\ \{Q'\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[A] & [B'] & [B''] & [0]\\ [B']^T & [D'] & [D_c] & [0]\\ [B'']^T & [D_c]^T & [D''] & [0]\\ [0] & [0] & [0] & [G]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\{\in\}\\ \{\kappa'\}\\ \{\kappa''\}\\ \{\gamma\}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中除零子矩阵外，其他子矩阵及其元素的表达式可参见文献[12]中的附录A。由公式(4)我们还可求得层板自由振动时的动能密度表达式。按位能驻值原理[14]可导出层板自由振动的微分方程组为

$$\partial N_x/\partial x+\partial N_{xy}/\partial y+\omega^2(M_{11}U+M_{13}W+M_{14}\psi^{(0)}_x+M_{15}\psi^{(0)}_y)=0,$$
$$\partial N_{xy}/\partial x+\partial N_y/\partial y+\omega^2(M_{22}V+M_{23}W+M_{24}\psi^{(0)}_x+M_{25}\psi^{(0)}_y)=0,$$
$$-\partial(Q'_x+Q''_x)/\partial x-\partial(Q'_y+Q''_y)/\partial y+\omega^2(M_{13}U+M_{23}V+M_{33}W+M_{34}\psi^{(0)}_x+M_{35}\psi^{(0)}_y)=0,$$
$$\partial M'_x/\partial x+\partial M'_{yx}/\partial y-Q'_x+\omega^2(M_{14}U+M_{24}V+M_{34}W+M_{44}\psi^{(0)}_x+M_{45}\psi^{(0)}_y)=0,$$
$$\partial M'_{xy}/\partial x+\partial M'_y/\partial y-Q'_y+\omega^2(M_{15}U+M_{25}V+M_{35}W+M_{45}\psi^{(0)}_x+M_{55}\psi^{(0)}_y)=0, \tag{12}$$

其中

$$Q''_x=\partial M''_x/\partial x+\partial M''_{xy}/\partial y,\qquad Q''_y=\partial M''_{xy}/\partial x+\partial M''_y/\partial y, \tag{13}$$

(12)式中的ω是固有圆频率，M_{11}等是质量系数及运算子，其表达式亦可参见文献[12]附录A。代入内力一变形关系式(11)后，方程组(12)可用层板自由振动时的位移振幅U,V,W及转角$\psi^{(0)}_x,\psi^{(0)}_y$振幅表示，它是一组十二阶的偏微分方程组。对于对称层板自由弯曲振动，则方程组降阶为W及$\psi^{(0)}_x,\psi^{(0)}_y$的八阶方程组。与(12)式相应的齐次边界条件的形式为

$$N_n=0\ \text{或}\ U_n=0,\quad N_{ns}=0\ \text{或}\ U_s=0,$$
$$Q'_n+Q''_n+\partial M''_{ns}/\partial s-\omega^2[(R_{11}-R)U+R_{21}V+(I+I_{1111}+I_{2121}-2I_{11})\partial W/\partial x$$
$$+(I_{1112}+I_{2221}-I_{12}-I_{21})\partial W/\partial y+(I_{1111}+I_{2121}-I_{11})\psi^{(0)}_x$$
$$+(I_{1112}+I_{2221}-I_{12})\psi^{(0)}_y]\cos(n,x)-\omega^2[R_{12}U+(R_{22}-R)V$$
$$+(I_{1112}+I_{2221}-I_{12}-I_{21})\partial W/\partial x+(I+I_{2222}+I_{1212}-2I_{22})\partial W/\partial y$$
$$+(I_{1112}+I_{2221}-I_{21})\psi^{(0)}_x+(I_{2222}+I_{1212}-I_{22})\psi^{(0)}_y]\cos(n,y)=0,$$
$$\text{或}\ W=0,\ M'_n=0\ \text{或}\ \psi^{(0)}_n=0,\ M'_{ns}=0\ \text{或}\ \psi^{(0)}_s=0,\ M''_n=0\ \text{或}\ \partial W/\partial n=0 \tag{14}$$

其中R及I各系数均与质量有关。此外，在层板边界的角点处的角点条件为

$$M''_{ns}(s+0)-M''_{ns}(s-0)=0\qquad \text{或}\qquad W=0. \tag{15}$$

由位能驻值原理还可求得对于 $i>0$ 或 $i<0$ 的相关系数 $\lambda_{11}^{(i)}$ 等所分别必须满足的两组线性代数方程组，它们的系数项及自由项均由 ω^2 及一些面积分值表示，其中被积函数是(8)式表示的各变形分量及层板几何与物理特性组成的表达式，详见文献[12]附录 B。微分方程组(12)式与这两组求解 $\lambda_{11}^{(i)}$ 等的两组代数方程组通过彼此的系数相互耦合，我们可以迭代求解。

层壳的位移模式与基本方程与层板情况相似，限于篇幅，此处不再给出，请参见文献[13]。用上述层合板壳的位移模式分析自由振动时，既考虑了横向剪切效应，也考虑了面内 (或切向) 的质量惯性效应。对于跨厚比值较小的层板及层合扁壳，这两种效应都比较显著。

3 算例

下面分别给出几个周边简支的正交层合板壳自由振动解析解的计算结果。

例一 九层对称及十层反对称先进复合材料正交方形层板的自由振动。铺层分别是[0°/90°/0°…0°/90°/0°]及[0°/90°]$_5$。两层板中 0°层及 90°层的总厚度彼此相等，且相同方向铺层的各层等厚。各单层材料为 $G_{LT}/E_T=0.6$，$G_{TT}/E_T=0.5$ 及 $\nu_{LT}=\nu_{TT}=0.25$，而 E_L/E_T 值在 10—40 间。下标 L 及 T 分别指纤维方向及其垂直方向。板厚与板宽比 $h/L=0.2$。表 1 给出它们的无量纲基频 $\lambda=10\omega(\rho h^2/E_T)^{1/2}$ 值。ρ 是质量密度。文[16]中一阶剪切变形理论的剪切修正因子值取为 5/6(下同)。表 1 中列出的本文与一阶剪切变形理论求得的基频 λ 值接近，至于在振动时的模态面内位移、应力及横向剪应力沿板厚的分布，则用本文算得的结果与文[15]中精确解十分接近，而用一阶剪切变形理论的结果就有较大误差。文[12]的图 1-3 中给出了 $E_L/E_T=30$ 的十层板的上述分布曲线，可供参阅。

例二 四层等厚[0°/90°]$_S$ 及八层反对称[0°/90°]$_4$ 圆柱形扁壳，它们中面的平面投影为 $L\times L$ 方形，即扁壳中面环形弧长为 $L_s=L\phi/[2\sin(\phi/2)]$，$\phi$ 是张角。材性与例一相同，但 $E_L/E_T=40$ 不变。表 2 中对于 $h/L=0.2,0.3$ 及 $\phi=30°, 60°, 90°$的各种扁壳，给出了它们的无量纲基频 $\bar{\omega}=\omega h(\rho/\pi^2 G_{LT})^{1/2}$ 值。从表中可看出，用经典层合理论算得的 $\bar{\omega}$ 值过高，而用本文理论计算值与精确解很接近。

例三 四层等厚[0°/90°]$_S$ 的正交方形层板。厚宽比 $h/L=0.1$。材性为 $E_L/E_T=25$，$G_{LT}/E_T=0.5$，$G_{TT}/E_T=0.2$，$\nu_{LT}=\nu_{TT}=0.25$。另有一圆柱形扁壳及一球形扁壳，两者的投影形状与上述层板外形相重。球壳的几何特性为 $R/h=100$，而扁壳有 $R_1=R$，$R_2=\infty$。两壳的材性、铺层及厚度均与层板相同。表 3 中给出了用各种二维理论求得的上述板、壳的前三阶无量纲圆频率 $\bar{\omega}=\omega L^2(\rho/E_T)^{1/2}/h$ 值，表中 m 与 n 值分别是弯曲振型在 x 与 y 方向的半波数。从表 3 中可看出横向剪切效应对高阶频率值的影响比低阶更大，用本文理论算得的频率值最低。

例四 具有[0°/90°]$_S$ 铺层的多个完整的短圆柱壳，材性与例三中相同。它们中面半径及轴向长度分别用 R 及 L 表示。各壳 $L/h=10$，但 $R/L=5,10,20,50$ 及 100 各不相同。计算了它们的基频 $\bar{\omega}$ 值。($\bar{\omega}$ 定义同例三)。表 4 中给出了不同理论的计算结果。精确解 $\bar{\omega}$ 右上标数字表示基本振型的环向波数 n 值。当各种二维解计算基频所得的振型环向波数值与精确解不同时，则分别注出，否则就略去不注。对于本例各个短壳，相邻的几个环向波数 n 值对应于最低的几阶频率，这种现象对各种理论都存在。举例说，对于 $R/L=50$ 的层壳，用本文理论可算出 $n=12$ 时，$\bar{\omega}$=9.89632，而 $n=13$ 时则 $\bar{\omega}$=9.89629。因此与精确解不同，按本文理论算出的基频对应于 $n=13$，注明在表 4 中，而其他各种二维理论基频对应的环向波数 n 分别为 8,8 及 5，都注

在表 4 中。从表 4 中可看出本文算得的 n 及 $\bar{\omega}$ 值误差都最小。

表 1 正交方形层板的无量纲基频 $\lambda = 10\omega(\rho h^2/E_T)^{1/2}$ 值

层板类型	理论	E_L/E_T 10	20	30	40
九层对称层板	三维精确解[15]	3.4432	4.0547	4.4210	4.6679
	本文分层理论	3.4169	4.0310	4.4008	4.6510
	一阶剪切变形理论[16]	3.4169	4.0334	4.4058	4.6580
十层反对称层板	三维精确解[15]	3.4250	4.0337	4.4011	4.6498
	本文分层理论	3.3974	4.0075	4.3774	4.6285
	一阶剪切变形理论[16]	3.4053	4.0255	4.4023	4.6577

表 2 正交圆柱形扁壳的无量纲基频 $\bar{\omega} = \omega h(\rho/\pi^2 G_{LT})^{1/2}$ 值

$\frac{h}{L}$	ϕ	$[0°/90°]_s$ 三维精确解[17]	$[0°/90°]_s$ 本文分层理论	$[0°/90°]_s$ 经典层合理论	$[0°/90°]_4$ 三维精确解[17]	$[0°/90°]_4$ 本文分层理论	$[0°/90°]_4$ 经典层合理论
0.2	30°	0.174098	0.177001	0.300777	0.182559	0.184182	0.288075
	60°	0.170868	0.172980	0.287680	0.172616	0.174399	0.262097
	90°	0.168514	0.169729	0.271978	0.163481	0.164832	0.234160
0.3	30°	0.293392	0.299525	0.673544	0.308913	0.312650	0.639104
	60°	0.283798	0.288193	0.635520	0.289353	0.293315	0.570330
	90°	0.274143	0.276674	0.588725	0.269429	0.272700	0.496384

表 3 [0°/90°/90°/0°]层板及圆柱形、球形扁壳的前三阶无量纲圆频率 $\bar{\omega} = \omega L^2(\rho/E_T)^{1/2}/h$ 值

(m,n)	理论	层板	扁柱壳	扁球壳
(1,1)	本文分层理论	11.708	11.728	11.787
	高阶剪切变形理论[5]	11.735	11.749	—
	高阶剪切变形理论[4]	11.780	11.790	11.840
	分层剪切变形理论[18]	—	11.847	—
	一阶剪切变形理论	12.284	12.303	12.359
	经典层合理论	15.229	15.243	15.289
(1,2)	本文分层理论	22.070	22.109	22.131
	一阶剪切变形理论	22.399	22.437	22.459
	经典层合理论	27.948	27.978	27.996
(2,1)	本文分层理论	27.098	27.100	27.148
	一阶剪切变形理论	29.597	29.599	29.643
	经典层合理论	54.573	54.574	54.598

表 4 $[0°/90°]_s$ 各完整短圆柱壳的基频 $\bar{\omega}$ 值

$\frac{R}{L}$	三维精确解[19]	本文分层理论	分层理论解[18]	一阶剪切理论[18]	经典层合理论[18]
5	10.305^{7}	10.363	10.462	10.958	13.704
10	10.027^{11}	10.087	10.187	10.698	13.499^{9}
20	9.902^{15}	9.964	10.063^{14}	10.579^{14}	13.401^{12}
50	9.834^{12}	9.896^{13}	9.996^{8}	10.496^{8}	13.345^{5}
100	9.815^{1}	9.878	9.971^{2}	10.496^{2}	13.336^{2}

4 讨论

对于先进复合材料层合板壳进行静动力分析时，除厚度甚薄的以外，一般必须考虑横向剪切效应。在本文的方案中，考虑到横向剪应力沿厚度连续变化，假定板壳各层的横向剪应变之间线性相关，见(3)式。(3)式中的相关系数 $\lambda_{11}^{(i)}$ 等可视为全板(壳)的一个合理的平均值，使其尽量符合法线的翘曲状况，而其数值由能量原理确定。如果我们预先指定各层的 $\lambda_{11}^{(i)}=\lambda_{22}^{(i)}=1$ 及 $\lambda_{12}^{(i)}=\lambda_{21}^{(i)}=0$，则位移模式就与一阶剪切变形理论的模式相同。因此本文方案可视作一阶剪切变形理论的推广与改进。

在层合板壳自由振动时，相关系数 $\lambda_{11}^{(i)}$ 等数值对于不同的振动模态各不相同。算例中限于篇幅，没有给出各种情况下对应的相关系数值。由于对每一阶自由振动，本文方案都可提供一个精度较好的固有频率及模态位移、应力解，则可以认为对于不同阶自由振动之间，存在近似的正交条件。因而在计算层合板壳在外加载荷作用下的动力响应时，仍可采用通常的振型叠加法。计算结果不仅能提供振动时板壳横向振幅的近似状况，而且能求得精度较好的面内(切向)应力及横向剪应力幅值沿厚度的分布，后者在层合板壳的动力分析中也同样有很重要的意义。这是本文方案对一阶剪切变形理论很大的改进。

本文仅提供了一些正交层合板壳在简支边界条件下自由振动的算例结果。对于其他各种铺层及边界条件下的层合板壳的静动力分析，还有很多工作需要今后深入研究。对一些铺层及边界条件复杂的问题，通常都得不到解析解，只能用有限元方法求其近似解，相应的层板、层壳单元及算法都有待建立与探讨。

参考文献

1. Whitney JM, Pagano NJ. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J Appl Mech*, 1970, 37: 1031~1036
2. Dong SB, Tso FKW. On a laminated orthotropic shell theory including transverse shear deformation. *J Appl Mech*, 1972, 39: 1091~1097
3. Reddy JN. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech*, 1984, 51: 745~752
4. Reddy JN, Liu CF. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int J Eng Sci*, 1985, 23: 319~330
5. Touratier M. A refined theory of laminated shallow shells. *Int J Solids Struct*, 1992, 29: 1401~1415
6. Seide P. An improved approximate theory for the bending of laminated plates. In: Mechanics Today 5 (S.

Nemat-Nasser, editor) 1980. 451~466

7. Noor AK, Burton WS. Assessment of computational models for multilayered composite shells. *Appl Mech Rev*, 1990, 43: 67~96
8. Di Sciuva M. An improved shear-deformation theory for moderately thick multilayered anisotropic shells and plates. *J Appl Mech*, 1987, 54: 589~596
9. He JF. A refined shear deformation theory of laminated plates and shells. Proceedings of the 7-th Int. Conf on Composite Materials, 1989, 4: 180~182
10. He JF, Chou M, Zhang X. Bending analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory. *J Comp Struct*, 1993, 24: 125~138
11. He JF. Static analysis of laminated shells using a refined shear deformation theory. *J Reinforced Plast Comp*, 1995, 14: 652~674
12. He JF, Ma BA. Vibration analysis of laminated plates using a refined shear deformation theory. *J Sound Vibra*, 1994, 175: 577~591
13. Ma BA, He JF. Vibration analysis of laminated shells using a refined shear deformation theory. *J Reinforced Plast Comp*, 1998, 17: 1431~1449
14. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1st edition, 1968
15. Noor AK. Free vibrations of multilayered composite plates. *AIAA J*, 1973, 11: 1038~1039
16. Putcha NS, Reddy JN. Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory. *J Sound Vibra*, 1986, 104: 285~300
17. Ye JQ, Soldatos KP. Three-dimensional vibration of laminated cylinders and cylindrical panels with symmetric or antisymmetric cross-ply lay-up. *Comp Engng*, 1994, 4: 429~444
18. Di Sciuva M, Carrera E. Elastodynamic behavior of relatively thick, symmetrically laminated, anisotropic circular cylindrical shells. *J Appl Mech*, 1992, 59: 222~224
19. Timarci T, Soldatos KP. Comparative dynamic studies for symmetric cross-ply circular cylindrical shells on the basis of a unified shear deformable shell theory. *J Sound Vibra*, 1995, 187: 609~624