

337-342

(56)

# 循环载荷下非凝聚土本构方程的数值计算

章根德

韩贝传

TU441  
FU43

(中国科学院力学研究所, 北京 100080) (中国科学院地质研究所, 北京 100029)

**摘要** 循环载荷下非凝聚土弹-塑性本构方程的数值计算包含了许多离散化, 这将导致偏离屈服面的问题, 弹塑性加载增量所预言的应力状态不落在屈服面上, 这样, 偏离将积累起来, 所以在每一步加载增量后进行修正, 以确保应力仍落在屈服面上就显得十分重要了. 本文考察了五种计算应力点偏移的方法, 将数值结果和实验资料进行了比较, 发现沿弹塑性流动方向反向投影的修正方法给出比较精确的预言, 如用其他方法对屈服面的偏移进行修正将产生较明显的误差, 所以, 这种修正方法可以在弹-塑性分析的数值计算中广泛地使用.

**关键词** 本构方程, 数值计算, 修正方法

## 1 引言

非凝聚土 弹塑性

解决大型的、复杂的土-结构相互作用问题, 如水坝、核电站、海洋工程结构受到地震、爆炸冲击、应力波作用的问题, 都需要先进的计算模型. 例如典型的海洋平台, 自重就达  $10^5$  吨, 而引起的倾覆力矩可达  $10^6$  吨米. 在这样的载荷条件下, 如再借助于常规的经验公式来设计将会出现许多不可估量的问题. 于是, 常常采用先进的数值计算方法, 如有限元方法等, 来代替常规的承载力公式进行设计. 而这些数值方法中, 关键就是对土介质本构响应的近似模拟. 这就导致了人们对土本构模型研究的极大关注, 使最近 20 年来土本构模型的研究取得了较大的进展.

在岩土介质的弹-塑性分析中, 常采用小步长进行数值积分. 弹塑性本构矩阵  $[C_{ep}]$  实际上是随着应力的变化而连续变化的, 但在计算中, 对每一小步长总假设  $[C_{ep}]$  是个常数. 所以, 尽管采用小步长, 但加载增量结束后, 应力状态往往会不在屈服面上. 特别是当屈服面随着载荷的增加而运动时, 这种偏离就会更加明显. 这就要求我们在计算的每一步都要通过修正将应力拉回到屈服面上来.

可以采用不同的方法来修正<sup>[1-5]</sup>. 经过比较表明沿着塑性流动方向反向投影进行修正有较高的精度. 所以本文所给出的弹塑性应力-应变关系的数值计算采用了沿着塑性流动方向反向投影修正的方法.

## 2 循环载荷下非凝聚土的本构方程

文献 [6] 提出了一个描述循环载荷下非凝聚土本构特性的模型. 分析常规土力学试验所得到的应力-应变曲线, 如图 1 所示. 可以发现, 在加载过程中, 当土介质达到某种应力状态后, 应力-应变曲线呈现出非线性, 即人们所常说的达到了屈服. 随后便是继续屈

章根德, 男, 1942 年 10 月出生, 研究员  
国家自然科学基金资助项目.

硬化过程. 所以, 在加载过程中, 土介质的屈服现象都可以与屈服面发生联系. 屈服面可以表示为:

$$F = J_{2D} - \alpha_2 J_1^2 (1 - \alpha_1 J_1^{n-2}) (1 - \alpha_3 S_r)^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

式中,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为材料常数,

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ii}, \\ J_{2D} &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \\ J_{3D} &= \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}, \\ S_r &= J_{3D} / J_{2D}^{3/2} \end{aligned}$$

对于卸载与重新加载, 实验表明许多种土的应力 - 应变性状几乎是线弹性的, 并且与再次加载过程所处的应力水平无关 [7-9]. 我们实验所采用的福建标准砂、常规三轴压缩实验所得的结果也是这样, 如图 5 所示.

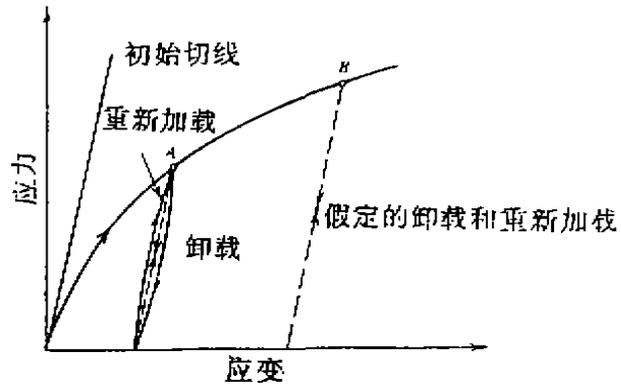


图 1 加载 - 卸载过程的近似表示

文献 [6] 提出的模拟循环荷载下非凝聚土的本构模型具有传统的增量理论的结构. 在三维笛卡尔坐标系中, 模型的数学表达可以写成:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{9K} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \right) \quad (3)$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi = 0 \quad (4)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q / \partial \sigma_{ij}}{|\partial Q / \partial \sigma_{rs}|} \quad (5)$$

经过冗长的张量运算, 最终可以得到加载时弹塑性刚度 [6]:

$$C_{ijkl}^{e-p} = C_{ijkl}^e - \frac{C_{mnlk}^e \frac{\partial F}{\partial \sigma_{mn}} \left[ 2G \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{uv}} + \left( K - \frac{3G}{3} \right) \delta_{uv} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{uv}} \delta_{uv} \right]}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \left[ \left( K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{pq} \left( \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{rs}} \delta_{rs} \right) + 2G \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{rs}} \right] - \frac{\partial F}{\partial \xi} \left| \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{rs}} \right|}} \quad (6)$$

### 3 数值计算中对偏离屈服面的修正

土本构模型所预言的理论曲线是通过数值积分来求得的. 如上所述的模拟循环荷载作用的新的土本构模型, 其应力增量与应变增量之间的关系式如式 (6) 所示, 从变形过程中任何一个给定的阶段, 由给定的应变增量计算相应的应力增量, 总的应力与应变之间的关系式可由下式得到:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_0\} + \int \{d\sigma\} = \int [C]^{ep} \{d\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (7)$$

在数值运算中, 上式可以用下列数值积分的表达式来求得:

$$\{\sigma\} = \sum_{i=1}^N [C]_{i-1}^{ep} \{\Delta\varepsilon\}_i + \{\sigma_0\} \quad (8)$$

上式中的  $N$  值是用来近似表示实际非线性应力-应变过程所用的线性片段的总数. 计算的精度依赖于增量的大小, 较小的增量能得到较高的精度的近似值, 但所耗的计算时间较多. 所以在试算过程中要不断比较、调整方案, 以选择一最佳步长使得能在权衡计算耗费与较高精度的比较中取得一最佳的方案.

其数值计算的步骤大致如下:

(1) 由应变增量  $\{d\varepsilon_i\}$  计算应力增量  $\{d\sigma_i\}$ :

$$\{d\sigma_i\} = [C]_{i-1}^{ep} \{d\varepsilon_i\} \quad (9)$$

于是总应力就可以由下式给出:

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + \{d\sigma_i\} \quad (10)$$

(2) 计算相应的  $\alpha_i$  值, 并将相应的  $\alpha_i$  值与  $\sigma_i$  值代入  $F$  的计算公式中

(3) 判别是加载还是卸载, 这可通过判定  $F \leq 0$  或  $F > 0$  来确定. 如果  $F \leq 0$  表示是弹性加载或卸载, 则转入 (4), 如果  $F > 0$  则表示弹塑性加载, 则转入 (5).

(4)  $F \leq 0$ , 硬化参量保持不变, 总应力矢量为:

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_{i-1}\} + [C^e] \{d\varepsilon_i\} \quad (11)$$

注意到这里刚度矩阵是弹性矩阵.

(5) 材料开始是弹性的, 而加载后出现屈服, 如图 2 所示的从  $A$  到  $C$ . 这样, 从  $A$  到  $B$  材料是弹性的, 从  $B$  到  $C$  是塑性加载. 为了进行偏离屈服面修正, 必须估计  $C$  点的应力状态.

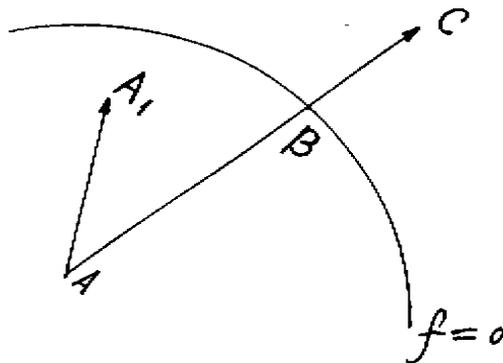


图 2 应力状态偏离屈服面的图示

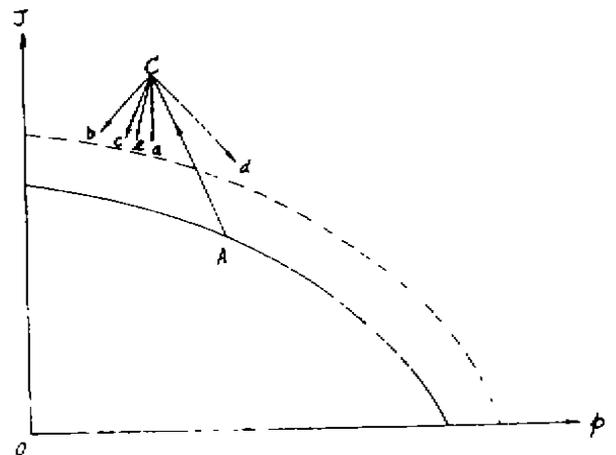
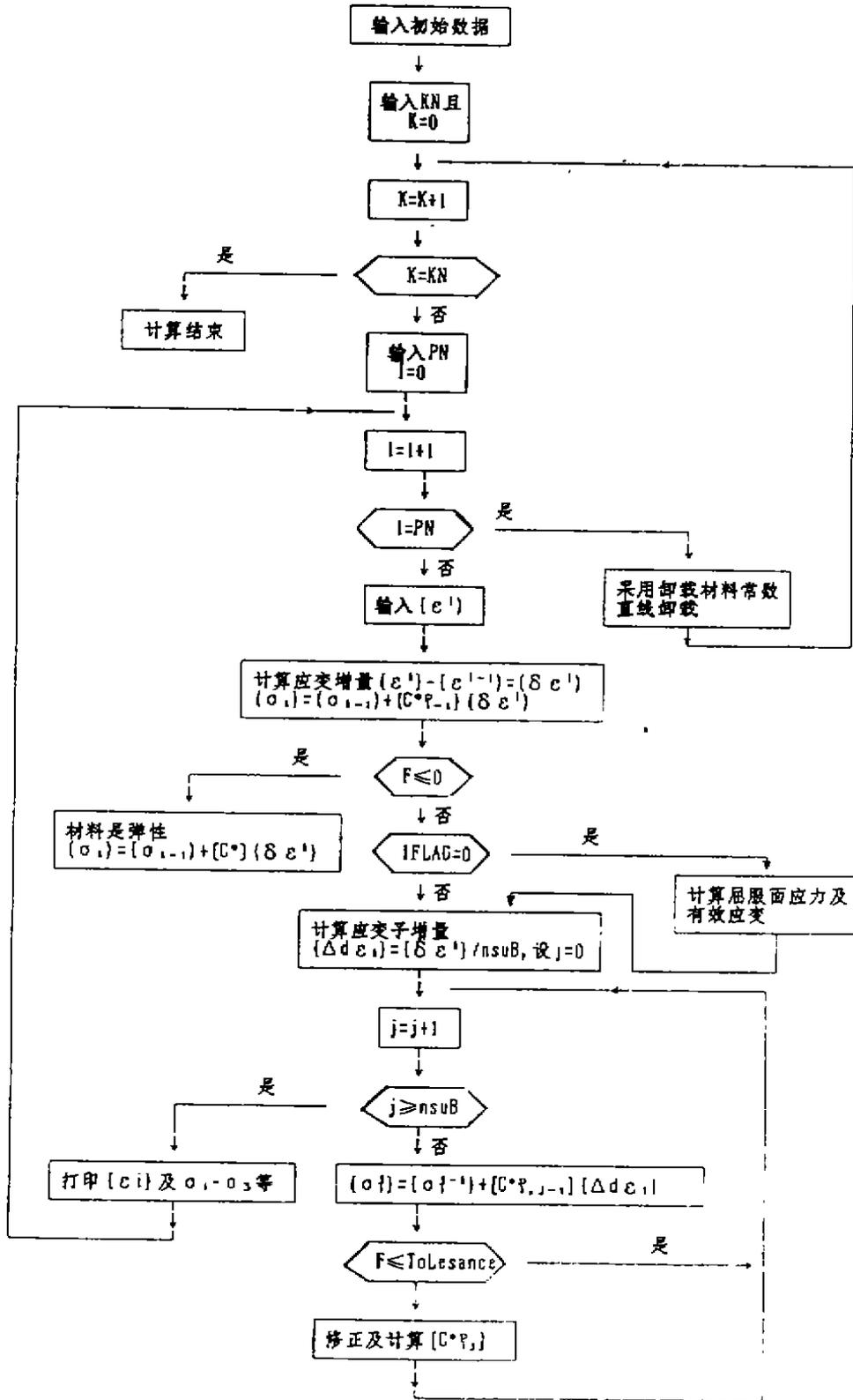


图 3 表示修正屈服面偏移的示意图



KN-加载次数  
 PN-每次加载点数  
 NSUB-应变子增量数

图 4 计算流程图

偏离屈服面的修正是弹-塑性本构方程数值计算中十分重要的一环,因为不论计算过程中步长取得怎么小,很难能保证应力增量加载的结果是刚好落在屈服面上.当应力增量加载的结果超过了屈服面时,就需要通过偏离修正将应力拉回到屈服面上.

偏离修正的方法通常有下列几种:

- a. 在应力空间的  $J \sim P$  图上,保持  $P$  为常数减少  $J$  的值,使应力点回到屈服面上<sup>[5]</sup>,如图 3 上的箭头 a.
- b. 沿着积累有效应力方向修正应力回落到屈服面上<sup>[3]</sup>,如图 3 上的箭头 b.
- c. 沿着塑性流动方向的反向投影修正使应力回落到屈服面上<sup>[1]</sup>,如图 3 上的箭头 c.
- d. 沿着总应力增量的方向修正使应力回落到屈服面上<sup>[2]</sup>,如图 3 上的箭头 d.
- e. 假设修正过程中总应变无变化,而弹性应变变化等于塑性应变的反向变化而使应力点回落到屈服面上<sup>[4]</sup>,如图 3 上的箭头 e.

从图 3 可以看出,方法 c 与方法 e 所示的箭头的方向十分接近,而计算表明用这两种方法所得结果几乎是一致的.而方法 b 与方法 d 所示的箭头方向非常不同,用这两种方法计算所得结果差异较大.上述五种方法中,沿着塑性流动方向的反向投影进行修正有较高的精度,所以本文中本构方程数值计算中对于屈服面偏离修正采用了方法 c.

为了提高精度,可以将应变增量  $\{d\epsilon_i\}$  分成相等的  $n$  份子应变增量,重复上述步骤进行数值计算.其详细的计算流程图如图 4 所示.

#### 4 结论

上述循环荷载下非凝聚土本构方程通过数值积分可求得计算曲线.理论计算曲线与常规三轴实验曲线的比较如图 5 所示.图 5(a) 是主应力差  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  随最大主应变  $\epsilon_1$  与最小主应变  $\epsilon_3$  变化的全过程,图 5(b) 是  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  随体积应变  $\epsilon_v$  的变化曲线.两者相比较,应力-应变曲线最大偏离小于 8%,体积应变曲线吻合得相当好.这表明本文所提出的循环荷

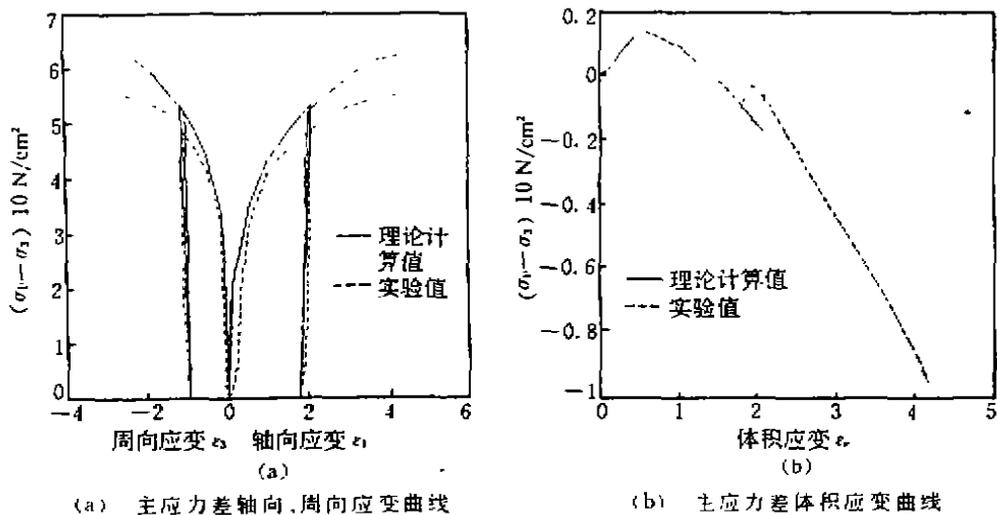


图 5 福建标准砂常规三轴应力-应变曲线的理论计算值与实验资料的比较

载作用下的土的本构模型及数值积分的计算程序用来模拟饱和砂土循环荷载条件下的本构特征是可行的。本文所采用的沿着塑性流动方向进行修正的方法有较高的精度，宜在弹塑性模拟的数值计算中推广应用。

### 参 考 文 献

- 1 G C Nayak, O C Zienkiewicz. Elasto-plastic stress analysis-a generalization for constitutive relations including strain softening. *Int J Numer Methods Eng*, 1972, 5: 113-135
- 2 J T Christian, A J Haggmann, W A Marr. Incremental plasticity analysis of frictional soils. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1977, 1: 343-375
- 3 D R J Owen, E Hinton. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Swansea: Pineridge Press, 1980
- 4 P A Vermeer. Formulation and analysis of sand deformation problems. Report No 195 of the Geotechnical Laboratory, Delft University of Technology, 1978
- 5 S W Sloan, M F Randolph. Numerical prediction of collapse loads using finite element methods. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 1982, 6: 47-76
- 6 章根德等. 循环荷载作用下土的本构模型. *固体力学学报*, 1998, (4): 299-305
- 7 H M Makhlof, J J Stewart. Factors influencing the modulus of elasticity of dry sand. In: *Proc of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*. Montreal, Vol 1, 1965. 298-302
- 8 I Molubeq. Elastic Behavior of Cohesionless Soil. *J of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1968, 94(5): 1215-1231
- 9 J M Duncan, C Y Chang. Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils. *J of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE*, 1970, 76(5): 1629-1653