

# 自适应光学对大气扰动波前的补偿效果研究 I 理论推导\*

张德良 姜文汉 吴旭斌

(中国科学院光电技术研究所, 成都 610209)

严海星 李树山

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

**摘 要** 在采用冻结湍流假设和几何光学近似的条件下, 得到了经自适应光学系统校正后的剩余波前相位扰动的结构函数。进而根据剩余相位结构函数与系统 Strehl 比的关系, 求出了自适应光学系统的补偿效果受系统的时空传递函数、大气湍流、光波传播路径上的横向风、观察目标的旋转角速度以及系统时间延迟影响情况的解析表达式。

**关键词** 自适应光学, 大气光学, 横向风, 空间带宽, 时间带宽, 球面波, 平面波。

## 1 引 言

当光波在大气中传输的时候, 由于大气湍流折射率分布随空间和时间随机变化, 使光波波前受到随机扰动, 从而导致光束质量大大下降。这必然使得与光波大气传输有关的光学系统受到严重困扰。特别是在天文观测方面, 这种困扰尤为明显。

自适应光学系统能够实时补偿大气湍流对光波波前的扰动<sup>[1]</sup>。因此, 自它诞生之日起, 就受到了极大的关注。但是由于大气湍流以及系统本身的复杂性, 迄今为止自适应光学系统的发展还有待进一步提高, 对光波所受大气湍流的扰动及其自适应光学补偿的研究也有待进一步深入。

自适应光学系统补偿大气湍流对光波波前的相位扰动时, 需要一束信标光以获取光波传输路径上大气湍流对光波波前的扰动信息。由于系统存在时间延迟  $\Delta t$ , 在  $t$  时刻从信标光获得的大气湍流信息, 只能用于补偿  $t + \Delta t$  时刻到达系统的光波。但又因为在光波的传输路径上存在横向风, 它不断地把路径上的湍流介质吹走, 使得在  $t + \Delta t$  时刻光波传输路径上的湍流状态与  $t$  时刻的湍流状态不完全相同。这不可避免地给系统的补偿带来误差。

已有若干文献涉及到横向风或者是横向阵风对自适应光学系统补偿的影响<sup>[2-7]</sup>。Greenwood 和 Fried 在研究波前补偿系统的功率谱和带宽要求时涉及到了横向风<sup>[2, 3]</sup>。Fried 研究

\* 国家科委 863 高技术项目。

收稿日期: 1997-07-25

了目标旋转角速度引起的彳风所产生的离轴非等晕性给自适应光学系统带来的影响<sup>[4]</sup>。Ty-lor 在文献[4]的基础上对平面波情况进行了更详细的讨论<sup>[5]</sup>, 并考虑到了系统的有限时间带宽。但目标旋转角速率引起的彳风沿路径的分布是线性的, 在很多情况下, 还需要考虑横向风沿路径随机的变化。文献[7]对此进行了分析, 并讨论了平面波水平大气传输的情况。然而文献[5]和文献[7]都只涉及到了对平面波波前扰动进行补偿的自适应光学系统的时间带宽。事实上, 横向风对自适应光学系统补偿效果的影响与系统的时间带宽和空间带宽都有关系。此外, 不同类型的光波, 例如球面波(聚焦光束)和平面波(准直光束), 在大气传输时其轨迹并不相同, 其所受的扰动及其自适应光学补偿效果受横向风的影响也就不相同。因此, 联系自适应光学系统的时间带宽和空间带宽, 研究不同类型的光波所受的大气湍流扰动, 及其自适应光学补偿与光波传输路径上的横向风之间的关系, 具有很重要的现实意义。本文联系自适应光学系统的时间带宽和空间带宽, 从理论上详细分析了不同类型的光波在大气中传输时所受的大气湍流扰动及其自适应光学补偿效果与光波传输路径上的大气条件之间的关系。

## 2 经自适应光学系统补偿后的剩余波前相位的结构函数

如图 1 所示,  $b$  为  $t$  时刻系统所接收到的信标光所对应目标位置,  $s$  为  $t + \Delta t$  时刻目标的位置,  $\theta$  为目标相对成像望远镜的旋转角速度,  $v(h)$  为光波传播路径上的横向风速分布。在系统接收孔径上由大气湍流引起波前扰动相位分布为

$$\phi(r, t) = k \int_0^L dh n_1 [X(h)r + \theta ht - v(h)t, h] \quad (1)$$

其中,  $k$  为光波波数,  $L$  为光波传播距离。在下面的推导过程中关于  $h$  的积分限均为  $[0, L]$ , 不再写出。  $X(h)$  与光波的类型有关。对于球面波

$$X(h) = 1 - h/L \quad (2)$$

对于平面波

$$X(h) = 1 \quad (3)$$

$\phi(r, t)$  的时域变换为

$$\Phi(r, f) = \int dt \phi(r, t) \exp(-i2\pi f t) \quad (4)$$

空域变换为

$$\Phi(\rho, f) = \iint d^2 r \Phi(r, f) \exp(-i2\pi r \cdot \rho) \quad (5)$$

将(4)式代入(5)式, 可以得到时空域变换为

$$\Phi(\rho, f) = \int dt \exp(-i2\pi f t) \iint d^2 r \phi(r, t) \exp(-i2\pi r \cdot \rho) \quad (6)$$

其逆变换为

$$\phi(r, t) = \int df \exp(i2\pi f t) \iint d^2 \rho \Phi(\rho, f) \exp(i2\pi r \cdot \rho) \quad (7)$$

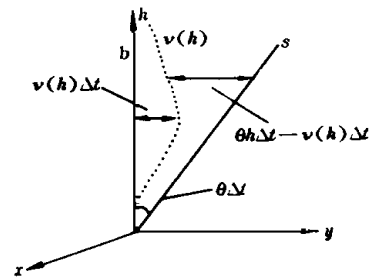


Fig 1 D diagram about the scene of adaptive optical compensation

假定系统的时域传递函数为  $H_t(f)$ , 空间传递函数为  $H_s(\rho)$ , 则系统给出的校正波前为

$$\Phi(r, t) = \int df \exp(i2\pi f t) \iint d^2\rho H_t(f) H_s(\rho) \Phi(\rho, f) \exp(i2\pi r \cdot \rho) \quad (8)$$

这样, 经系统校正后的剩余相位为

$$\begin{aligned} \Phi_r(t) &= \Phi(r, t) - \Phi(r, t) = \\ &= \int df \exp(i2\pi f t) \iint d^2\rho [1 - H(f, \rho)] \Phi(\rho, f) \exp(i2\pi r \cdot \rho) \end{aligned} \quad (9)$$

这里,

$$H(f, \rho) = H_t(f) H_s(\rho) \quad (10)$$

将其称之为系统的时空传递函数。

剩余相位的结构函数为

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= |\Phi(r + \alpha, t) - \Phi(r, t)|^2 = \\ &= \iiint \iiint df_1 d^2\rho_1 df_2 d^2\rho_2 [1 - H(f_1, \rho_1)] [1 - H(f_2, \rho_2)]^* \Phi(f_1, \rho_1) \Phi(f_2, \rho_2) \times \\ &\quad \exp[i2\pi(f_1 - f_2)t] \{ \exp[i2\pi(r + \alpha) \cdot \rho_1] - \exp(i2\pi r \cdot \rho_1) \} \times \\ &\quad \{ \exp[-i2\pi(r + \alpha) \cdot \rho_2] - \exp[-i2\pi r \cdot \rho_2] \}^* = \\ &= \iiint \iiint \iiint \iiint df_1 d^2\rho_1 df_2 d^2\rho_2 dt_1 d^2r_1 dt_2 d^2r_2 [1 - H(f_1, \rho_1)] [1 - H(f_2, \rho_2)]^* \times \\ &\quad \exp[i2\pi(f_1 - f_2)t] [\Phi_{r_1 + r + \alpha, t_1} - \Phi_{r_1 + r, t_1}] \times \\ &\quad [\Phi_{r_2 + r + \alpha, t_2} - \Phi_{r_2 + r, t_2}] \exp(-i2\pi r_1 \cdot \rho_1) \times \\ &\quad \exp(i2\pi r_2 \cdot \rho_2) \exp(-i2\pi f_1 t_1) \exp(i2\pi f_2 t_2) = \\ &= \iiint \iiint \iiint \iiint df_1 d^2\rho_1 df_2 d^2\rho_2 dt_1 d^2r_1 dt_2 d^2r_2 [1 - H(f_1, \rho_1)] [1 - H(f_2, \rho_2)]^* \times \\ &\quad \exp[i2\pi(f_1 - f_2)t] [2\Gamma\phi(r_1 - r_2, t_1 - t_2) - \Gamma\phi(r_1 - r_2 + \alpha, t_1 - t_2) - \\ &\quad \Gamma\phi(r_1 - r_2 - \alpha, t_1 - t_2)] \exp(-i2\pi r_1 \cdot \rho_1) \times \\ &\quad \exp(i2\pi r_2 \cdot \rho_2) \exp(-i2\pi f_1 t_1) \exp(i2\pi f_2 t_2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\Gamma\phi(r, t) = \Phi_{r + r, t + t} \Phi_{r, t} \quad (12)$$

引入坐标变换

$$r_- = r_1 - r_2, \quad r_+ = (r_1 + r_2)/2 \quad (13)$$

$$t_- = t_1 - t_2, \quad t_+ = (t_1 + t_2)/2 \quad (14)$$

$$\rho_- = \rho_1 - \rho_2, \quad \rho_+ = (\rho_1 + \rho_2)/2 \quad (15)$$

$$f_- = f_1 - f_2, \quad f_+ = (f_1 + f_2)/2 \quad (16)$$

并且注意到将以上坐标引入(11)式后关于  $r_+$  和  $t_+$  的积分为狄拉克函数, 因此最终可以得到

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \iiint \iiint d^2r_- d^2\rho_+ dt_- df_+ |1 - H(f_+, \rho_+)|^2 \exp(-i2\pi r_- \cdot \rho_+) \exp(-i2\pi f_+ t_-) \times \\ &\quad [2\Gamma\phi(r_-, t_-) - \Gamma\phi(r_- + \alpha, t_-) - \Gamma\phi(r_- - \alpha, t_-)] \end{aligned} \quad (17)$$

在平面波情况下, Stone 等人求得<sup>[9]</sup>

$$\Gamma \phi(r, t) = 0.00969k^2 \int_0^L dh C_n^2(h) \Gamma_n^{(0)}(r, t, h) \quad (18)$$

利用同样的方法可将上式推广到更一般的情况,

$$\Gamma \phi(r, t) = 0.00969k^2 \int_0^L dh C_n^2(h) \Gamma_n^{(0)}(X(h)r, t, h) \quad (19)$$

其中  $\Gamma_n^{(0)}(r, t, h)$  为  $t$  时刻在高度为  $h$  处与  $h$  轴垂直的面上折射率起伏的相关函数。将(19)式代入(17)式, 可得

$$D(\alpha) = 0.00969k^2 \iiint \int d^2 r d t d f d h \left| 1 - H[f, X(h)\rho] \right|^2 \Phi_n^{(0)}(\rho) C_n^2(h) \exp(-i2\pi f t) \times \\ \exp\{-i2\pi\rho \cdot [\theta t - v(h)t]\} \{2 - \exp[-i2\pi\rho \cdot X(h)\alpha] - \\ \exp[i2\pi\rho \cdot X(h)\alpha]\} \quad (20)$$

在上式中已将各变量的下标去掉, 并且利用了下式

$$\iint d^2 r \Gamma_n^{(0)}(X(h)(r - \alpha), t, h) \exp(-i2\pi\rho \cdot r) = \frac{1}{X^2(h)} \Phi_n^{(0)}\left(\frac{\rho}{X(h)}\right) \times \\ \exp\left\{-i2\pi\rho \cdot \left[\alpha + \frac{\theta t}{X(h)} - \frac{v(h)t}{X(h)}\right]\right\} \quad (21)$$

上式在  $X(h) = 0$  时没有意义, 但可用求极限的方法避免这种情况的出现。注意到(20)式中关于  $t$  的各分结果为狄拉克函数, 所以最后可以得到

$$D(\alpha) = 0.00969k^2 \int_0^L dh C_n^2(h) \iint d^2 \rho \left| 1 - H[\rho \cdot (\theta - v(h)), X(h)\rho] \right|^2 \times \\ \Phi_n^{(0)}(\rho) 2[1 - \cos(2\pi\rho \cdot X(h)\alpha)] \quad (22)$$

### 3 自适应光学系统的 Strehl 比

通常自适应光学系统对光波波前的补偿效果由系统的 Strehl 比来表征。理论上系统 Strehl 比被定义为受大气湍流扰动的光波波前所成像的轴上光强与光波在真空中传播后所成像的轴上光强之比。Strehl 比与剩余相位结构函数之间的关系为<sup>[5]</sup>

$$SR = \iint d^2 \alpha K(\alpha) \exp\left[-\frac{1}{2}D(\alpha)\right] \quad (23)$$

其中  $K(\alpha)$  是系统孔径函数的自卷积。在存在中心遮拦的情况下<sup>[8]</sup>

$$K(\alpha) = \frac{1}{(A_{d_2} - A_{d_1})^2} [K_{d_2 d_2}(\alpha) + K_{d_1 d_1}(\alpha) - 2K_{d_2 d_1}(\alpha)] \quad (24)$$

其中

$$K_{d_2 d_2}(\alpha) = \begin{cases} \frac{2A_{d_2}}{\pi} \left\{ \arccos(|\alpha|/d_2) - \frac{|\alpha|}{d_2} [1 - (|\alpha|/d_2)^2]^{1/2} \right\} & |\alpha| \leq d_2 \\ 0 & |\alpha| > d_2 \end{cases} \quad (25)$$

$$K_{d_1 d_1}(\alpha) = \begin{cases} \frac{2A_{d_1}}{\pi} \left\{ \arccos(|\alpha|/d_1) - \frac{|\alpha|}{d_1} [1 - (|\alpha|/d_1)^2]^{1/2} \right\} & |\alpha| < d_1 \\ 0 & |\alpha| > d_1 \end{cases} \quad (26)$$

$$K_{d_2 d_1}(\alpha) = \begin{cases} A_{d_2} & 0 < |\alpha| < \frac{d_2 - d_1}{2} \\ \frac{A_{d_2}}{\pi} \arccos \mathcal{Y}_1 + \frac{A_{d_1}}{\pi} \arccos \mathcal{Y}_2 - \frac{|\alpha| d_1}{2} (1 - \mathcal{Y}_2^2)^{1/2} & \frac{d_2 - d_1}{2} < |\alpha| < \frac{d_2 + d_1}{2} \\ 0 & |\alpha| > \frac{d_2 + d_1}{2} \end{cases} \quad (27)$$

其中  $d_2$  和  $d_1$  为系统孔径的外径和内径,  $A_{d_2}$  是直径为  $d_2$  的圆面积,  $A_{d_1}$  是直径为  $d_1$  的圆面积. 在 (27) 式中  $\mathcal{Y}_1$  和  $\mathcal{Y}_2$  分别为

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{1}{|\alpha| d_2} [ |\alpha|^2 + (d_2/2)^2 - (d_1/2)^2 ] \quad (28)$$

$$\mathcal{Y}_2 = \frac{1}{|\alpha| d_1} [ |\alpha|^2 + (d_1/2)^2 - (d_2/2)^2 ] \quad (29)$$

**结 论** 在采用冻结湍流假设和几何光学近似的条件下, 得到了经自适应光学系统校正后的剩余波前相位扰动的结构函数. 进而根据剩余相位结构函数与系统 Strehl 比的关系, 求出了自适应光学系统的补偿效果受系统的时空传递函数, 大气湍流, 光波传播路径上的横向风, 观察目标的旋转角速度以及系统时间延迟影响情况的解析表达式.

在完成本文的工作期间, 得到了中科院光电所李新阳的帮助, 谨在此深表谢意.

### 参 考 文 献

- [1] J. Hardy, Active optics: a new technology for the control of light *Proc IEEE*, 1978, **66**(6)·651~697
- [2] D. P. Greenwood, D. L. Fried, Power spectra requirements for wave-front-compensation system. *J. Opt Soc Am.*, 1976, **66**(3)·193~206
- [3] D. P. Greenwood, Bandwidth specification for adaptive optics system. *J. Opt Soc Am.*, 1977, **67**(3)·390~392
- [4] D. L. Fried, Anisoplanatism in adaptive optics *J. Opt Soc Am.*, 1982, **72**(1)·52~61
- [5] G. A. Tyler, Turbulence-induced adaptive-optics performance degradation: evaluation in the time domain *J. Opt Soc Am. (A)*, 1984, **1**(3)·251~262
- [6] V. V. Voitikhovich, S. Cuevas, Adaptive optics and the outer scale of turbulence *J. Opt Soc Am. (A)*, 1995, **12**(11)·2523~2531
- [7] 张德良, 姜文汉, 吴旭斌等, 水平大气中横向风对自适应光学系统性能的影响 *光学学报*, 1997, **17**(5)·614~620
- [8] Deliang Zhang, Wenhan Jiang, Haixing Yan, The influence of transverse wind on the performance of an adaptive optics *Proc SPIE*, 1996, **2828**·479~488
- [9] J. Stone, P. H. Hu, Single and multiperture Zernike correlations in the atmospheric turbulence problem. in *Proceedings of the International Conference on Lasers '89*, D. G. Harris, T. M. Shay, eds., STS, McLean, Va., 1990, 709~716

# Compensation Effect of an Adaptive Optics System for Atmosphere Induced Wavefront Perturbation I Theoretical Analysis

Zhang Deliang    Jiang Wenhan    Wu Xubing

(*Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209*)

Yan Haixing    Li Shushan

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*)

(Received 25 July 1997)

**Abstract** The structure function of residual wavefront phase perturbation compensated by an adaptive optics system has been derived by means of frozen turbulence hypothesis and geometric optics approach. According to the relationship between Strehl ratio of the system and the residual phase structure function, the analytical expression about the influence of spatial-temporal transfer function, atmospheric turbulence, transverse wind speed along the light propagation path, angular velocity of the observed object and time-delay of the system on the compensation effect of the system has been obtained.

**Key words** adaptive optics, atmospheric optics, transverse wind, temporal bandwidth, spatial bandwidth, spherical wave, plane wave