文章编号:1007-4708(2009)02-0180-08

扩展有限元方法计算多夹杂问题时圆形夹杂与四边形单元的几何关系

姚再兴*[1,2], 李世海[1], 刘晓宇[1]

(1. 中国科学院 力学研究所,北京 100190;2. 辽宁工程技术大学 力学与工程学院,阜新 123000)

摘　要:用扩展有限元法 XFEM(Extended Finite Element Method)解决夹杂问题时,夹杂与基质的界面把单元分成若干部分。求单元刚度矩阵时,需要分别在这各个部分求积分。找到便于程序编制的描述各积分区域几何形状的方法是亟待解决的问题。本文把各积分区域的形成过程看成是圆对四边形的多次切割。考虑切剩区域与圆的关系时,把不完整的边仍看作完整的边,把切剩区域看成是四边形或是切去一两条边的四边形。采用排列组合的方法,把它们与圆的所有位置关系列了出来。

关键词:扩展有限元;夹杂;切剩区域;四边形单元

中图分类号:O242.21;O341　　**文献标识码**:A

1　引　言

采用扩展有限元法[1,2]解决夹杂问题[3]时,单元的划分不需要考虑夹杂与基质之间的界面,这给计算带来了很大的方便。这样,夹杂的界面往往把同一单元分成若干部分。由于夹杂与基质的物理力学性质不同,在计算单元刚度矩阵的时候,就需要考虑单元内部夹杂和基质的界面,由此来确定四边形处于夹杂内部的部分和处于夹杂外部的基质部分,从而形成不同的积分区域。在平面问题中,四边形单元比矩形单元能更好地表达计算区域的不规则外边界,因此,扩展有限元法采用四边形单元要比矩形单元更加实用。在工程实践中,夹杂的形状是不规则的,把夹杂的形状抽象成圆形,会大大降低计算的难度,多数情况更能反映问题的本质。因此,圆形夹杂与四边形单元的位置关系是用扩展有限元法解决平面夹杂问题必需解决的问题。圆形夹杂与四边形单元位置关系的描述方法很多,本文提出的方法能方便地实现程序编制,为扩展有限元的工程应用作准备。由于这个工作琐碎而费时,所以整理出来以避免有同样需要的读者的重复劳动。

收稿日期:2007-01-18;**修改稿收到日期**:2008-05-05.

基金项目:国家"973"(2002CB412703);国家自然科学基金重点(504334020);国家自然科学基金(50504009,10472121);国家自然科学基金面上基金(50374042)资助项目.

作者简介:姚再兴*(1974-),男,博士,副教授(E-mail: yaozaixing@163.com);
李世海(1958-),男,博士,研究员;
刘晓宇(1973-),男,博士,副研究员.

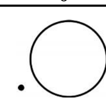
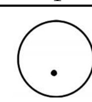
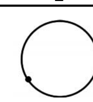
除特别指出,下文提到的圆即是夹杂,四边形即是凸的四边形单元,点是指四边形的顶点,它们同处于同一平面内。

2　点和边与圆的位置关系

点、边与圆的位置关系是描述四边形与圆位置关系的基础。点与圆的位置关系有三种:点在圆外,点在圆内及点在圆上,它们分别用代码 0、1、2 来表示,见表 1。

表 1　点与圆的位置关系

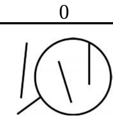
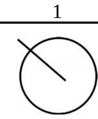
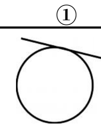
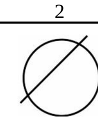
Tab. 1　Relation between vertex and circle

点的位置	圆外	圆内	圆上
代码	0	1	2
简图			

边与圆的位置关系有四种:相离、交于一点、切于一点、交于两点,它们分别用代码 0、1、①、2 来表示,见表 2。

表 2　边与圆的位置关系

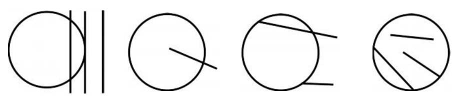
Tab. 2　Relation between edge and circle

边的位置	相 离	交于一点	切于一点	交于两点
代码	0	1	①	2
示意图				

两端点位置与边的位置关系见表 3,这是下文中把边型作为点型的子类型的依据。

表 3　端点位置与边的位置关系

Tab. 3　Relation between positions of endpoints and edge

点位置	00	01	02	11　12　22
边位置	0，①,2	1	0 ,1	0
示意图				

3　切剩区域的特点与分类

多个圆同时存在时,两两之间是相离的。四边形被一个圆分成若干区域,称为圆对四边形的一次切割。圆内的部分称为切除区域,圆外的部分称为切剩区域。四边形被多个圆切割,可看成是一系列圆先后对切剩区域的切割,初始切剩区域就是四边形本身。图 1 左边是五个圆与一个四边形的相对位置,右边是这个四边形经过五次切割后的切剩区域。

在切剩区域中,原四边形的边或是完整的,或是被切成若干段,或是被完全切除。没有被圆完全切除的边,称为留边;被圆完全切除的边称为去边。留边中,被圆切除的部分称为切除段,其余部分称为切剩段。有的留边没有被圆切割过,自身就是切剩段。相邻留边之间的四边形的顶点称为留点。切除边的端点和被圆切除的留点,称为切除点,其他留点称为切剩点。圆与四边形内部的交线称为切口弧段,切口弧段向区域内部凹陷。切剩区域是由切剩段与切口弧段首尾相连形成的封闭区域,如果被四边形内部的圆切割,则形成内部圆孔,如图 1 所示有一个内部圆孔。

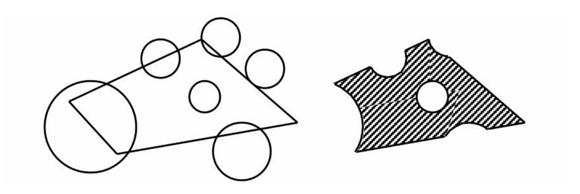


图 1　切剩区域的形成

Fig. 1　Formation of remained zone

圆与圆是相离的,所以圆与切口弧段也是相离的。圆与切剩段相切或相交,则只能与该切剩段所在的其他切剩段相离。因此,切剩区域被再次切割时,只考虑切剩区域中各留边和各留点与圆的位置就足够了,不必考虑切口弧段的位置和个数。因此,在下文的示意图中,没有画出留边上的切口弧段。图 1 中留边数是 3,留点数是 2。

留边与留点是划分切剩区域的依据。按留边条数,把切剩区域分成三大类,留边条数分别是 4、3、2,分别用代码 D、C、B 表示。每一大类按照留点列与圆的位置关系分成若干点型;每一点型按照留边与圆的位置关系分成若干边型。

4　留边数是 4 时的情况

留边数是 4 时,留点数一定也是 4。表 4 列出

表 4　4 留边点型边型代码表

Tab. 4　Codes of vertexes types and edges types for 4 remained edges

序号	点型代码	可能边型				序号	点型代码	可能边型			
1	0000	0 ① 2	0 ① 2	0 ① 2	0 ① 2	13	2210 0221 2102 1022	0	0	1	0 1
2	1000 0100 0010 0001	1	0 ① 2	0 ① 2	1	14	2020 0202	0 1	0 1	0 1	0 1
3	2000 0200 0020 0002	0 1	0 ① 2	0 ① 2	0 1	15	1120 1201 2011 0112	0	0	0 1	1
4	1100 0110 1001 0011	0	1	0 ① 2	1	16	2120 2021 1202 0212	0	0	0 1	0 1
5	2100 0210 0021 1002	0	1	0 ① 2	0 1	17	1220 2201 2012 0122	0	0	0 1	1
6	1200 0120 2001 0012	0	0 1	0 ① 2	1	18	2220 2202 2022 0222	0	0	0 1	0 1
7	2200 0220 2002 0022	0	0 1	0 ① 2	1	19	1111	0	0	0	0
8	1010 0101	1	1	1	1	20	2111 1211 1121 1112	0	0	0	0
9	2010 1020 0201 0102	0 1	1	1	0 1	21	2211 1221 2112 1122	0	0	0	0
10	1110 1101 1011 0111	0	0	1	1	22	2121 1212	0	0	0	0
11	2110 0211 1021 1102	0	0	1	0 1	23	2221 2212 2122 1222	0	0	0	0
12	1210 2101 0121 1012	0	0	1	1	24	2222	0	0	0	0

了留边数是 4 时的点型与可能边型。点型代码的各位数分别表示各留点与圆的位置关系。可能边型是根据各留边两端的留点的位置得出的各边与圆的可能位置关系。留点和留边都是逆时针排序。1 号留点与 2 号留点中间的留边是 1 号留边,以此类推。这一约定下文相同。以序号为 7 的类型说明表 4 含意。4 种点型代码都可以归为该类点型,其中第一行的点型代码为标准点型,其他 3 种可通过选择合适的开始点化为标准点型。该标准点型的含意是,前两个留点在圆上,后两个留点在圆外。1 号留边与圆没有交点和切点,代码是 0;2 号留边和圆可能有一个交点也可能是相离的,代码是 0 和 1;3 号留边和圆有相离、相切及相交两点三种可能;4 号留边和圆一定有一个交点。

表 5 列出的是留边数是 4 时,切剩区域与圆的位置关系。切剩区域在忽略了切口弧段时,可以看作是四边形。

表 5 4 留边点型边型示意图

Tab.5 Sketch maps of vertexes types and edges types for 4 remained edges

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
点型 1D0000					
1	0000		12	①2 ①0 2 ①0 ① 0 ①2 ① ①0 ①2	
			13	22 ①0 022 ① 2 ①02 ①022	
2	①000 0 ①00 00 ①0 000 ①		14	2020 0202	
			15	①①20 ①20 ① 20 ①① 0 ①①2	
3	2000 0200 0020 0002		16	2 ①20 202 ① ①202 02 ①2	
4	①①00 0 ①①0 ①00 ① 00 ①①		17	①220 220 ① 20 ①2 0 ①22	
5	2 ①00 02 ①0 002 ① ①002		18	2220 2202 2022 0222	
6	①200 0 ①20 200 ① 00 ①2		19	①①①①	

(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
7	2200 0220 2002 0022		20	2 ①①① ①2 ①① ①①2 ① ①①①2	
8	①0 ①0 0 ①0 ①		21	22 ①① ①22 ① 2 ①①2 ①①22	
9	20 ①0 ①020 020 ① 0 ①02		22	2 ①2 ① ①2 ①2	
10	①①①0 ①①0 ① ①0 ①① 0 ①①①		23	222 ① 22 ①2 2 ①22 ①222	
11	2 ①①0 02 ①① ①02 ① ①①02		24	2222	
点型 2D1000					
1	1001		6	1 ①21	
2	10 ①1		7	1201	
3	1021		8	12 ①1	
4	1 ①01		9	1221	
5	1 ①①1				
点型 3D2000					
1	0000		19	1000	
2	0001		20	1001	
3	00 ①0	无	21	10 ①0	
4	00 ①1		22	10 ①1	
5	0020	无	23	1020	

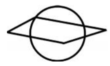
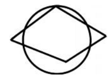
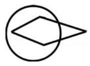
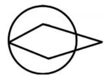
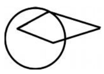
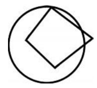
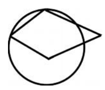
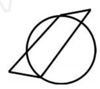
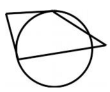
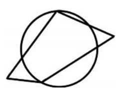
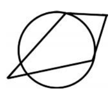
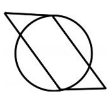
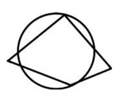
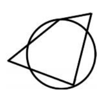
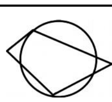
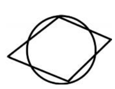
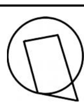
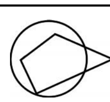
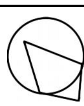
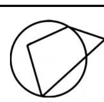
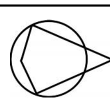
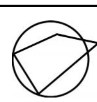
(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
6	0021		24	1021	
7	0 ①00	无	25	1 ①00	
8	0 ①01		26	1 ①01	
9	0 ①①0	无	27	1 ①①0	
10	0 ①①1		28	1 ①①1	
11	0 ①20	无	29	1 ①20	
12	0 ①21		30	1 ①21	
13	0200	无	31	1200	
14	0201		32	1201	
15	02 ①0	无	33	12 ①0	
16	02 ①1		34	12 ①1	
17	0220	无	35	1220	
18	0221		36	1221	
点型 4D1100					
1	0101		3	0121	
2	01 ①1				

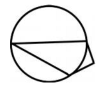
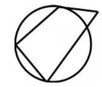
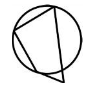
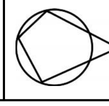
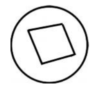
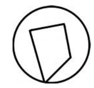
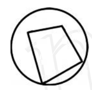
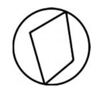
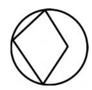
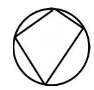
(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
点型 5D2100					
1	0100		4	01 ①1	
2	0101		5	0120	
3	01 ①0		6	0121	
点型 6D1200					
1	0001		4	0101	
2	00 ①1		5	01 ①1	
3	0021		6	0121	
点型 7D2200					
1	0000		7	0100	
2	0001		8	0101	
3	00 ①0		9	01 ①0	
4	00 ①1		10	01 ①1	
5	0020		11	0120	
6	0021		12	0121	
点型 8D1010					
1	1111				
点型 9D2010					
1	0110	无	3	1110	

(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
2	0111		4	1111	
点型 10D1110			**点型** 12D1210		
1	0011		1	0011	
点型 11D2110					
1	0010		2	0011	
点型 13D2210					
1	0010		2	0011	
点型 14D2020					
1	0000	无	9	1000	无
2	0001	无	10	1001	无
3	0010	无	11	1010	
4	0011		12	1011	
5	0100	无	13	1100	
6	0101		14	1101	
7	0110	无	15	1110	
8	0111		16	1111	
点型 15D1120					
1	0001		2	0011	
点型 16D2120					
1	0000		3	0010	
2	0001		4	0011	
点型 17D1220					
1	0001		2	0011	

(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
点型 18D2220					
1	0000		3	0010	
2	0001		4	0011	
点型 19D1111			**点型** 20D2111		
1	0000		1	0000	
点型 21D2211			**点型** 22D2121		
1	0000		1	0000	
点型 23D2221			**点型** 24D2222		
1	0000		1	0000	

因为不考虑凹四边形的情况,因此有的可能边型并不存在,在表中标为"无"。如果某个留点在圆周上(代码为 2),与它相邻的两个留点在圆外(代码为 0),这三个留点中间的留边同时与圆相离(代码为 0),则圆不可能在四边形的内侧或与四边形的其他边相交或相切。

5 留边数是 3 时的情况

留边数是 3 时,存在一条去边。切除去边留下的切口弧段一定在圆外。按逆时针方向,去边的下一条留边记作 1 号边,1 号边和 2 号边间的留点称为 1 号点,以此类推。表 6 列出留边数是 3 时的点型与可能边型。

表 6 3 留边点型边型代码表

Tab. 6 Codes of vertexes types and edges types for 3 remained edges

序号	代码	可能边型			序号	代码	可能边型		
1	00	0 ① 2	0 ① 2	0 ① 2	6	12	1	0	0 1
2	01	0 ① 2	1	1	7	20	0 1	0 1	0 ① 2
3	02	0 ① 2	0 1	0 1	8	21	0 1	0	1
4	10	1	1	0 ① 2	9	22	0 1	0	0 1
5	11	1	0	1					

表 7 列出了留边数是 3 时,圆与切割区域的位置关系示意图。

表 7　3 留边点型边型示意图

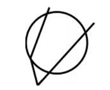
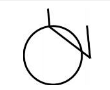
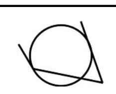
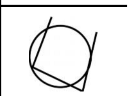
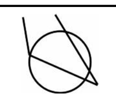
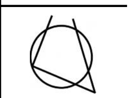
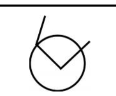
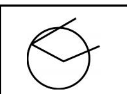
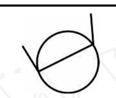
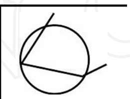
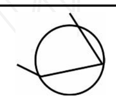
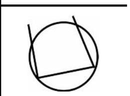
Tab. 7　Sketch maps of vertexes types and edges types for 3 remained edges

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
点型 1C00					
1	000		13	①①0	
			14	①①①	
2	00①		15	①①2	
			16	①20	
3	002		17	①2①	
4	0①0		18	①22	
			19	200	
5	0①①		20	20①	
6	0①2		21	202	
7	020		22	2①0	
8	02①		23	2①①	
9	022		24	2①2	
10	①00		25	220	
			26	22①	
11	①0①		27	222	

(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
12	①02				
点型 2C01					
1	011		3	211	
2	①11				
点型 3C02					
1	000		7	①10	
2	001		8	①11	
3	010		9	200	无
4	011		10	201	
5	①00	无	11	210	
6	①01		12	211	
点型 4C10					
1	110		3	112	
2	11①				
点型 5C11					
1	101				
点型 6C12					
1	100		2	101	
点型 7C20					
1	000		7	100	
2	00①	无	8	10①	

(续表)

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
3	002	无	9	102	
4	010		10	110	
5	01①		11	11①	
6	012		12	112	
点型 8C21					
1	001		2	101	
点型 9C22					
1	000		3	100	
2	001		4	101	

6 留边数是 2 时的情况

留边数是 2 时,分为邻留边和对留边两种情况。表 8 列出了邻留边情况的点型代码和可能边型代码。

表 8 邻留边点型边型代码

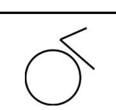
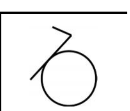
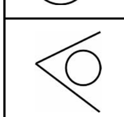
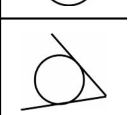
Tab. 8 Codes of vertexes types and edges types for adjacent remained edges

序号	代码	可能边型	
1	0	0 ① 2	0 ① 2
2	1	1	1
3	2	0 1	0 1

表 9 列出了邻留边时圆与切剩区域的位置关系示意图。

表 9 邻留边点型边型示意图

Tab. 9 Sketch maps of vertexes types and edges types for adjacent remained edges

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
点型 1B0					
1	00				
			5	①①	

(续表)

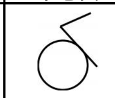
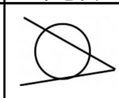
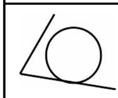
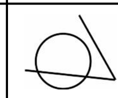
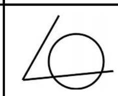
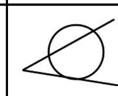
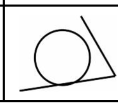
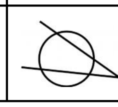
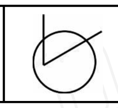
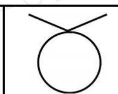
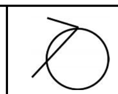
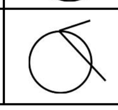
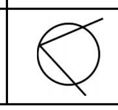
序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
2	0①		6	①2	
			7	20	
3	02		8	2①	
4	①0		9	22	
点型 2B1					
1	11				
点型 3B2					
1	00		3	10	
2	01		4	11	

表 10 列出了对留边情况下的点型代码和可能边型代码。

表 10 对留边点型边型代码

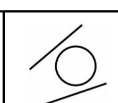
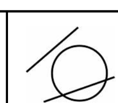
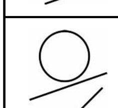
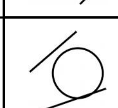
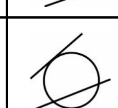
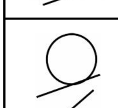
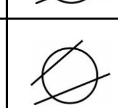
Tab. 10 Codes of vertexes types and edges types for opposite remained edges

序号	代码	可能边型	
4	无留点	0 ① 2	0 ① 2

表 11 列出了对留边情况下圆与切剩区域的位置关系示意图。

表 11 对留边点型边型示意图

Tab. 11 Sketch maps of vertexes types and edges types for opposite remained edges

序号	代码	示意图	序号	代码	示意图
点型 4B					
1	00		3	02 20	
			4	①①	
2	0① ①0		5	①2 2①	
			6	22	

7 结　论

根据以上切剩区域与夹杂之间的几何关系，就可以方便地在扩展有限元程序编制时把四边形单元沿每个夹杂边界切割开，形成不同的积分区域，为进一步积分计算做好准备。

参考文献(References)：

[1] MOES N, DOLBOW J, BELYTSCHKO T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **46**: 131-150.

[2] 李录贤，王铁军. 扩展有限元法(XFEM)及其应用[J]. 力学进展, 2005, **35**(1): 1-20. (LI Lu-xian, WANG Tie-jun. The extended finite element method and its applications —a review [J]. *Advances in Mechanics*, 2005, **35**(1): 1-20. (in Chinese))

[3] SUKUMAR N, CHOPP D L, MOES N, et al. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**: 6183-6200.

Geometrical relation between circular inclusion and quadrangular element for solving multi-inclusions problem by XFEM

YAO Zai-xing*[1,2], LI Shi-hai[1], LIU Xiao-yu[1]

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Mechanics and Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: When solving inclusion problem by the Extended Finite Element Method (XFEM), an element is split into many regions by the interface between inclusions and matrix. In order to calculate element stiffness matrix, integral in these regions is necessary. The urgent problem to be solved is to find a convenient method to describe integral regions for programming. The process of forming integral regions is taken as circles repeatedly splitting a quadrangle. Geometrical relation between remained region and circles is analyzed. In the process, broken sides are substituted by original sides, and remained region is substituted by quadrangle that discards no or some sides. All possible geometrical relations between circle and remained regions are listed through permutation and combination.

Key words: XFEM (Extended Finite Element Method); inclusion; remained region; quadrangular element