

涂层/基体体系的界面应力分析*

吴臣武^{1,2} 陈光南¹ 张 坤¹ 罗耕星¹ 梁乃刚¹⁽¹⁾中国科学院力学研究所,北京 100080) ⁽²⁾中国科学院研究生院,北京 100049)

摘 要 针对热防护涂层的承载特征,建立了涂层、基体体系的平面应变模型.以均匀应变差比拟热膨胀失配,基于最小功原理,推导了完整涂层/基体界面应力的级数解.分析结果表明,在自由端面附近,界面应力集中明显,其峰值达到了与涂层内拉应力相当的量级.涂层膨胀或收缩,界面正应力分别呈现压应力或拉应力状态,界面剪应力也发生方向交变.

关键词 涂层,界面,应力,级数解

0 引言

研究表明,循环的热载荷导致的界面应力集中是热防护涂层失效的主要因素.一般认为,涂层的失效首先从涂层断裂开始,然后出现涂层的剥落.如图 1 所示,涂层内出现垂直界面的表面裂纹、表面裂纹扩展至界面深入基体,最后出现界面裂纹.界面裂纹扩展、汇聚,将导致涂层剥落失效^[1,2].当涂层收缩(或膨胀)受到基体约束时,基体将通过界面作用拉伸(或压缩)涂层.涂层与基体的应变失配引起的界面应力集中是界面裂纹萌生的直接诱因.



图 1 涂层的一种典型破坏模式

于结构尺度的多层次性,导致网格尺寸跨度很大,或者需要庞大的网格数目才能达到精度要求.

针对热防护涂层的承载特点,本文首先建立了涂层、基体平板试样的平面应变模型,以均匀应变差比拟涂层/基体的热失配,基于最小功原理,推导了界面应力的级数解,给出了界面应力的解析表达式.

1 基本假设及求解

界面应力包括沿界面的剪应力和垂直界面的正应力,如图 2 所示.简化起见,本文在求解过程中首先引入以下基本假设

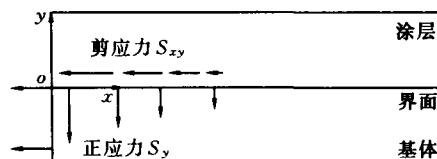


图 2 自由端面附近界面应力

对于层状复合材料结构的层间应力,国内外已有不少的积累.张福范^[3]推导了复合材料杆、带盖板的叠层梁等的层间应力级数解,富明慧等^[4]分析了夹芯板轴对称附加应力,王熙等^[5]求解了叠层壳的层间应力. Whitcomb 等用叠加法求解了叠层结构自由端面附近的层间应力^[6].然而,对于涂层/基体体系而言,涂层厚度往往远小于基体厚度,且基体、涂层之间往往通过界面应力来协调变形,关于这种结构特点的界面应力目前一般利用数值分析手段如有限单元法,其解析解尚未见报导.数值分析往往由

(1) 结构处于线弹性、微小变形阶段;本问题作为平面应变问题提出,只考虑 oxy 面内应变分量,即认为 $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

(2) 基体厚度远大于涂层厚度,所以假定结构没有弯曲,忽略弯曲正应力;简化起见,假设 x 方向正应力沿 y 方向均匀,即 $\partial\sigma_x/\partial y = 0$.

(3) 模型认为自由端面无剪应力,根据剪应力互等定理,界面剪应力在自由端面处亦为 0.且只考虑理想、完整的界面.

涂层、基体体系结构尺寸如图 3 所示,其中 t_c, t_s

* 自然科学基金(50471087,50531060,10572140)资助.
2005-05-03 收到第 1 稿,2005-12-05 收到修改稿.

分别表示涂层、基体的厚度; 试件宽度为 $2l$. 基体左右两侧作用均匀的面力 $\bar{\sigma}$, 其中

$$\bar{\sigma} = \bar{\epsilon} \times (E_s + E_c \times \frac{t_c}{t_s}) \quad (1)$$

式中 $\bar{\epsilon}$ 表示基体、涂层的平均应变差值, E_s 和 E_c 分别是基体与涂层的弹性模量. 据对称性, 可取试件的右半部分分析.

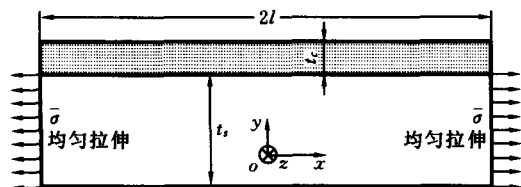


图 3 涂层/基体体系结构及载荷

以界面中点为原点分别建立涂层、基体的坐标系如图 4(a)所示. 图 4(b)、(c)显示的是涂层、基体微元的静力(矩)平衡, 其中 4(b)的下图是涂层的全高度微元, 4(b)上图所示的微元下表面离界面的距离是 y 坐标的绝对值; 4(c)的上图是基体的全高度微元, 4(c)下图所示的微元上表面离界面的距离是 y 坐标的绝对值. 其中 $S(S_y)$ 、 $Q(Q_y)$ 分别为正应力的合力及剪应力的合力, 可见 S 、 Q 表示全高度截面内的正应力和剪应力的合力, 只是 x 的函数, 而 S_y 、 Q_y 表示部分高度(从涂层上表面截出高度为 $t_c + y$ 的微元)截面内的正应力和剪应力的合力, 是 x 和 y 的函数. S' (S'_y)、 Q' (Q'_y) 与 $S(S_y)$ 、 $Q(Q_y)$ 定义类似.

以级数形式表示界面剪应力 τ_0 、界面正应力 σ_0 如下

$$\tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \sigma_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (2)$$

第一步, 分析 a_n 和 b_n 的关系. 取涂层微元 $dx \times t_c \times 1$ 如图 4(b)下图所示, 由平衡关系 $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M = 0$ 可得

$$\frac{dS}{dx} = -1 \times \tau_0, \quad \frac{dQ}{dx} = -1 \times \sigma_0, \quad Q = \frac{1 \times t_c}{2} \tau_0$$

从以上三式可得

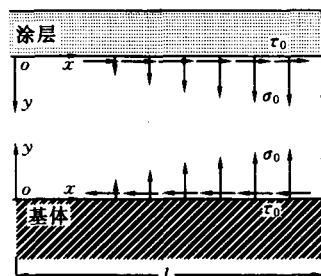
$$\sigma_0 = -\frac{t_c}{2} \frac{d\tau_0}{dx}, \quad \text{及} \quad b_n = -\frac{t_c \pi}{2l} n a_n \quad (3)$$

第二步, 写出涂层、基体内部的应力分量. 针对涂层, 承上由图 4(b)下图得

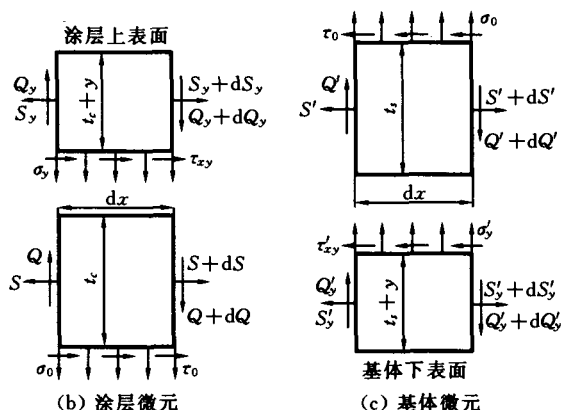
$$\frac{dS}{dx} = -1 \times \tau_0$$

$$S = \int_l^x dS = -\frac{l}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos(n\pi) - \cos \frac{n\pi x}{l})$$

$$\sigma_x = \frac{S}{1 \times t_c} = -\frac{l}{\pi t_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos(n\pi) - \cos \frac{n\pi x}{l}) \quad (4)$$



(a) 界面应力图



(b) 涂层微元

(c) 基体微元

图 4 涂层基体界面应有尽有力及微(段)元静力平衡图

由图 4(b)上图的平衡关系, 可得

$$\sum X = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} (t_c + y) = \frac{1}{t_c} (t_c + y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (5)$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \sigma_y = -\frac{dQ_y}{dx} = -\frac{\pi}{2lt_c} (t_c + y)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (6)$$

且由平面应变假设知

$$\sigma_z = \mu_c (\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (7)$$

其中 μ_c 是涂层的泊松比.

针对基体, 由图 4(c)上图可得

$$\left\{ \begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow \frac{dS'}{dx} = 1 \times \tau_0 \\ S' &= \bar{S} + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos(n\pi) - \cos \frac{n\pi x}{l}) \\ \bar{S} &= \bar{\sigma} \times t_s \times 1 \\ \sigma'_x &= \frac{S'}{1 \times t_s} = \bar{\sigma} + \frac{1}{\pi t_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} (\cos(n\pi) - \cos \frac{n\pi x}{l}) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

同理,由图 4(c)下图可得

$$\tau'_{xy} = -\frac{1}{t_s}(t_s + y) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (9)$$

$$\sigma'_y = -\frac{\pi}{2lt_s}(t_s + y)^2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (10)$$

$$\text{同样有 } \sigma'_z = \mu_s(\sigma'_x + \sigma'_y), \quad \tau'_{xz} = 0, \quad \tau'_{yz} = 0 \quad (11)$$

其中 μ_s 是基体的泊松比。

第三步,确定系数 a_n . 满足变形协调条件的应力状态一定满足余能最小的条件,当体力、面力一定时,最小余能原理退化为最小功原理^[7]. 现以最小功原理确定系数 a_n . 涂层、基体的应变能可表示为

$$U = \int_0^l \int_0^{t_s} \left[\frac{1}{2E_c^*}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu_c^*}{E_c^*} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G_c} \tau_{xy}^2 \right] \times 1 \times dx dy + \int_0^l \int_0^{t_s} \left[\frac{1}{2E_s^*}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2) - \frac{\mu_s^*}{E_s^*} \sigma_x' \sigma_y' + \frac{1}{2G_s} \tau_{xy}'^2 \right] \times 1 \times dx dy \quad (12)$$

其中, $E_c^* = E_c / (1 - \mu_c^2)$, $\mu_c^* = \mu_c / (1 - \mu_c)$, $E_s^* = E_s / (1 - \mu_s^2)$, $\mu_s^* = \mu_s / (1 - \mu_s)$; $G_c = E_c / [2(1 + \mu_c)]$, $G_s = E_s / [2(1 + \mu_s)]$. 将应力分量代入(12)式,据最小功原理 $\partial U / \partial a_n = 0$,化简得

$$a_n = -C \frac{n \cos(n\pi)}{n^4 + 2\eta^2 + p^2} \quad (13)$$

其中 p, η, C 分别为

$$\left\{ \begin{aligned} p^2 &= \frac{\frac{1}{\pi^2}(1+r_e r_i)}{\frac{\pi^2}{4}(r_i)^4 \left[\frac{1}{5} + \frac{r_e}{r_i} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1}{r_i} + \frac{8}{15} \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 \right) \right]} \\ 2\eta &= \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{r_e}{r_i} + \mu_s^* (r_\mu - r_e)}{\frac{\pi^2}{4}(r_i)^2 \left[\frac{1}{5} + \frac{r_e}{r_i} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1}{r_i} + \frac{8}{15} \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 \right) \right]} \\ C &= \frac{\frac{2}{\pi} \left[r_e r_i \bar{\sigma} + \frac{1}{\pi} (1+r_i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos(n\pi) \right]}{\frac{\pi^2}{4}(r_i)^4 \left[\frac{1}{5} + \frac{r_e}{r_i} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1}{r_i} + \frac{8}{15} \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 \right) \right]} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

式中 $r_e = \frac{E_c^*}{E_s^*}$, $r_\infty = \frac{\mu_c^*}{\mu_s^*}$, $r_i = \frac{t_c}{t_s}$, $r_l = \frac{t_c}{l}$.

式(14)中的级数收敛^[8],对该级数求和,可写出界面应力解析表达式,当 $p > \eta$ 时(约定 p 取正值)

$$\tau_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = -C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi) \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta^2 + p^2} = \frac{C\pi}{4\beta\gamma(\text{sh}^2(\beta\pi) + \sin^2(\gamma\pi))} \times \left[\text{ch}(\beta\pi) \sin(\gamma\pi) \text{sh} \left(\frac{\beta\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{\gamma\pi x}{l} \right) - \right.$$

$$\left. \text{sh}(\beta\pi) \cos(\gamma\pi) \text{ch} \left(\frac{\beta\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{\gamma\pi x}{l} \right) \right] \quad (15)$$

其中 $\beta = \sqrt{1/2(p + \eta)}$, $\gamma = \sqrt{1/2(p - \eta)}$.

$$\sigma_0 = -\frac{t_c}{2} \frac{d\tau_0}{dx} = \frac{t_c}{2l} \frac{C\pi^2}{4\beta\gamma(\text{sh}^2(\beta\pi) + \sin^2(\gamma\pi))} \times \left[(\gamma \text{ch}(\beta\pi) \sin(\gamma\pi) + \beta \text{sh}(\beta\pi) \cos(\gamma\pi)) \times \text{sh} \left(\frac{\beta\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{\gamma\pi x}{l} \right) - (\beta \text{ch}(\beta\pi) \sin(\gamma\pi) - \gamma \text{sh}(\beta\pi) \cos(\gamma\pi)) \times \text{ch} \left(\frac{\beta\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{\gamma\pi x}{l} \right) \right] \quad (16)$$

当 $\eta > p$ 时

$$\tau_0 = -C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi) \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta^2 + p^2} = \frac{C\pi}{4\sqrt{\eta^2 - p^2}} \left[\frac{\text{sh} \left(\frac{\gamma\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\gamma\pi)} - \frac{\text{sh} \left(\frac{\beta\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\beta\pi)} \right] \quad (17)$$

其中 $\beta = \sqrt{\eta + \sqrt{\eta^2 - p^2}}$, $\gamma = \sqrt{\eta - \sqrt{\eta^2 - p^2}}$.

$$\sigma_0 = -\frac{t_c}{2} \frac{d\tau_0}{dx} = \frac{t_c}{2l} \frac{C\pi^2}{4\sqrt{\eta^2 - p^2}} \left[\frac{\beta \text{ch} \left(\frac{\beta\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\beta\pi)} - \frac{r \text{ch} \left(\frac{\gamma\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\gamma\pi)} \right] \quad (18)$$

当 $p = \eta$ 时

$$\tau_0 = -C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi) \sin \frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 2\eta^2 + p^2} = \frac{C\pi^2}{4\beta} \left[\frac{\text{sh} \left(\beta \frac{\pi x}{l} \right) \text{ch}(\beta\pi)}{\text{sh}^2(\beta\pi)} - \frac{x}{l} \frac{\text{ch} \left(\beta \frac{\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\beta\pi)} \right] \quad (19)$$

其中 $\beta = \sqrt{1/2(p + \eta)} = \sqrt{p}$.

$$\sigma_0 = -\frac{t_c}{2} \frac{d\tau_0}{dx} = \frac{t_c}{2l} \frac{C\pi^2}{4\beta} \left[\frac{\text{ch} \left(\beta \frac{\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\beta\pi)} + \frac{\beta\pi x}{l} \frac{\text{sh} \left(\beta \frac{\pi x}{l} \right)}{\text{sh}(\beta\pi)} - \beta\pi \frac{\text{ch} \left(\beta \frac{\pi x}{l} \right) \text{ch}(\beta\pi)}{\text{sh}^2(\beta\pi)} \right] \quad (20)$$

2 算例

取 $l = 3 \text{ mm}$, $r_i = 0.05$, $r_l = 0.1$; $r_e = 0.67$, $r_\mu = 0.5$; $\mu_s^* = 0.428$, 利用式(14)可求得 $p = 3.811$, $\eta = 1.277$ 及 $C = 0.797\bar{\sigma}$ (将 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cos(n\pi) \approx -0.095C$ 代入(14)的第三式可得之). 由 $p > \eta$ 的解, 可得 $\beta = 1.595$, $\gamma = 1.126$, 代入界面应力表达式(15)、(16), 并绘出距离边界 $0-l$ 长度内界面应力曲线如图 5 所

示,可见界面剪应力在端部为0,最大值出现在端部附近.自由端的界面正应力最大,随后快速减小、反向并逐渐趋近于0.这与席军^[9]针对热障涂层界面应力的微分方程数值解符合得较好.易知,若 σ 符号改变,则界面应力亦将相应的改变符号.加热阶段,涂层膨胀受阻,端部界面正应力为压应力,远离边界为拉应力;冷却阶段,涂层收缩受阻,端部界面正应力为拉应力,远离边界为压应力.从而,循环热载荷将在界面处特别是自由端面附近产生交变的应力集中状态,导致界面破坏从自由端面附近萌生.

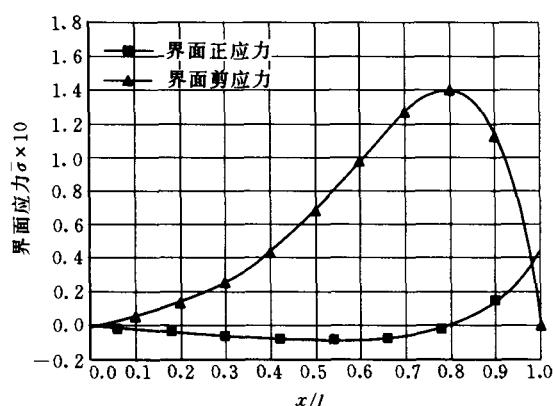


图5 界面应力沿界面分布图

3 结论

本文推导了涂层/基体界面的界面应力的级数解.级数解较好的反映了涂层/基体界面的应力集中.需要说明的是,该级数解不能反映界面应力的边缘奇异性.

本文提供的级数解已编制简短的应用程序,可

方便的计算涂层/基体体系的界面应力分布,可便捷的对涂层/基体体系的不同结构参数、材料匹配等进行界面应力分析.

在涂层承受循环热载荷时,将在涂层界面内特别是自由端面附近产生交变的应力集中状态,导致界面破坏从自由端面附近萌生.

参 考 文 献

- 1 Qiu Wei, Kang Yilan, Sun Qingchi, Qin Qinghua, Lin Yu. Stress analysis and geometrical configuration selection for multilayer piezoelectric displacement actuator. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, 17(4): 323~329
- 2 Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in Applied Mechanics*, 1992, 29: 63~191
- 3 张福范. 复合材料层间应力. 北京: 高等教育出版社, 1993
- 4 富明慧, 肖成锋. 夹芯板轴对称脱层分析的高阶模型. *固体力学学报*, 2004, 25(4): 455~460
- 5 王熙, 李思简. 两端自由的叠层壳体的层间应力分布. *固体力学学报*, 1993, 14(1): 81~85
- 6 Whitcomb J D, Raju I S. Superposition method for analysis of free-edge stresses. *J Composite Materials*, 1983, 17: 492~508
- 7 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981
- 8 严宗达. 结构力学中的富里叶级数解法. 天津: 天津大学出版社, 1989
- 9 席军. 热障涂层材料在热-力联合作用下的变形和破坏研究. 中国科学院力学研究所博士学位论文, 2003

ANALYSIS ON THE INTERFACIAL STRESSES FOR A COATING AND SUBSTRATE SYSTEM

Wu Chenwu^{1,2} Chen Guangnan¹ Luo Gengxing¹ Zhang Kun¹ Liang Naigang¹

⁽¹⁾ Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080

⁽²⁾ Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100049

Abstract A plane strain model is constructed for a thermal protective coating, in which the thermal mismatch is analogized with uniform difference in strain. The interfacial stresses are obtained in series form based on the principle of minimum work. The results indicate that there exists a distinct interfacial stresses concentration near the free end, and the maximum interfacial stresses can reach the order of tension in coating.

Key words coating, interface, stresses, series solutions