

文章编号: 0258-1825(2003)03-0342-09

# 双曲守恒型方程的二阶摄动有限差分格式

申义庆<sup>1</sup>, 高智<sup>2</sup>, 杨顶辉<sup>1</sup>

(1. 清华大学数学科学系, 北京 100084; 2. 中国科学院力学研究所 LHD 实验室, 北京 100080)

**摘要:**对双曲守恒型方程, 将其一阶迎风格式空间差商的常系数摄动展开为时间步长和空间步长的幂级数, 通过确定幂级数系数而获得二阶精度的摄动有限差分(PFD)格式。进而从双曲守恒型方程的通量分裂型一阶迎风格式出发, 通过类似的摄动展开方法, 获得空间精度为二阶的通量分裂形式的摄动有限差分(FPFD)格式。这两类格式保留了一阶守恒迎风格式的简洁结构形式, 使用三节点即可达到二阶精度, 又避免了三点二阶格式的非物理数值振荡。并将这两类格式推广应用至双曲守恒型方程组, 最后通过模型方程和一维激波管流动的数值算例验证了格式的高精度、高分辨率性质。

**关键词:** 计算流体力学; 双曲守恒型方程; 无振荡格式; 摄动有限差分格式

**中图分类号:** O351.2      **文献标识码:** A

## 0 引言

非线性双曲型方程的一个重要特点是无论初值是否光滑, 其解都可能产生间断。一阶迎风格式能得到激波的单调解, 但具有较大的差分耗散, 而二阶中心格式给出的数值解又会产生非物理振荡。要得到高精度高分辨率差分格式, 通常需要使用较多的节点和引入某种限制性条件, 如 TVD、ENO 等格式<sup>[1,2]</sup>。多节点格式会给边界条件以及边界附近点的处理带来一定的困难。

摄动有限差分(PFD)方法<sup>[3-5]</sup>是近年来提出的构造高精度、高分辨率差分格式的一种有效途径, 其思想是把微分方程差分离散的概念加以扩充, 既差分离散微商项又离散非微商项(包括微商系数), 在微商用直接差分(指一阶前差和后差、二阶中心差分)近似且维持节点数不变的前提下, 把非微商项摄动展开成步长的幂级数, 幂级数的待定系数通过提高格式精度来求出, 由此获得了对流扩散方程、对流扩散反应方程、二阶双曲型方程和抛物型诸微分方程的差分方程的精确数值解(亦称摄动精确数值解格式)<sup>[3-5]</sup>、kdv 方程的三节点摄动高精度格式<sup>[5]</sup>、对流扩散方程的摄动四阶紧致差分格式(包括指数型格式)<sup>[6,7]</sup>。这类 PFD 格式具有一阶迎风格式的简洁结构形式, 在一维、二维和三维情况下分别使用 3、5 和 7 个节点, 对模型方程和不可压缩流动的众多计算证实了 PFD 格式的优良性质<sup>[3-7]</sup>。

本文对一阶双曲守恒型方程的时间一阶向后差分 and 空间一阶迎风差分格式, 把空间

\* 收稿日期: 2002-01-10; 修订日期: 2002-05-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10032050, 40174012)和中科院力学所 LHD 创新项目资助.

作者简介: 申义庆(1969-), 男, 清华大学博士后, 主要从事流体力学数值方法及模拟.

差分项的常数按步长摄动展开成时间和空间步长的幂级数, 幂级数的待定系数通过提高格式精度与保持高分辨率来求出, 由此得到了双曲守恒型方程的二阶精度无振荡 PFD 格式, 进而构造了通量分裂型<sup>[8,9]</sup>空间精度为二阶的 PFD 格式。双曲守恒型方程的 PFD 格式保留了一阶迎风格式的简洁结构形式, 只需三个节点即可达到二阶精度, 又避免了三点二阶中心格式的非物理数值振荡。本文通过计算具有代表性的一维 Burgers 方程和一维激波管问题, 验证了文中提出的 PFD 格式和 FPDF 格式的高精度高分辨率特性。

## 1 双曲守恒方程的二阶摄动差分格式

考虑如下双曲守恒型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

其一阶迎风格式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + \frac{1}{2} \frac{f_i - f_{i-1}}{x} + \frac{1}{2} \frac{f_{i+1} - f_i}{x} = 0 \quad (2)$$

其修正微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} t + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} t^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} t^3 \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} x^2 - \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} x^3 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\text{sign}(\partial f / \partial u |_j)$ 。把格式(2)中空间差分的常数  $u_0 = 1$  摄动展开为  $t$  和  $x$  的幂级数(简洁起见, 以下省略了下标  $j$ ):

$$u_p = 1 + u_{x1} x + u_{x2} x^2 + u_{x3} x^3 + u_{t1} t + u_{t2} t^2 + u_{t3} t^3 + \dots \quad (4)$$

再把式(4)代入格式(2)得到如下摄动有限差分(PFD)格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + \frac{1}{2} u_p \frac{f_i - f_{i-1}}{x} + \frac{1}{2} u_p \frac{f_{i+1} - f_i}{x} = 0 \quad (5)$$

PFD 格式(5)的修正微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u_p \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} t + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} t^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} t^3 \\ & - \frac{1}{2} u_p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x + \frac{1}{3!} u_p \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} x^2 - \frac{1}{4!} u_p \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} x^3 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

将(4)代入修正微分方程(6)得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{n=1} u_{xn} \frac{\partial f}{\partial x} x^n + \sum_{n=1} u_{tn} \frac{\partial f}{\partial x} t^n + \sum_{n=1} \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} t^n + \sum_{n=1} u_{tn} x^n = 0 \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} u_{tn} &= \frac{1}{(n+1)!} \\ u_{xn} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ u_{x1} &= -\frac{1}{2} u_{x1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \end{aligned}$$

$$3 = -\frac{1}{2} u_{x2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} u_{x1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

.....

$$n = \sum_{r=1}^n \frac{1 + (-1)^r + (-1)^{r+1}}{2} \frac{(-1)^r}{(r+1)!} u_{x, n-r} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x^{r+1}}$$

其中,  $u_{x0} = 1$ 。

由修正微分方程(7)可知,若下式成立

$$\sum_{n=1}^{M-1} u_{xn} \frac{\partial f}{\partial x} x^n = - \sum_{n=1}^{M-1} n x^n + O(x^M) \quad (8a)$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} u_{tn} \frac{\partial f}{\partial x} t^n = - \sum_{n=1}^{N-1} n \frac{\partial^{n+1} u}{\partial t^{n+1}} t^n + O(t^N) \quad (8b)$$

则 PFD 格式(5)的空间和时间精度分别达到  $M$  阶和  $N$  阶。本文考虑空间为二阶(即  $M = 2$ )的情形(对时间方向,可采用其他高阶格式,如 Runge-Kutta 方法等),此时,式(8a)简化为

$$u_{x1} \frac{\partial f}{\partial x} x = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x + O(x^2) \quad (9)$$

对节点  $j$ ,由式(9)可求得  $u_{x1}$

$$u_{x1} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j - \frac{\partial f}{\partial x} /_j \right], & \frac{\partial f}{\partial x} /_j \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

在不影响精度和不增加节点的前提下,上式中的  $\frac{\partial f}{\partial x} /_j$  和  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j$  可如下求出:

$$\frac{\partial f}{\partial x} /_j = \begin{cases} \frac{f_j - f_{j-1}}{x} + O(x) & |f_j - f_{j-1}| \neq |f_{j+1} - f_j| \\ \frac{f_{j+1} - f_j}{x} + O(x) & \text{else} \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_j = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{x^2} + O(x^2) \quad (12)$$

其中对一阶导数  $\frac{\partial u}{\partial x} /_j$  的差分近似(11)是为了使在可能满足条件的摄动量中,取相对于迎风格系数变化较小的一个,这样能保证所构造的格式基本不产生非物理数值振荡。至此,我们求得了双曲守恒型方程(1)的 PFD 格式,该格式的时间和空间精度均为二阶。

## 2 利用通量分裂形式的系数修正格式

将方程(1)中的通量函数进行如下分裂<sup>[8,9]</sup>

$$f = f^+ + f^- \quad (13)$$

其中  $\frac{\partial f^+}{\partial x} \geq 0$ ,  $\frac{\partial f^-}{\partial x} < 0$ , 因此方程(1)的一阶迎风格式为:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{t} + \frac{f_j^+ - f_{j-1}^+}{x} + \frac{f_{j+1}^- - f_j^-}{x} = 0 \quad (14)$$

格式 (14) 的修正微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(f^+ + f^-)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} t - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} x^2 + O(t^2, x^2) = 0 \quad (15)$$

把格式 (14) 中空间差分  $f_j^+ - f_{j-1}^+$  和  $f_{j+1}^- - f_j^-$  的系数  $u_{j+} = 1$  和  $u_{j-} = 1$  摄动展开为  $x$  和  $t$  的幂级数

$$u_{p+} = 1 + \sum_{n=1} u_{xn+} x^n + \sum_{m=1} u_{tm+} t^m \quad (16a)$$

$$u_{p-} = 1 + \sum_{n=1} u_{xn-} x^n + \sum_{m=1} u_{tm-} t^m \quad (16b)$$

则格式 (14) 的通量分裂形式的摄动有限差分 (FPFD) 差分格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{t} + u_{p+} \frac{f_j^+ - f_{j-1}^+}{x} + u_{p-} \frac{f_{j+1}^- - f_j^-}{x} = 0 \quad (17)$$

FPFD 格式 (17) 的修正微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_{p+} \frac{\partial f^+}{\partial x} + u_{p-} \frac{\partial f^-}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} t - \frac{1}{2} u_{p+} \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} x + \frac{1}{2} u_{p-} \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} x + \dots = 0 \quad (18)$$

将 (16) 代入 (18), 在空间方向保留到的一阶量, 于是修正微分方程 (18) 简化为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(f^+ + f^-)}{\partial x} + u_{x1+} \frac{\partial f^+}{\partial x} x + u_{x1-} \frac{\partial f^-}{\partial x} x \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} x + O(x^2) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

由修正微分方程 (19) 可知, 若下式成立

$$\begin{aligned} u_{x1+} \frac{\partial f^+}{\partial x} x &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^+}{\partial x^2} x + O(x^2) \\ u_{x1-} \frac{\partial f^-}{\partial x} x &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^-}{\partial x^2} x + O(x^2) \end{aligned} \quad (20)$$

则格式 (17) 是空间精度为二阶的通量分裂形式的摄动有限差分 (FPFD) 格式。

求解  $u_{x1+}$ 、 $u_{x1-}$  可类似于 (9) 式中的求法。

本格式可直接应用于双曲守恒型方程组。

### 3 对摄动展开系数 $u_{x1}$ 的分析

由式 (10)、(11) 和 (12) 推知摄动修正量  $u_{x1} x$  为

$$u_{x1} x = 2 \begin{cases} \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{f_j - f_{j-1}} = \frac{f_{j+1} - f_j}{f_j - f_{j-1}} - 1, & |f_j - f_{j-1}| \neq |f_{j+1} - f_j| \\ \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{f_{j+1} - f_j} = 1 - \frac{f_j - f_{j-1}}{f_{j+1} - f_j} & \text{else} \end{cases} \quad (21)$$

(1) 当通量  $f$  连续, 且  $j$  点不是极值点时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_{j+1} - f_j}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_j - f_{j-1}}{x} = f_j, \quad (f_{j+1} - f_j)(f_j - f_{j-1}) > 0$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 0} u_{x1} x = 0$

(2)  $f$  连续,  $j$  点是极值点时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_{j+1} - f_j}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_{j-1} - f_j}{x} = f_j = 0, \text{ 且 } (f_{j+1} - f_j)(f_j - f_{j-1}) < 0$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} |u_{x1} x| = 1$$

(3)  $f$  在  $j$  点左连续、右间断, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_j - f_{j-1}}{f_{j+1} - f_j} = 0, \text{ 因此有 } \lim_{x \rightarrow 0} u_{x1} x = \frac{1}{2}$$

$$\text{同理 } f \text{ 在 } j \text{ 点右连续、左间断, 有 } \lim_{x \rightarrow 0} u_{x1} x = -\frac{1}{2}$$

(4)  $f$  在  $j$  点为孤立点

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_{x1} x \text{ 为某一常数。}$$

由于在极值点或间断点, 摄动修正量不再保持为一小量, 因此需作进一步的改进。改进如下

$$u_p = \begin{cases} 1 & |u_{x1} x| \\ 1 + u_{x1} x & \text{else} \end{cases} \quad (22)$$

当应用于方程组时, 摄动展开系数为一向量级数  $u_p = (u_{p1}, u_{p2}, \dots, u_{pn})^T$ , 而对于向量  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ ,  $f_i$  与  $f_j (i \neq j)$  不一定具有相同的极值点和间断点, 因此在方程组的情况下, 摄动展开系数作如下修正:

$$u_{pi} = \begin{cases} 1 & \max(|u_{x1} x|, \dots, |u_{xn} x|) \\ 1 + u_{xi} x & \text{else} \end{cases} \quad (23)$$

本文计算中, 取  $\epsilon = 0.25$ 。

## 4 验证和应用

### 4.1 无粘非线性 Burgers 方程的数值验证

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, x) = 0.3 + 0.7 \sin(x) & \text{周期边界条件} \end{cases}$$

其中  $f(u) = u^2/2$ , 计算时间  $t = 2$ , 分裂方法采用  $f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm au)$ ,  $a = \max |f'(x)|$ 。图 1 给出 PFD 格式(5)与一阶迎风格式计算结果与准确解的比较, 计算中使用的网格点数  $N = 80$ ; 图 2 是通量分裂形式摄动有限差分 (FPFD) 与一阶迎风格式计算结果与准确解的比较, 网格点数  $N = 80$ , 可以看出摄动格式保持了一阶迎风格式的不振荡性质, 同时逼近精度与分辨率都较一阶迎风格式有明显提高。

### 4.2 粘性 Burgers 方程的数值验证

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -0.1 \leq x \leq 0.1 \\ u(0, x) = 0 \\ u(-0.1, t) = 1, u(0.1, t) = -1 \end{cases}$$

其中  $f(u) = u^2/2$ , 通量分裂方法与例 1 相同。本文计算了上述问题的定常解, 计算结果见图 3 和图 4。本算例验证了 PFD 格式对定常正激波的捕捉能力, 表明尽管是很强的激波, 本文 PFD 格式同样具有无振荡性质, 在精度方面也有所改进。

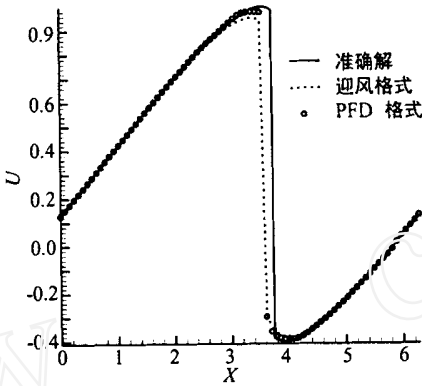


图 1 无粘 Burgers 方程,  $N = 80$

Fig. 1 Inviscid Burgers equation,  $N = 80$

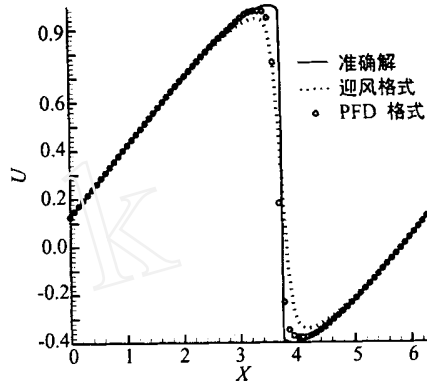


图 2 无粘 Burgers 方程,  $N = 80$

Fig. 2 Inviscid Burgers equation,  $N = 80$

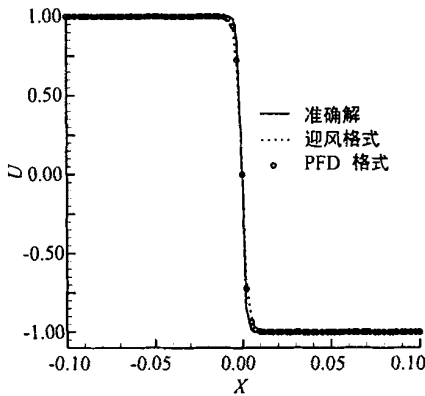


图 3 粘性 Burgers 方程,  $N = 80$

Fig. 3 Viscous Burgers equation,  $N = 80$

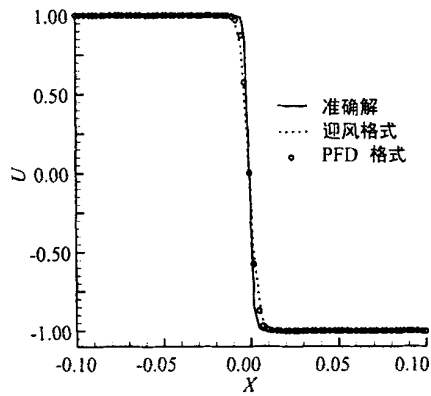


图 4 粘性 Burgers 方程,  $N = 80$

Fig. 4 Viscous Burgers equation,  $N = 80$

### 4.3 一维非定常可压缩气动方程组的数值模拟

一维非定常气动方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

其中  $u = ( \rho, u, p )^T$ ,  $f = ( \rho u, \rho u^2 + p, ( E + p ) u )^T$ , 对理想气体,  $E = \frac{p}{(\gamma - 1)} + \frac{u^2}{2}$ ,

为比热。采用 Steger-Warming 分裂技术<sup>[8]</sup>, 计算了激波管流动的 Sod 问题<sup>[10]</sup>和 Sjögreen 问题<sup>[11]</sup>。对 Sod 问题：

激波管长  $L = 1$ , 中点位于  $x = 0.5$  处。初始条件 ( $t = 0$ ) :

$$\begin{cases} L = 1, p_L = 1, u_L = 0 \\ R = 0.125, p_R = 0.1, u_R = 0 \end{cases}$$

计算时间  $t = 0.14$ , 网格点数  $N = 201$ , 计算结果见图 5 ~ 图 7。

对 Sjögreen 问题:

激波管长  $L = 1$ , 中点为  $x = 0.5$ 。初始条件 ( $t = 0$ ):

$$\begin{cases} L = 1, p_L = 0.4, u_L = -2 \\ R = 1, p_R = 0.4, u_R = 2 \end{cases}$$

计算时间  $t = 0.1$ , 网格点数  $N = 201$ , 计算结果见图 8 ~ 图 10。

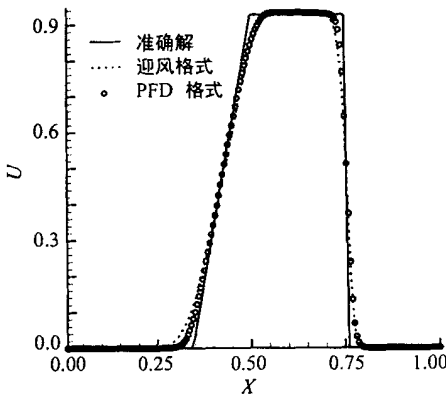


图 5 Sod 问题速度分布

Fig. 5 Velocity distribution of Sod problem

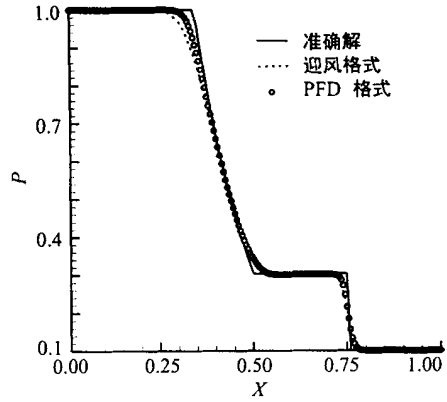


图 6 Sod 问题压力分布

Fig. 6 Pressure distribution of Sod problem

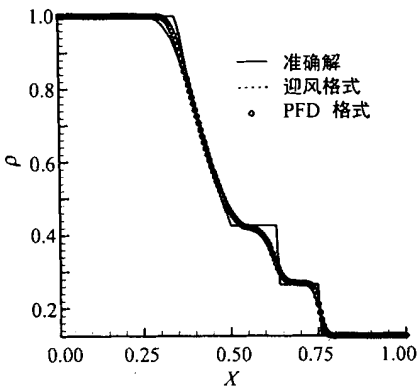


图 7 Sod 问题密度分布

Fig. 7 Density distribution of Sod problem

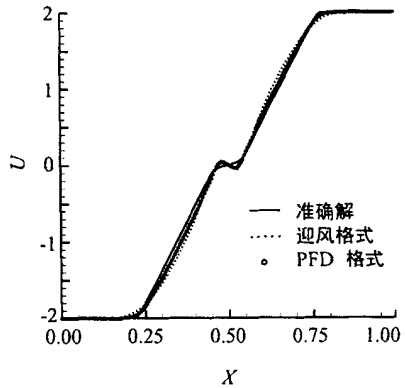


图 8 Sjögreen 问题速度分布

Fig. 8 Velocity distribution of Sjögreen problem

从图中可看出对于膨胀波和激波, 摄动格式相对于一阶迎风格式都得到了较大的改进, 特别是对于膨胀波逼近精度的提高, 在两个例子中都较为明显。对超音速膨胀波 (Sjögreen 问题) 情形, 现有的多数高精度差分格式在计算过程中出现了溢出现象<sup>[11]</sup>, 而本文 PFD 格式则表现了较好的性质。本算例中时间方向采用了二阶 Runge-Kutta 法。

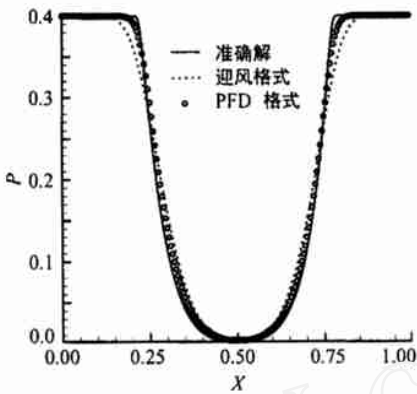


图9 Sjögreen 问题压力分布

Fig. 9 Pressure distribution of Sjögreen problem

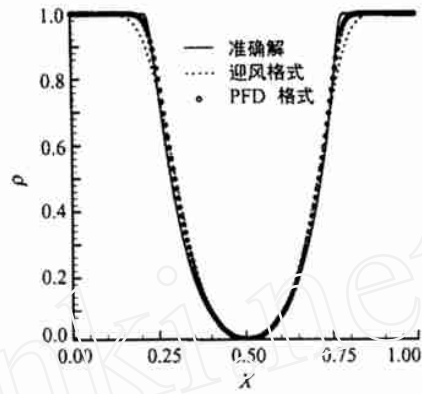


图10 Sjögreen 问题密度分布

Fig. 10 Density distribution of Sjögreen problem

## 5 结 论

对双曲守恒型方程,把它们一阶迎风格式中空间差商的常系数按步长摄动展开,展开幂级数的系数通过提高格式精度和保持高分辨率求出,由此获得具有高精度高分辨率的三点 PFD 差分格式。格式结构形式简洁,具有高精度和高分辨率的性质,且只使用三个结点,将很方便于难以确定多点边界条件的流动计算中使用。

## 参 考 文 献:

- [1] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Jour. Comput. Phys.*, 1983, 49:357-393.
- [2] HARTEN A, EENQUIST B, OSHER S and CHAKRAVARTHY S R. Uniformly high order accuracy essentially non-oscillatory schemes III [J]. *Jour. Comput. Phys.*, 1987, 71:231-303.
- [3] GAO Z. An infinite-order accurate upwind compact difference scheme for the convective diffusion equation [C]. Proc. of Asia Workshop on Computational Fluid Dynamics, Sept., 1994, Sichuan, China, 50-56.
- [4] 高智. 对流扩散方程的高精度差分算法[C]. 北京计算流体力学讨论会文集(第六辑), 1994, 1-23.
- [5] 高智. 摄动有限差分方法进展[J]. *力学进展*, 2000, 30(2):200-215.
- [6] 陈国谦, 高智. 对流扩散方程的四阶紧致高精度差分格式[J]. *计算数学*, 1992, (3):345-357.
- [7] CHEN G Q, GAO Z, YANG Z F. A perturbational  $h^4$  exponential difference scheme for convective diffusion equation [J]. *Jour. Comput. Phys.*, 1993, 104(1):129-139.
- [8] STEGER J L, WARMING R F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods [J]. *Jour. Comput. Phys.*, 1981, 40:263-293.
- [9] VAN LEER B. Flux vector splitting for the Euler equations [R]. *Lect. Notes in Phys.*, 1982, 170:507-512.
- [10] SOD G A. A survey of several finite difference methods for system of nonlinear hyperbolic conservation laws [J]. *Jour. Comput. Phys.*, 1978, 27:1-31.
- [11] EINHEDLT B, MUNZ C D, ROE P L and SJOGREEN B. On Godunov-type near low densities [J]. *Jour. Comput. Phys.*, 1991, 92:273-295.



## Second-order perturbational finite difference schemes for hyperbolic conservation equation

SHEN Yi-qing<sup>1</sup>, GAO Zhi<sup>2</sup>, YANG Ding-hui<sup>1</sup>

(1. Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing, 100084, China; 2. Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China)

**Abstract :** For hyperbolic conservation equation, the constant coefficients of first-order upwind scheme for space-derivative are expanded to power series of grid spacings of both time and space, then the second-order perturbational finite difference (PFD) scheme is obtained by determining the coefficients of the power series. According to the same way a spacious second-order flux splitting PFD (FPFD) scheme is also obtained. These two kinds of schemes remain the terse form of first-order upwind scheme. These schemes have second-order accurate and essentially non-oscillatory property. These two kinds of schemes are generalized and applied to hyperbolic conservation equations, their accuracy and resolution are numerically examined by using model equations and the shock-tube flows.

**Key words :** computational fluid dynamics; hyperbolic conservation equation; non-oscillatory scheme; perturbational finite difference scheme