

复合材料薄壁梁的固有特性分析

邓忠民¹ 洪友士¹ 诸德超²

(1 中科院力学所非线性力学国家重点实验室(LNM), 北京 100080, 2 北京航空航天大学固体力学所, 北京 100083)

摘要: 本文采用复合材料薄壁梁的高次翘曲理论对复合材料薄壁梁的固有特性进行分析, 讨论了单闭室复合材料薄壁梁的高次翘曲, 剖面分层对结构的固有特性的影响。数例表明, 复合材料薄壁梁的高次翘曲函数和分层对结构的固有特性具有一定的影响。

关键词: 复合材料, 薄壁梁, 固有特性, 高次翘曲, 分层

复合材料薄壁结构具有高比强度, 高比模量和质量轻特点, 被广泛应用于航空航天结构。现代直升机旋翼系统的桨叶, 采用复合材料薄壁结构, 以改善桨叶的气动弹性稳定性和响应性能, 最大限度地挖掘气动剪裁潜力, 并且能设计成结构简单, 使用和维修方便的无铰旋翼, 使直升机的机动性和加速性以及使用寿命都能得到改善^[1-2]。

薄壁梁特征在于梁厚度方向尺寸与剖面其它方向的尺寸相比很小, 由此引起薄壁梁剖面的剪应力和剪应变比一般实心梁要大, 引起一般的薄壁梁受载时产生翘曲位移较大, 而翘曲变形又能形成翘曲正应力和翘曲剪应力反作用于结构剖面, 使得薄壁梁剖面的力学分析相对于实心梁要复杂得多。对于复合材料薄壁结构的力学特性一直为力学界和工程界所重视^[3]。

本文采用复合材料薄壁梁的高次翘曲理论对薄壁梁的固有特性进行分析。

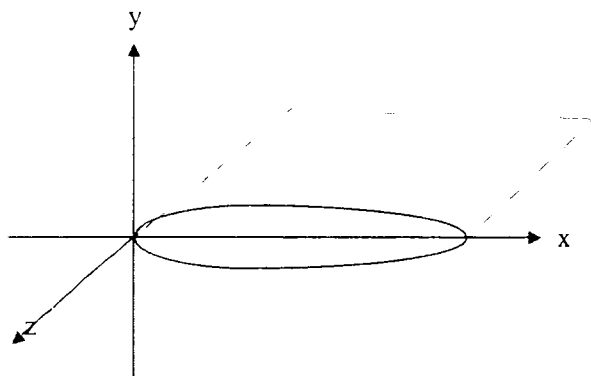


图1 薄壁梁的固定坐标系

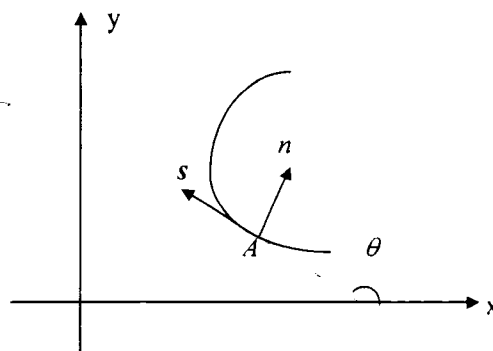


图2 周线流动坐标系

邓忠民, 男, 1968.11 出生, 工学博士, 博士后。

1 坐标系

薄壁梁(图 1)剖面坐标系如图(2)。其中 xy 为固定直角坐标系, A 为剖面周线上任意一点, ns 为沿剖面周线变化的流动直角坐标系, n 为点 A 处剖面周线的法线方向, s 为周线切线方向, θ 为剖面周线切线 s 与 x 轴正向夹角。

2 变形模式

采用与传统薄壁结构力学相同的假设, 即设薄壁剖面形状在固有平面内不变形, 故在剖面上只须考虑 z 方向正应力 σ_z 和剪应力 τ_{xz} 的作用; 并且认为薄壁结构的复合材料铺层是理想粘合的。

因此, 薄壁梁剖面上任一点的法向位移 u 和切向位移 v 与剖面整体位移 U, V, Φ_z 的关系为:

$$u(s, n, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - q(s) \Phi_z(z) = S_u^T D_1 \quad (1)$$

$$v(s, n, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + r(s) \Phi_z(z) = S_v^T D_1 \quad (2)$$

其中, $U(z)$ 为梁的 x 方向的平动位移, $V(z)$ 为 y 方向的平动位移, Φ_z 为扭转角。剖面上任一点的纵向位移 w 为:

$$w(s, n, z) = W(z) + y \Phi_y(z) - x \Phi_x(z) + w''(s, z) = S_w^T D_2 \quad (3)$$

式中杆件 $W(z)$ 为纵向平动位移, $\Phi_x(z), \Phi_y(z)$ 分别为 x, y 方向的转角, $w''(s, z)$ 为翘曲位移。式(1), (2), (3)中的 S_u, S_v, S_w 为位移的形函数矢量, D_1, D_2 为位移矢量。

$$w''(s, z) = \sum_j \varphi^j(s) f^j(z) \quad j = 1, N_h \quad (4)$$

其中 φ^j 第 j 次周线翘曲函数, N_h 为翘曲函数最高阶数。取 φ^j 为自由扭转周线翘曲函数。对于每层厚度相等的复合材料薄壁结构, 其第 j 次翘曲函数为^[1]

$$\varphi^j(s) = a^j + b^j x + c^j y + \frac{\int C^{j-1}(s) ds}{\oint C^{j-1}(s) ds} - \frac{\int r ds}{\oint r ds} \quad (5a)$$

式中 a^j, b^j, c^j 的选择应满足 3 个条件: $\oint \varphi^j = 0, \oint x \varphi^j = 0, \oint y \varphi^j = 0$ 。 $C^{j-1}(s)$ 为

$$C^{j-1}(s) = \int \varphi^{j-1} ds - \frac{\oint r (\int \varphi^{j-1} dt) ds}{\oint r ds} \quad (5b)$$

式中 t 为积分中间变量。由式(5)循环可以求出无数多个里次基 φ^j 。在实际计算中, 通常只需取前几项即可。

进一步考虑分层对翘曲的影响, 即设纵轴翘曲函数 $f(z)$ 分层线性分布, 则第 i 层铺层内的翘曲位移:

$$w^w = (1 - \frac{\xi - \xi_i}{h_j}) \sum_j^{N_k} \varphi_i^j f_i^j(z) + \frac{\xi - \xi_i}{h_j} \sum_j^{N_k} \varphi_{i+1}^j f_{i+1}^j(z) \quad (6)$$

式中： ξ 为铺层中一点 n 方向的坐标； ξ_i 为第 i 层铺层下表面的法线 n 方向坐标； h_i 是第 i 层铺层厚度； N_k 是展开的里次基周线翘曲函数最高阶次数； f_i^j, f_{i+1}^j 为第 i 层铺层上下表面的 j 阶周线翘曲函数系数。则第 i 层铺层式(3)中的：

$$S_{2i} = \left\{ 1, -x, y, (1 - \frac{\xi - \xi_i}{h_i}) \varphi_i^1, \dots, \frac{\xi - \xi_i}{h_i} \varphi_i^1, \dots \right\}^T \quad (7)$$

$$D_{2i} = \{W, \Phi_x, \Phi_y, f_i^1(z), \dots, f_{i+1}^1(z), \dots\}^T$$

3 瑞利商变分式和控制方程

由式(2)和(3)，薄壁结构的正应变为：

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = S_w^T D_2' \quad (8a)$$

剪应变为：

$$\varepsilon_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial s} = S_w^T D_2 + S_v^T D_1' \quad (8b)$$

其中：“•”表示对 s 微分；“'”对 z 微分。于是，复合材料薄壁梁的应变能为：

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int \sum_i^{n_i} ((Q_{11i} \varepsilon_z + Q_{16i} \varepsilon_{sz}) \varepsilon_z + (Q_{16i} \varepsilon_z + Q_{66i} \varepsilon_{sz}) \varepsilon_{sz}) d\xi ds dz \quad (9)$$

其中， Q_i 为复合材料铺层相应的刚度系数，而其下标 i 指第 i 层铺层。结构动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int \sum_i^{n_i} \rho_i (u(s, n, z)^2 + v(s, n, z)^2 + w(s, n, z)^2) d\xi ds dz \quad (10)$$

式中 ρ_i 分别是结构第 j 层的密度。Rayleigh 商变分式，

$$\lambda^2 = st \frac{U}{T} \quad (11)$$

式中 st 表示对泛函求驻值。 λ 为薄壁结构的自由振动角频率。则结构自由振动的控制方程为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ sym & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d^2 D_2}{dz^2} \\ \frac{d^2 D_1}{dz^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -K_{32} \\ K_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dD_2}{dz} \\ \frac{dD_1}{dz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -K_{33} & 0 \\ sym & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} + \lambda^2 \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中 K_{ij} 分别为相应的刚度矩阵，可由势能泛函导出^[4-5]。质量矩阵 M_1, M_2 为：

$$M_1 = \int \sum_i^{N_i} \int_0^{h_i} \rho_i S_w^T S_w d\xi ds \quad M_2 = \int \sum_i^{N_i} \int_0^{h_i} \rho_i (S_u^T S_u + S_v^T S_v) d\xi ds$$

式中 i 代表第 i 层铺层, N_i 表示薄壁铺层总数。复合材料薄壁梁固有特性的有限元列式同样可由 Rayleigh 商变分式得到, 限于篇幅, 在这不一一列出。本文的算例采用 C^0 类升阶谱有限元单元^[6]分析。

4 算例分析和讨论

考虑一长为 L , 一端固支的盒形复合材料薄壁梁, 铺层为 $[0/90/0]$ 。

4.1 分层翘曲和高次翘曲对薄壁梁限制扭转固有特性的影响

梁长宽比 $L=2.5$, 宽高比为 4.0 , 剖面宽度与铺层厚度比为 $(3*0.0025)$, 材料参数 $E=(1.0, 0.0025, 1.0)$, $G=(3*0.015)$ 。表 1 为限制扭转振动的前十五阶频率对比, S 表示不分层, M 表示考虑分层翘曲, 1, 2, 3 分别表示一次, 二次, 三次翘曲修正。

表 1 复合材料薄壁梁前五阶频率对比

No	S1	S2	S3	M1	M2	M3
1	.002348	.002282	.00227	.002327	.002263	.002254
2	.02173	.02121	.0211	.02156	.02104	.02090
3	.06578	.06382	.0632	.06158	.06322	.06266
4	.1319	.1292	.1278	.1312	.1282	.1268
5	.2214	.2180	.2159	.2204	.2165	.2144
6	.3324	.3287	.3260	.3313	.3269	.3241
7	.4663	.4622	.4591	.4651	.4595	.4561
8	.6212	.6126	.6091	.6197	.5319	.5266
9	.7980	.6664	.6610	.7937	.6188	.6147
10	.9673	.8002	.7963	.8743	.6346	.6291
11	1.038	1.000	.9963	.9770	.7751	.7703
12	1.237	1.226	1.222	1.004	.7919	.7869
13	1.502	1.494	1.489	1.101	.8070	.8018
14	1.853	1.842	1.820	1.158	.9985	.9936
15	2.381	2.372	1.919	1.238	1.224	1.219

结果显示, 分层翘曲和高次翘曲修正使得复合材料薄壁梁的限制扭转振动的固有频率变小。

4.2 分层翘曲和高次翘曲对复合材料薄壁梁固有特性的影响

盒形梁材料系数 $E_1=181.3GPa$, $E_2=10.3GPa$, $G=7.17GPa$, $\nu_{21}=0.28$ 。剖面宽高厚比为 $40:30:1$, 铺层为 $[0/90/0]$ 。梁长 L 与剖面宽比为 2.5 。表 2 表 3 显示的是分层翘曲和高次翘曲对复合材料盒形薄壁梁的拉弯扭耦合的固有特性影响。从结构的模态分析来看, 薄壁梁可以分为挥舞弯曲为主, 摆振弯曲为主, 限制扭转振动为主, 拉伸振动为主四种模态形式。表 2 为只考虑一次翘曲函数修正分层与不分层的结果对比, 表 3 为不分层时, 考虑二次三次翘曲修正的结果。

表2 分层翘曲对复合材料薄壁梁固有特性的影响

	挥舞弯曲为主		摆振弯曲为主		限制扭转为主		拉伸为主	
	分层	不分层	分层	不分层	分层	不分层	分层	不分层
1	6.84	5.37	8.0	8.1	13.0	12.9	307.6	307.6
2	68.94	53.8	76.1	76.3	122.2	121.7	2896.2	2896.2
3	282.7	218.6	298.0	298.7	421.7	421.0	9972.2	9972.4
4	376.1	293.6	383.0	383.3	676.4	574.7	13729	13729
5	579.2	472.0	543.9	544.7	915.3	910.7	23296	23296

表3 高次翘曲对复合材料薄壁梁固有特性的影响

	挥舞弯曲为主		摆振弯曲为主		限制扭转为主		拉伸为主	
	二次翘曲	三次翘曲	一次翘曲	三次翘曲	二次翘曲	三次翘曲	二次翘曲	三次翘曲
1	5.34	5.33	8.02	8.01	12.8	12.8	307.6	307.6
2	50.8	50.8	73.1	73.0	115.4	114.2	2768.2	2768.2
3	169.1	168.9	236.2	236.0	414.7	302.5	7711	7711.5
4	323.3	344.6	345.0	425.7	646.4	331.6	15857	15854
5	425.4	477.8	543.9	564.0	857.2	644.8		

结果显示, 分层翘曲和高次翘曲对复合材料薄壁梁的固有特性还是有一定的影响。特别是对于限制扭转为主的模态, 高次翘曲对其高频修正效果明显。

5 结论

从表 1, 2, 3 的结果分析可得, 分层翘曲和高次翘曲对复合材料薄壁梁的固有特性还是有一定的影响。在精确分析复合材料薄壁梁的固有特性时, 有必要考虑分层翘曲和高次翘曲的影响。

参考文献

- [1] Chandra R and Chopra I, Experimental and Theoretical Analysis of Composites I-Beams with Elastic Couplings, AIAA Journal, 1991, 29, (12):2197-2217
- [2] Rand O, Theoretical Model for Thin-walled Composite beams of open cross-sectional geometry, Annual Forum Proceedings - American Helicopter Society, May 25-May 27 1999(1): 356-369
- [3] 邓忠民, 诸得超, 复合材料薄壁梁力学特性分析, 复合材料学报, 2001, 18 (1): 1-6
- [4] 邓忠民, 复合材料薄壁结构力学特性分析 (博士学位论文), 北京航空航天大学, 1998
- [5] 邓忠民, 诸得超, 复合材料薄壁梁扭转的高次翘曲理论, 航空学报, 1999, 20 (5): 458-461
- [6] 诸得超, 升阶谱有限元法, 国防工业出版社, 1993