

文章编号: 0258-1825(2001)01-0001-07

Navier-Stokes (NS) 方程组差分计算中的物理和网格尺度效应及 NS 方程组的简化

高智, 申义庆

(中国科学院力学研究所, 高温气体动力学开放研究实验室, 北京 100080)

摘要: 对于高 Re 数流动计算, 在通常二阶精度 NS 差分格式和网格数条件下, 存在某些粘性项落入修正微分方程截断误差项的问题。这类 NS 方程组计算实际是计算某种简化 NS 方程组, 而且重复计算误差物理粘性项既浪费机时和内存, 误差积累又会对数值解产生不可预测的影响。避免上述缺陷的办法一个是提高 NS 差分格式的精度, 另一个是丢掉可能落入截断误差项的物理粘性项, 把 NS 方程组简化为广义 NS 方程组。广义 NS 计算避免了误差物理粘性项误差积累对数值解的不可知影响, 又可节省内存和机时, 对高 Re 数流体工程计算很有好处。利用广义 NS 方程组计算超声速绕前向和后向台阶流动的结果表明: 广义 NS 方程组与 NS 方程组的数值结果很好相符。

关键词: 计算流体力学; 尺度效应; Navier-Stokes (NS) 方程组; 广义 NS 方程组

中图分类号: V211.3 **文献标识码:** A

0 引言

关于提高 NS 差分格式精度在高 Re 数流动计算中的作用问题, 已有不少文献^[1~4]作过讨论。一般来说, 提高精度可以放宽对步长的要求, 如 Re 为百万, 精度由二阶提高到五阶, 一个方向上的网格步长可加大约 63 倍^[2~4], 所需网格点数大大减少, 这对高 Re 数流动的计算十分有用。精度低步长不够小时必有一些粘性项落入修正微分方程的截断误差项中。这时的 NS 方程组计算实际是计算某种简化的 NS 方程组, 而且重复计算误差物理粘性项既浪费机时和内存, 误差积累又会对数值解产生不可预测的影响。为了消除上述缺陷, 一个途径是提高 NS 差分格式精度以实现完全 NS 方程计算。另一个是文献[4]提出的丢掉可能落入误差的物理粘性项, 把 NS 方程组简化为广义 NS 方程组。广义 NS 计算与包含误差物理粘性项的完全 NS 计算相比, 具有节约机时和内存、又能避免误差物理粘性项误差积累对数值解产生不可预测影响的优点。进而考虑到高精度差分格式在固壁邻域不得不降阶、在那儿很难实现 NS 计算的情况, 广义 NS 方程组对高 Re 数流体工程计算因而十分有用。本文进一步分析这些问题, 并通过超声速绕前向和后向台阶流动的算例证实广义 NS 方程组的实用性。

收稿日期: 2000-06-01; 修订日期: 2000-07-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(19772067); 中国科学院重大项目、科学与工程计算国家重点实验室和 LHD 开放实验室资助。

1 物理和临界网格尺度 (CGS) 分析

NS 方程组包含了宽广的空间尺度范围。为了计算某一物理尺度内的流动特性,网格尺度必须很小于该物理尺度。另一方面,对于 NS 方程组计算,所有惯性和粘性项不应落入 NS 差分格式修正微分方程的截断误差项中。因此网格尺度应满足如下关系(以二维流动为例):

$$x \ll \min(x_p, x_{cgs}), \quad y \ll \min(y_p, y_{cgs}) \quad (1.1)$$

其中 x (y) 和 x_{cgs} (y_{cgs}) 分别是 x -(y) 坐标方向的网格和临界网格尺度 (CGS), 相应的流动物理尺度是 x_p 和 y_p 。CGS 的定义是: 若网格尺度大于 CGS, 粘性项将落入 NS 差分格式修正微分方程的截断误差项中。关系 (1.1) 中所有 x, y, x_p, y_p, x_{cgs} 和 y_{cgs} 用流动特征长度 L 无量纲化。

1.1 典型流动的物理尺度:

物理尺度(包括长度和速度)可表示为^[4]

$$x_p, y_p; u_p, v_p \cong (Re^{-n_x}, Re^{-n_y}; Re^{-n_u}, Re^{-n_v})$$

{	$(Re^0, Re^{-\frac{1}{2}}; Re^0, Re^{-\frac{1}{2}})$ $(Re^{-\frac{3}{8}}, Re^{-\frac{5}{8}}; Re^{-\frac{1}{8}}, Re^{-\frac{3}{8}})$ $(Re^{-1}, Re^{-\frac{1}{2}}; Re^0, Re^{-\frac{1}{2}})$ $(Re^{-\frac{7}{8}}, Re^{-\frac{5}{8}}; Re^{-\frac{1}{8}}, Re^{-\frac{3}{8}})$	<p>边界层</p> <p>干扰边界层下层</p> <p>扩散迎风层</p> <p>干扰扩散迎风层</p>	(1.2)
---	---	---	-------

其中 $Re = UL/\nu$ 为雷诺数, $Re \gg 1$, 速度尺度用流动特征速度 U 无量纲化。边界层的法向物理尺度正是它的无量纲厚度^[5]。对干扰边界层 (Triple deck) 下层, 它的切向和法向物理尺度正是它在流向和法向的厚度尺度^[6]。对扩散迎风层流动^[7], 若速度尺度为 Re^{-n_u} , 则扩散迎风层的厚度尺度为 Re^{-1+n_u} 。应该指出: 剪切层物理尺度在所有方向上趋向扩散迎风层物理尺度时, 长度和速度尺度分别为 $Re^{-3/4}$ 和 $Re^{-1/4}$, 在这一极限情况下, 在所有方向上惯性项和粘性项为同阶量, 参见图 1。

(图中横坐标指 $-\ln x_p / \ln Re$, $-\ln u_p / \ln Re$, $-\ln x_{cgs} / \ln Re$ 等。 B_1 和 B_2 指经典边界层; T_1 、 T_2 和 T_3 指 Triple-Deck 下层; I_1 和 I_2 物理尺度各向相同极限。下标 s 指剪切层, d 指扩散迎风层)。

1.2 临界网格尺度 (CGS) 估计:

为了给出 CGS 的合理估计, 考虑半离散 NS 动量差分格式的如下修正微分方程

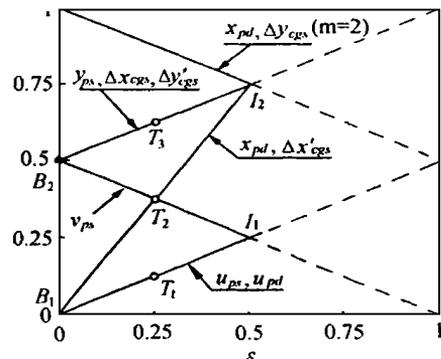


图 1 二维流动, 惯性力与粘性力同阶时的流动物理尺度以及临界网格尺度随参数 $-\ln \frac{u_p}{\ln Re}$ 的变化关系

Fig. 1 Variations of physical scales of inertia and viscous forces being the same order-of-magnitude in a two-dimensional flow and critical grid scales with parameter $-\ln \frac{u_p}{\ln Re}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{Re} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \sum_n \frac{\partial^{2n+1} p}{\partial x^{2n+1}} x^{2n} + \sum_n u \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} x^{2n-1} + \sum_n \left(u \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} + \frac{-u}{Re} \frac{\partial^{2n+2} u}{\partial x^{2n+2}} \right) x^{2n} + \sum_n v \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} y^{2n-1} + \sum_n \left(v \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial y^{2n+1}} + \frac{-v}{Re} \frac{\partial^{2n+2} u}{\partial y^{2n+2}} \right) y^{2n} \quad (1.3)$$

其中 n, n, n, n, n 和 n 为常数。假定 NS 差分格式的精度为 m 阶,由修正微分方程(1.3)能够推出最大粘性项 $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 落入截断误差项的 CGS x_{cgs} 和 y_{cgs} 分别为

$$(x_{cgs}, y_{cgs}) \cong (Re^{-n_x} \cdot \frac{1}{m} (1 - n_u + n_x \cdot 2n_y), Re^{-n_y} \cdot \frac{1}{m} (1 - n_v \cdot n_y)) = (x_p, y_p) \quad (1.4)$$

最小粘性项 $\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 落入截断误差项的 CGS x_{cgs} 和 y_{cgs} 分别为

$$(x_{cgs}, y_{cgs}) \cong (x_p, y_p) Re^{-\frac{1}{m} (1 - n_u - n_x)} \begin{cases} (Re^0, Re^0) Re^{-\frac{1}{m}} & \text{无粘流} \\ (Re^0, Re^{-\frac{1}{2}}) Re^{-\frac{1}{m}} & \text{边界层} \\ (Re^{-\frac{3}{8}}, Re^{-\frac{5}{8}}) Re^{-\frac{1}{2m}} & \text{干扰边界层下层} \\ (Re^{-1}, Re^{-\frac{1}{2}}) & \text{扩散迎风层} \\ (Re^{-\frac{7}{8}}, Re^{-\frac{5}{8}}) & \text{干扰扩散迎风层} \end{cases} \quad (1.5)$$

式(1.4)表明: x_{cgs} 和 y_{cgs} 就是边界层、干扰边界层下层和扩散迎风层的物理尺度。可见, NS 差分方程的数值分析与粘性流动的近似理论密切相关,后者为网格设计提供了重要的基础,对流动数值模拟十分有用。应该指出 x_{cgs} 和 y_{cgs} 与 NS 差分格式的精度无关。

由(1.5)知道:在高 Re 数流场的计算中要保证最小粘性项不落入截断误差项十分困难。例如对边界层流动,一方面要求层内法向网格步长 y 很小于 $Re^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{m}}$,另一方面又要求 y 很大于分子平均自由程 MRe^{-1} ,这里, $M = U/a$ 为马赫数, a 为声速。因此当差分格式的精度较低 ($m \leq 2$)、马赫数 M 不很小于 1 时,上述要求得不到满足,即使格式精度高 ($M \geq 3$),由于接近固壁时格式不得不降阶,因此在固壁邻域,上述要求更难得到满足。

2 建议和 NS 方程组的简化

在 NS 方程组的数值计算中,当有部分粘性项落入截断误差项时,重复计算这些属于误差的物理粘性项不仅浪费机时和存储,误差积累又会对数值解产生不可预测的影响。避免上述缺陷的办法:一个是提高 NS 差分格式的精度以实现真正的 NS 方程组计算。另一个是合理简化 NS 方程组^[4],丢掉可能落入截断误差项的诸物理粘性项;丢掉这些粘性项的好处是:既节省机时存储,又避免了误差积累对数值解的不可预测的影响。

由上节 1.2 中修正微分方程(1.3)数值分析的结果可知,在 NS x -动量方程中,主要粘性作用来自剪切粘性项,在 x 方向上的粘性扩散作用影响很小可以忽略,即 x 方向可以扩散抛物

化;在 NS_x-动量方程中忽略 u, v 和 w 对 x 求导的诸粘性项(即粘性项只保留 u 对 y 和对 z 的二阶导数项)得到扩散抛物化的 NS_x-动量方程。对 NS_y-和 z -动量方程可用类似的办法进行简化,于是得到广义扩散抛物化 NS 动量方程组。今以直角坐标系中的可压缩流 NS 方程组为例加以说明,NS 动量方程组为

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right] - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

广义扩散抛物化 NS 动量方程组为

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

对能量方程作类似简化、即略去能量粘性耗散项中 u 对 x 、 v 对 y 以及 w 对 z 求偏导数的诸粘性项后得到简化的能量方程。能量方程及其简化方程的具体形式这里不再写出。简化能量方程与广义扩散抛物化 NS 动量方程组以及连续性方程一起组成广义扩散抛物化 NS 方程组,为称呼简便起见,称之为广义 NS 方程组。由上述分析可知,广义 NS 方程组应在贴体坐标系中写出。

文中广义 NS 方程组是通过 NS 差分格式的数值分析导出的。值得指出:广义 NS 方程组亦可看作是主流方向近似不变的简化即扩散抛物化 NS 方程组^[7,8]推广为主流方向变化很大的简化,即广义扩散抛物化 NS 方程组;亦可把它看作是多方边界层理论。表 1 给出可压缩流广义 NS 方程组与 NS 方程组的一些有关资料

表 1 可压缩流广义(G) NS 方程组与 NS 方程组的比较资料

Table 1 Data of Navier-Stokes(NS) equations and generalized NS equations

坐标系	粘性项总数		每一时间前进步, GNS 和 NS 所需运算次数		误差粘性项对解有 无不可预测的影响	
	NS	GNS	NS	GNS	NS	GNS
直角坐标系	33	12 - 9	N ₁	(0.60 - 0.54)N ₁	有	无
	(21	6 - 3)				
曲线坐标系	123	40 - 37	N ₂	(0.28 - 0.25)N ₂	有	无
	(102	6 - 3)				

注:(21,6-3)和(102,6-3)指动量方程组的粘性项数目。

3 应用计算和结束语

文中利用广义 NS 方程组计算了超声速绕前向和后向台阶的流动, 并与 NS 方程组的数值结果作了比较。上述诸方程组均在直角坐标系中写出, 相应的差分格式均为二阶精度 TVD 格式。前台阶(网格数为 201×201 , $Re = 720$, $M = 2.3$, 等温壁 $T_w = 293\text{K}$)和后台阶(网格数为 51×41 , $Re = 849$, $M = 4.08$, 等温壁 $T_w = 1046\text{K}$), 网格步长显然满足 $(x, y) \ll (x_p, y_p)$ 。计算结果表明: 对所有的计算情况, 壁面摩擦阻和压力(包括前台阶迎风壁面和后台阶背风壁面), 广义 NS 方程组和 NS 方程组两者的数值结果很好相符。参见图 2~图 5(前台阶)和图 6~图 9(后台阶)。

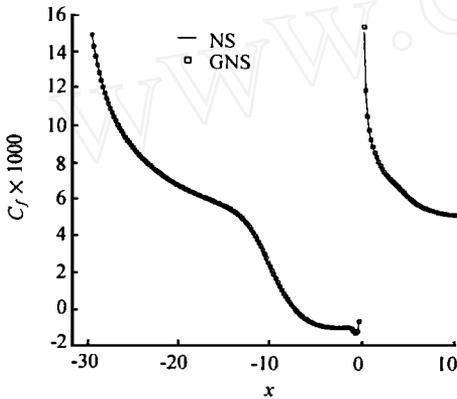


图 2 前向台阶水平壁面摩擦系数分布

Fig. 2 Skin friction coefficients on horizontal wall in a supersonic flow over a frontward facing step

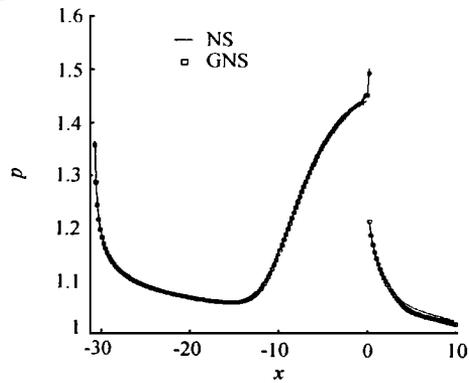


图 3 前向台阶水平壁面压力分布

Fig. 3 Pressure on horizontal wall in a supersonic flow over a frontward facing step

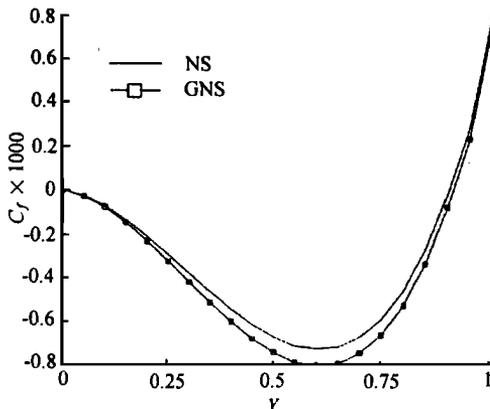


图 4 前向台阶垂直壁面摩擦系数分布

Fig. 4 Skin friction coefficients on frontward facing wall in a supersonic flow over a frontward facing step

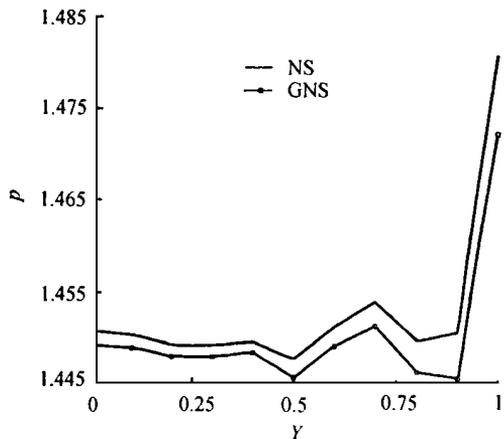


图 5 前向台阶垂直壁面压力分布

Fig. 5 Pressure on frontward facing wall in a supersonic flow over a frontward facing step

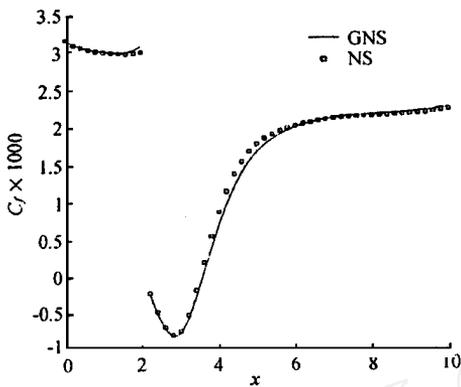


图 6 后向台阶水平壁面摩擦系数分布

Fig. 6 Skin friction coefficients on horizontal wall in a supersonic flow over a rearward facing step

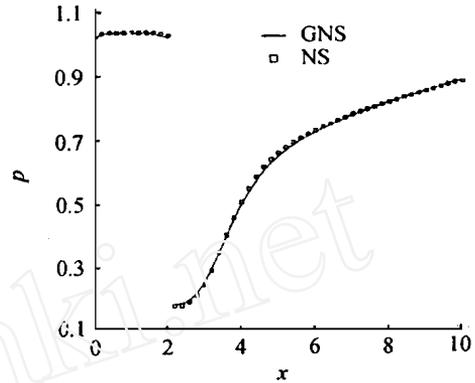


图 7 后向台阶水平壁面压力分布

Fig. 7 Pressure on horizontal wall in a supersonic flow over a rearward facing step

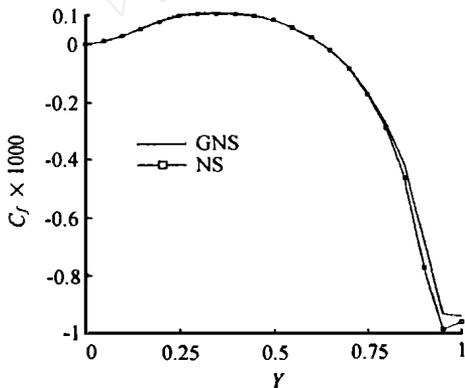


图 8 后向台阶垂直壁面摩擦系数分布

Fig. 8 Skin friction coefficients on rearward facing wall in a supersonic flow over a rearward facing step

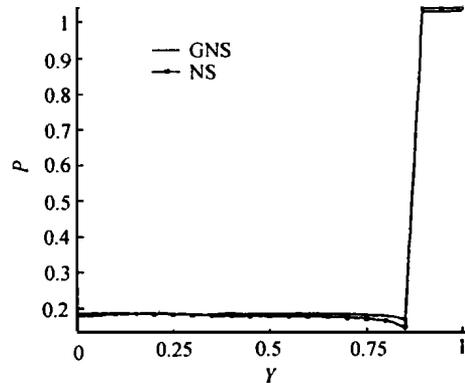


图 9 后向台阶垂直壁面压力分布

Fig. 9 Pressure on rearward facing wall in a supersonic flow over a rearward facing step

应该指出,与 NS 方程组相比,广义 NS 方程组丢掉的诸粘性项,在 NS 方程组计算的流场绝大部分区域中均为误差项,它们对 NS 方程组数值解的影响难以估计和预测,因此广义 NS 方程组解和 NS 方程组数值解哪一组更靠近准确解,本文难以做出判断,这是值得进一步研究的问题。关于所需机时问题,由于本文利用 TVD 格式计算惯性项,惯性项计算所需机时约是粘性项所需机时的 4 倍,粗略的估计 GNS 所需机时约为 NS 计算的 90%。

参 考 文 献:

- [1] CAUGHEY D A, HAFEZ M M. Frontiers of computational fluid dynamics[M]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [2] 张涵信等. 网格与高精度差分计算问题[J]. 力学学报, 1999, 31(4): 398-405.
- [3] 沈孟育. 高精度、高分辨率差分格式研究进展. In Proc. of Symposium on Computational Aerodynamics[C]. Xi'an, Sept.

1999: 107-178.

- [4] 高智. NS 方程组及其扰动量方程差分计算中的物理和网格尺度效应和它们的简化方程计算. 北京计算流体力学讨论会文集[C]. (第十二辑) 将发表.
- [5] SCHLICHTING H. Boundary layer theory (7th ed.) [M]. McGraw-Hill. 1979.
- [6] STEWARTSON K et al. Self-induced separation. Proc. Roy. Soc[C]. 1969 A312:181-206.
- [7] 高智. 简化 Navier-Stokes 方程组的层次结构, 它的力学内涵和应用[J]. 中国科学(A 辑), 1988(6): 625-640.
- [8] ANDERSON D A, TANNEHILL J C, FLETCHER R H. Computational fluid mechanics and heat transfer[M]. Hemisphere Publishing Corporation, 1984.

Effects of physical and grid scales in difference computing of the Navier-Stokes (NS) equations and computing generalized NS-equations

GAO Zhi, SHEN Yi-qing

(Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Effects of physical and grid scales in difference computing of NS equations are analyzed and emphasis is on coupling of fluid mechanics with numerical analysis. The study shows that in normal conditions of NS-difference computing, some viscous terms will drop into the truncated error terms of modified differential equation of NS difference scheme. In this case, NS computation is actually equal to compute a certain simplified NS equations, moreover, computing repeatedly these viscous error terms yield unpredictable influence on numerical solution. In order to avoid above-cited shortcoming, one way is to raise accuracy of NS difference scheme and to fine grid and to realized a veritable computation of NS equations. The other way is to reduce reasonably NS equations. For this end we suggest a generalized NS equations derived by neglecting those error viscous terms from NS equations. The generalized NS equations, in which viscous terms retained are only second-order shear viscous terms, may save time and storage and avoid unpredictable influence of error accumulations of error viscous terms on numerical solution. As two examples, both generalized NS (GNS) equations and NS equations are used to compute the supersonic flows over both frontward and rearward facing steps. Numerical results of GNS equations agree well with those of NS equations.

Key words: Computational fluid dynamics; Scale-effect; Navier-Stokes (NS) equations; Generalized NS equations