A 辑第 12 卷第 2 期
1997 年 6 月

水 动 力 学 研 究 与 进 展
JOURNAL OF HYDRODYNAMICS

Ser. A, Vol. 12, No. 2
June, 1997

对流方程保单调 CIP 格式

汤寒松
(北京航空航天大学宇航学院，北京 100083)
张德良
(中科院力学所，北京 100080)
李椿萱
(北京航空航天大学流体所，北京 100083)

摘 要 CIP 方法是国外发展起来的一种求解对流方程的数值方法。这种方法是一种紧致格式，它简便、直观同时稳定、数值扩散小。本文提出了保单调 CIP 方法的构造思路，并给出了几种包括一致高阶精度在内的保单调 CIP 格式。这些保单调 CIP 格式是原有 CIP 格式的修正，保持了其特点。模型方程数值试验的结果令人满意。

关键词 对流方程，CIP 方法，保单调性

1 引 言

立方插值拟质点方法，简称 CIP 方法(Cubic-interpolated Pseudo-particle Method)，是由 T. Yabe、H. Takewaki、T. Akio 等人于八十年代提出并发展的用于求解对流方程的一种数值方法[1-4]。如[3]中所述，这种方法具有简便、直观、容易推广到多维情形的特点，同时其构造方式新颖，即不是守恒型差分格式，也不同于样条方法、特征线方法。CIP 方法在日本颇为流行，并被应用到可压缩流、不可压缩流、两相流、热传导等问题的计算之中[5-8]。计算结果表明 CIP 方法数值扩散小、精度高，甚至能较好地捕捉间断。笔者曾分析了 CIP 方法的相容性及精度，指出 CIP 方法可能算出错误解，并将一种人工粘性引入到了 CIP 方法中，以避免非物理解[9]。在本文中，为抑制 CIP 方法的数值振荡，笔者提出了保单调 CIP 方法，这种保单调 CIP 方法简便、明了，其计算程序易于实现。

2 CIP 方法

CIP 方法是一种显式方法，方程的局部线性化及对数值解插值是其构造的关键。考虑如下形式单个对流方程式：

$$v_t + (fv)_x = g \tag{1}$$

其中 f、g 为 v 的函数。由式(1)有

$$V_t + fV_x = H \tag{2}$$

本文于 1995 年 11 月 25 日收到。

这里 $V=(v,v_x)^T, H=(G,G_x-v_xf_x)^T, G=g-vf_x$。式(2)可分裂为

$$v_t = H \tag{3}$$

$$v_t + fV_x = 0 \tag{4}$$

对于式(3)文献[3]给出算子 L_1：

$$w_{x_i}^* = w_{x_i}^n + G_i^n \triangle t \tag{5}$$

$$w_{x_i}^* = w_{x_i}^n + \frac{w_{i+1}^* - w_{i-1}^* - w_{i+1}^n + w_{i-1}^n}{2\triangle x} - \frac{\triangle t}{2\triangle x} w_{x_i}^n (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) \tag{6}$$

其中 $\triangle t$、$\triangle x$ 分别为时间、空间步长，w_i^n、$w_{x_i}^n$ 为时刻 t^n、节点 x_i 的数值解。CIP 方法的关键与特色是对式(4)采用所谓 CIP 格式求解。CIP0 格式是 CIP 格式的基本形式[3]。CIP0 格式给出算子 L_2：

$$w_i^{n+1} = P(x_i - f_i^n \triangle t) \tag{7}$$

$$w_{x_i}^{n+1} = P_x(x_i - f_i^n \triangle t) \tag{8}$$

其中 $P(x)$ 为由式(5)、(6)得出的 w_i^*、w_{xi}^* 所作的分段三次 Hermite 插值函数。当 $f_i^n < 0$，$P(x)$ 为节点 x_i 与 x_{i+1} 间的三次 Hermite 插值函数：

$$P(x) = [(a_iX + b_i)X + w_{xi}^n)X + w_i^n$$

$$a_i = \frac{2(w_i^* - w_{i+1}^*)}{\triangle x^3} + \frac{w_{x_i}^* + w_{x_i+1}^*}{\triangle x^2}$$

$$b_i = \frac{3(w_{i+1}^* - w_i^*)}{\triangle x^2} - \frac{2w_{x_i}^* + w_{x_i+1}^*}{\triangle x} \tag{9}$$

其中 $X = x - x_i, x \in [x_i, x_{i+1}]$。对于 $f_i^n > 0$ 的情况可类似给出 $P(x)$ 的表达式。将式(9)代入式(7)、(8)可得：

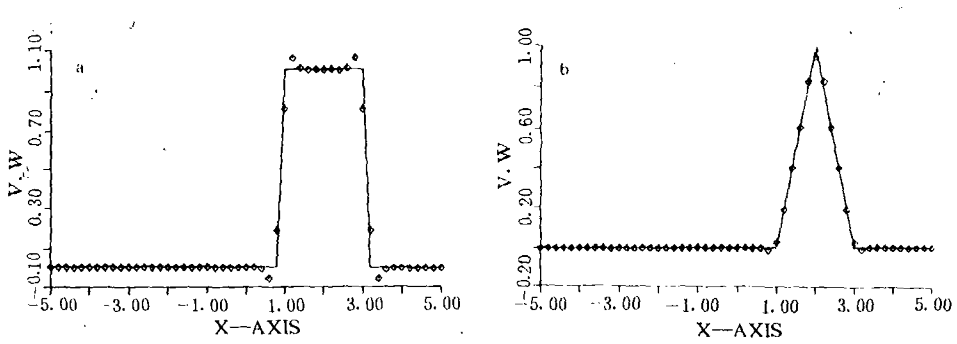

图 1 CIP0 格式算出的线性方波、三角波的解

—解析解， ◇数值解 $\triangle x = 0.2, n = 20, CFL = 0.5$

$$w_i^{n+1} = [(a_i\xi + b_i)\xi + w_{x_i}^*)]\xi + w_i^* \tag{10}$$

$$w_{x_i}^{n+1} = (3a_i\xi + 2b_i)\xi + w_{x_i}^* \tag{11}$$

其中 $\xi = - f_i^n \triangle t$ 。由上述可见,CIP0 格式是对数值解作一种平移。采用 CIP 方法求解式(2)可表述为

$$w_i^{n+1} = L_2 L_1 w_i^n \tag{12}$$

w 为 V 的数值解。关于 CIP 方法较为详细的论述可参见文献[3]、[4]。[9]中指出式(1)为线性方程时其至少为二阶格式。式(1)中的 $f = 1$、$g = 0$ 时式(12)退化为式(7)、(8)。图 1 为此时方波、三角波传播的数值计算结果,其中 $CFL = |f|\triangle t/\triangle x$,由此可以看到 CIP 方法数值扩散小、精度高的特点。

3 保单调 CIP 方法

对流方程(1)的计算中的数值解在 v 变化剧烈处往往出现振荡。如图在 1(a)中方波两侧、图 1(b)中三角波底部都有一定数值振荡。格式的保单调性能有效地抑制这种振荡现象。一般来说,CIP 格式不具有这种保单调性。下述定理表明经过一定修正可使 CIP 格式具有保单调性。

定理:在 CFL 形式的条件下

$$\left| \frac{f_i^n \triangle t}{\triangle x} \right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{13}$$

若 $P(x)$ 为分段单调插值函数,则式(7)具有保单调性。

证明:由式(13)有:

$$f_{i+1}^n \triangle t \leqslant \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

$$- f_i^n \triangle t \leqslant \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \tag{14}$$

两式相加有:

$$x_i - f_i^n \triangle t \leqslant x_{i+1} - f_{i+1}^n \triangle t \tag{15}$$

当 $w_i^* \leqslant w_{i+1}^*$ 由式(7)及 $P(x)$ 的分段单调性有:

$$w_i^{n+1} = P(x_i - f_i^n \triangle t) \leqslant P(x_{i+1} - f_{i+1}^n \triangle t) = w_{i+1}^{n+1} \tag{16}$$

当 $w_i^* > w_{i+1}^*$ 可类似讨论。定理得证。

上述定理说明若能构造出分段单调的三次 Hermite 插值函数 $P(x)$,则可使式(7)具有保单调性。如何构造单调的三次 Hermite 插值函数已有不少很好的工作,如 Boor[10]、Huynh[11]等等。将 CIP0 格式与这些方法结合起来即可得到保单调的 CIP 格式。

下式为一种称 MP(Monotonicity Preserving)的保单调算法[11]:

$$\begin{aligned} w_{xi} &= \mathrm{minmod}(w_{xi}, 3s_i) \\ S_i &= \mathrm{minmod}(s_{i-1/2}, s_{i+1/2}) \\ S_{i+1/2} &= (w_{xi+1} - w_{xi})/\triangle x \end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$\mathrm{minmod}(x,y) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(x)\min(|x|,|y|), & xy > 0 \\ 0 & xy \leqslant 0 \end{cases} \tag{18}$$

如果式(9)满足条件(17),则其为分段单调三次 Hermite 插值函数。因此在式(9)中,将 w_{xi}^* 经式

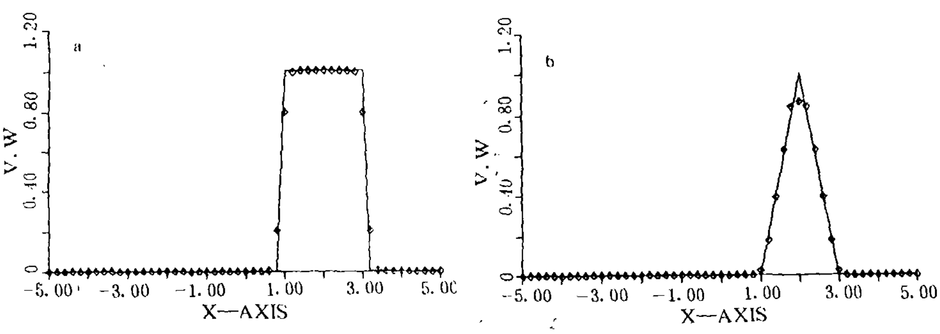

图 2 CIPM1 格式算出的线性方波、三角波的解

—解析解， ◇数值解 $\triangle x=0.2, n=20, CFL=0.5$

(17)修正后，插值函数 $P(x)$ 分段单调。根据上述定理，式(7)具有保单调性。式(7)、(8)、(17)即为我们给出的一种保单调 CIP 格式，称之为 CIPM1 格式。图 2 为 CIPM1 格式计算上述线性波的结果。比较图 1、2 可见，CIPM1 格式有效地消除了数值振荡。然而，根据文献[11]知，用式(17)修正 w_{xi}^n 后，在极值点处式(9)精度退化，这将导致式(7)、(8)的精度降低。故 CIPM1 在极值点降阶。比较图 1、2 可见，CIPM1 格式在极值点处精度降低。

为提高极值点的数值精度，可采用不同于(17)的一致高阶 Limiter 函数。下述 Limiter 函数称为 M3—A 的一致高阶算法[11]：

$$w_{xi}=\operatorname{minmod}(w_{xi}, t_{\max}) \tag{19a}$$

其中

$$\begin{aligned}
t_{\max} &= \operatorname{sgn}(t_i)\max(3|s_i|, 3|t_i|/2)) \\
t_i &= \operatorname{minmod}(R_{xi-1/2}(x), R_{xi+1/2}(x)) \\
R_{xi+1/2}(x) &= s_{i-1/2}+d_{i+1/2}\triangle x \\
R_{xi-1/2}(x) &= s_{i-1/2}-d_{i+1/2}\triangle x \\
d_{i+1/2} &= \operatorname{minmod}(d_i, d_{i+1}) \\
d_i &= (s_{i+1/2}-s_{i-1/2})/2\triangle x
\end{aligned} \tag{19b}$$

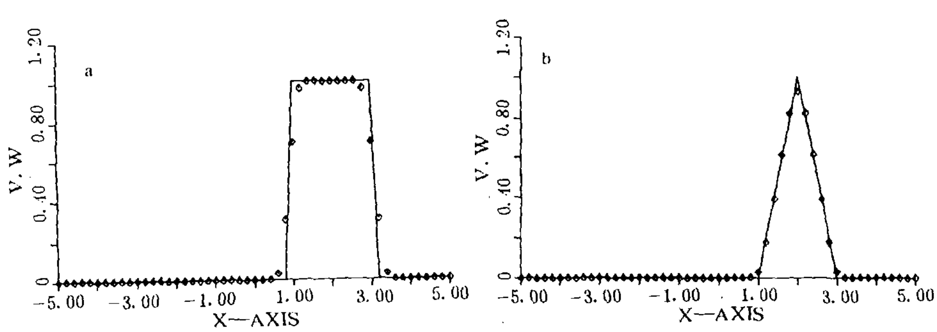

图 3 CIPM2 格式算出的线性方波、三角波的解

—解析解， ◇数值解 $\triangle x=0.2, n=20, CFL=0.5$

算法(19)保单调且稳定。w_{xi}^{n} 经式(19)修正后,式(9)中的 $P(x)$ 分段单调。当 $v \in C^3$,且式(9)中的 w_i^*、w_{xi}^* 分别具有三、二阶精度时,经式(19)修正 w_{xi}^* 后,式(9)给出的 $P(x)$、$P_x(x)$ 分别具有一致三阶、二阶精度。称式(7)、(8)、(19)为CIPM2格式。在条件(13)下,CIPM2保单调且具有一致高阶精度。CIPM2计算上述线性波的结果如图3。比较图1、2、3可见,CIPM2不仅无数值振荡,同时恢复了极值点处的精度。

CIPM1、CIPM2较CIP0增加了运算量。实际计算中可采用其它一些较为宽松、同时计算量小的算法,如MP算法的推广[11]:

$$w_{xi} = \mathrm{sgn}(w_{xi})\min(|w_{xi}|, s_{i-1/2}, 2s_{i+1/2}) \tag{20}$$

其精度较MP算法略有改善,但不是单调算法。我们称式(7)、(8)、(20)为CIPM3格式。CIPM3计算上述线性波问题的数值解如图4,可见其效果与CIPM1的相当。

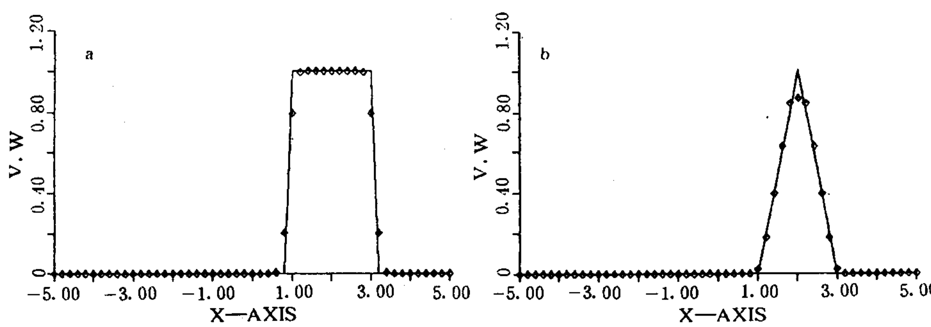

图4 CIPM3格式算出的线性方波、三角波的解

—解析解, ◇数值解 $\triangle x = 0.2, n = 20, CFL = 0.5$

引入人工粘性也可抑制数值振荡,但导致数值解精度下降。图5为采用[9]中人工粘性项的计算结果。这种人工粘性是在(5)、(6)两式右端分别附加

$$\beta\frac{\triangle t^2}{\triangle x^2}(w_{i+1}^* + w_{i-1}^* - 2w_i^*),\ \beta\frac{\triangle t^2}{\triangle x^2}(w_{xi+1}^* + w_{xi-1}^* - 2w_{xi}^*) \tag{21}$$

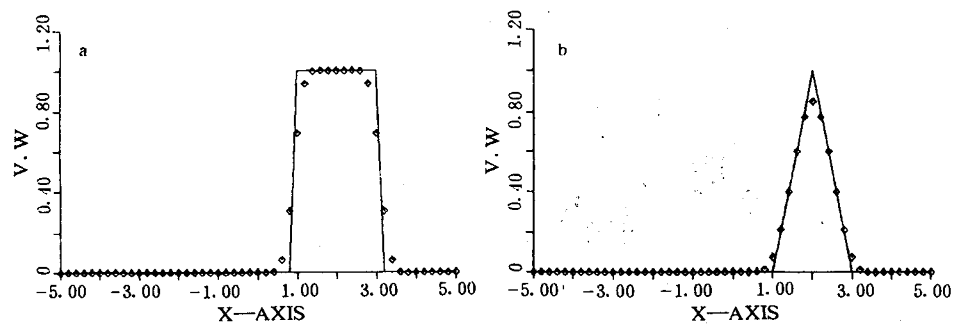

图5 有人工粘性的CIP0格式算出的线性方波、三角波的解

—解析解, ◇数值解 $\beta = 0.1, \triangle x = 0.2, n = 20, CFL = 0.5$

对于线性情形可以证明，式(21)有助于加强 CIP 格式的稳定性[9]。比较图 1,5 可见，人工粘性有助于抑制数值振荡，同时对数值解有抹光作用。而按上述保单调 CIP 方法可构造出一致高阶精度保单调 CIP 格式，如 CIPM2 格式，因而既可抑制数值振荡，又保持数值解的精度。

4 结 语

本文的保单调 CIP 方法能有效地抑制数值振荡，可同时保持数值解的精度。此外，与文献[3]中为抑制数值振荡而提出的 CIP1、CIP2 格式相似，本文的保单调性是通过修正 CIP0 格式中导数的数值解来实现，然而，后者不需要前者跟踪间断这一步骤，因而在这种意义下更加简便。按照文献[3]、[4]推广模型方程 CIP 格式的思路，本文的保单调 CIP 格式可望能应用到非线性与多维情形。

参 考 文 献

1 Takewaki H. Nishiguchi A, Yabe T, Cubic Interpolated Pseudo-particle Method (CIP) for Solving Hyperbolic-type Equations. J. Comput. Phys., 1985, 61: 261-268.

2 Takewaki H, Yabe T. The Cubic-interpolated Pseudo Particle (CIP) Method: Application to Nonlinear and Multi-dimensional Hyperbolic Equations J. Comput. Phys., 1987, 70: 355-372.

3 Yabe T, Aoki T. A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-polynomial Interpolation. Ⅰ. One-dimensional Solver. Comput. Phys. Comm., 1991, 66: 219-232.

4 Yabe T, Aoki T. A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-polynomial Interpolation. Ⅱ. Two- and Three-dimensional Solvers. Comput. Phys. Comm., 1991, 66: 233-242.

5 Matsamoto Y., Takemura F. Numerical Analysis on a Bubble Motion with Full Equations. Frontiers of Nonlinear Acoustics: Proc. of 12th ISNA. Edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, Elsevier Science Publisher Ltd. London, 1990.

6 Yabe T., Hoshino H, Tsuchiya T. Two and Three-dimensional Behavior of Rayleigh-Taylor and Kelvin-Helmholtz Instability. Phys. Rev., A, 1991, 44: 2756-2758.

7 Yabe T, Mochizuki T, Hara H. Multi-dimensional Hyperbolic Simulation of Laser-induced Evaporation Dynamics. Proc. of LAMP, 1992.

8 Utsum T and Kunugi T. Application of the Differential Algebraic Cubic Interpolated Propagation Scheme to the Heat Conduction Equations. Computational Fluid Dynamics Journal, 1995, 4(3): 265-277.

9 汤寒松. 双曲方程 CIP 方法分析与改进. 北航流体所博士后出站报告，第二部分，1995.

10 C. de Boor, Swartz B. Piecewise Monotone interpolation. J. Approx. Theory, 1977, 21: 411-416.

11 Huynh H. T. Accurate Monotone Cubic Interpolation. SIAM J. Numer. Anal., 1993, 30: 57-100.

Monotonicity Preserving CIP Schemes for Convective Equations

Tang Han-song

(School of Space Tech., Beijing Univ. of aero. and Astro, Beijing 100083)

Zhang De-liang

(Inst. of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Lee Chun-hian

(Inst. of Fluid Mechanics, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing 10083)

Abstract CIP schemes, being stable and less diffusive, are compact algorithms with simple procedures developed abroad for convective equations. This paper presents a method to construct CIP schemes that preserve monotonicity and proposes several monotonicity preserving CIP schemes These newly proposed CIP schemes can be of uniformly high order accuracy and, except some modifications, they have same procedures as the original CIP schemes. Numerical calculations of model equations demonstrate the good performance of the proposed schemes.

Key words convective equation, CIP scheme, monotonicity preserving.