

可压缩流动稳定性方程求解与转捩预测

姚文秀 蔡春培 赵 烈 王发民 赵桂萍

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要 讨论了 Rayleigh 迭代法与边界层渐近匹配展开配合的方法, 并应用于求解高速可压缩边界层流动稳定性和预报转捩点的数值计算方法。给出了平板边界层第一模式的稳定性分析和转捩区数值预报结果, 与已有的实验结果进行了比较。

关键词 可压缩边界层 稳定性 转捩 Rayleigh 迭代法

中图分类号 O354

0 引言

可压缩流动稳定性和转捩研究, 是空气动力学研究中困难的基本问题之一, 也是飞行器设计中必须考虑的问题。如弹头在返回大气层时烧蚀花纹, 雷达散射等与飞行器边界层(或尾迹区)流动的转捩密切相关。转捩等问题也影响到航天器在飞行时的表面温度, 气动性能和起飞重量等。

由于可压缩性和热力学效应的影响, 高速流动的转捩问题比低速流动要复杂得多, 其机理还不十分清楚, 应用线性稳定性理论和 e^N 方法进行转捩预测, 在许多情况下能够满足包含一次失稳、二次和多次失稳以及非线性波演化等复杂现象。因而, 在国外已得到广泛的应用。

本文讨论描述边界层流动问题的动量方程、能量方程和连续方程等五个常微分特征方程。当然, 对于高马赫数流动应当考虑到真实气体效应的影响。如果流动处于化学平衡状态, 则稳定性方程的阶数不会变化, 但是对于化学反应非平衡流动, 则各反应组分的连续性方程也要包括在内, 这就使稳定性系统的求解更加困难。从理论上讲, 下述方法适用于真实气体问题。

问题的数值求解: 包括初值求解方法(即打靶法)和边界问题的求解方法。Mack^[1]应用初值方法求解了可压缩边界层问题, Scott^[2]等则比较早地应用两个边界求解不可压稳定性方程组, 这时临界层在固壁附近, 函数展开的方法很有优势, 如 Chebyshev 展开(Orszag)和高阶有限元素方法(Wang Famin^[3])等。但是对于高超声速流动, 临界层则移向边界层外缘。以上方法很难有效发挥作用, 因此求解稳定性方程的迭代算法则显示出优越性。本文采用了 Malik^[4]提出的二阶差分方法, 求解了边界问题。同时以此为初值, 应用 Rayleigh 迭代, 结合外边界渐近分析, 求解可压缩边界层稳定性方程, 并按 e^N 理论进行了转捩点预测。

1 基本方程

可压缩流动的 N-S 方程可以写成如下形式

$$\left[\frac{\partial q}{\partial t} + (q \cdot \nabla) q \right] = -P + \nabla \cdot [\mu (\nabla q + q^T)] \quad (1)$$

收稿日期: 1998-06-16; 修回日期: 1998-10-09

姚文秀, 男 35 助研 硕士

$$\frac{\partial}{\partial t} + \dots \cdot (q) = 0 \tag{2}$$

$$\text{缩} \quad c_p \left[\frac{\partial}{\partial t} + (q \cdot \nabla) \right] = \dots \cdot (k) + \frac{\partial P}{\partial t} + (q \cdot \nabla) P + \dots \tag{3}$$

$$P = R \tag{4}$$

式中 q 表示速度矢量, ρ 密度, P 压力, T 温度, R 气体常数, γ 比热比, k 热传导系数, μ 和 μ' 分别表示第一和第二粘性系数, q^{tr} 表示速度梯度张量的对应转置张量, 且

$$= (\nabla \cdot q)^2 + \frac{\mu}{2} [q + q^{tr}]^2 \tag{5}$$

1.1 基本流场求解

基本流场采用定常假设和近壁平行流假设, 即边界层内的物理量仅仅是该点到物面距离的函数。

对边界层方程应用 Mangler-levy-lees 变换

$$d = \int \mu_e u_e dx, \quad d = [\mu_e u_e / (2 \rho)]^{1/2} (\eta / \rho) dy \tag{6}$$

这里下标 e 表示外边界相应函数值, x 为沿物面方向坐标, y 为垂直物面坐标。在平面流中, 控制方程可以简化为

$$\text{限} \quad (cf) + ff + [\dots - (f)] = 2 \left(f \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \text{和} \\ (a_1 g + a_2 f f) + fg = 2 \left(f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$$

此处 $f = u / u_e, c = \mu / \mu_e, \dots = (2 / u_e) (d u_e / d x), Pr = \mu c_p / k$

$$g = H / H_e, \quad \dots = c / Pr, \quad \dots = \frac{(\gamma - 1) M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} (1 - 1 / Pr) c, \quad M = u_e / \sqrt{RT_e} \tag{7}$$

式中 \dots 是表示压力梯度的参数, H 是焓, γ 比热比, M 和 Pr 分别表示 Mach 数和 Prandtl 数, 本文采用四阶紧致格式和牛顿迭代方法进行求解。为了增加求解的精确性, 还采用了双精度运算。图 1 给出了 $R = 2000$ 的速度剖面的二阶导数图, 图上存在一个零点, 说明该流场截面是 Rayleigh 不稳定的。

1.2 稳定性方程

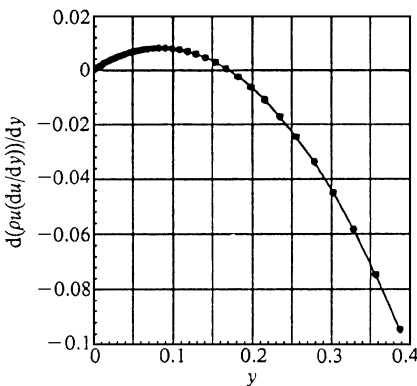


图 1 $d(\mu(u du/dy))/dy$ profile in $R = 2000$

在基本流场上迭加一个小扰动量后, 设扰动量是一个沿 x 方向传播的行进谐波, 即

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = [\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y)] e^{i(x + z - \tilde{t})} \tag{7}$$

式中 \dots 为波数, \dots 是谐波的频率, 本文设 \dots 为实数, $\dots = r + i \dots$ 为复数, 含 $\tilde{\dots}$ 的量为扰动量。将以上假设代入 N-S 方程, 略去扰动量的二阶项和高阶项, 得下面二阶常微分方程组。

$$(AD^2 + BD + C) \phi = 0 \tag{8}$$

$$\text{其中 } \phi = \begin{cases} \hat{u} + \hat{v} \\ \hat{u} \\ \hat{p} \\ \hat{u} \\ \hat{u} - \hat{v} \end{cases}, \quad D = d/dy \tag{9}$$

A, B 和 C 分别是 5×5 阶矩阵,具体元素的说明见文[3]。其边界条件是:在固壁上,速度、温度扰动量为零;在边界层外部,所有扰动量趋近于零。

$$y = 0 \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = \phi_5 = 0; \quad y = y_{max} \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = \phi_5 = 0 \quad (10)$$

常微分方程组(8)连同其边界条件构成一特征值问题

$$= (\quad , \quad , R)$$

系数矩阵 B 和 C 中的 R, M, Pr 分别是雷诺数 $R = \rho_e u_e l / \mu_e$, ($l = \delta$ 边界层排挤厚度), 马赫数 $M_a = U_e / \sqrt{RT_e}$, 普朗特数 $Pr = c_p \mu_e / k_e$ 。

2 求解稳定性方程的数值方法

稳定性方程(8)的差分格式:为更精确刻画不稳定扰动波的近壁图形,使近壁处有足够的点,本文采用如下坐标变换将区域 $0 \leq y \leq y_{max}$ (y_{max} 为边界层外不受边界层影响的一个为数值求解方便而设定的外边界)投影到求解域 $0 \leq \eta \leq 1$

$$y = \eta / (b - \eta), \quad b = 1 + \eta / y_{max}, \quad \eta = y_{max} \cdot \eta_i / (y_{max} - 2\eta_i) \quad (11)$$

其中 η_i 为流向速度值,是边界层速度一半时的坐标值。

在等间距节点上,采用交错网格技术,应用二阶差分得到下列紧致差分格式

$$f_1 A_j \left[\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{2} + d_1 \left[(f_2 A_j + f_3 B_j) \left(\frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2} + C_j \phi_j \right) + d_2 \left[f_3 B_j \left(\frac{\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}}{2} + C_j \left(\frac{\phi_{j+1/2} + \phi_{j-1/2}}{2} \right) \right) \right] \right] = 0 \quad (12)$$

$(j = 1, 2, 3, \dots, n - 1)$

式中 $\phi_{kj} (j = 1, \dots, N)$ 表示在节点 j 的函数值,包括 5 个分量 $\phi_{kj} (k = 1, 5)$, 对于压力 p , 式中 $d_1 = 0, d_2 = 1$, 而其他分量则取 $d_1 = 1, d_2 = 0$ 式中相应的差分系数

$$f_1 = (b - \eta)^4 / (b^2 a^2), \quad f_2 = -2(b - \eta)^3 / (b^2 a^2), \quad f_3 = (b - \eta)^2 / (ba) \quad (13)$$

一阶连续性方程可以表示为

$$f_3 B_{j+1/2} \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{2} + C_{j+1/2} \phi_{j+1/2} = 0 \quad (j = 0, \dots, N - 1) \quad (14)$$

由于速度和压力在固壁上的值为零,且在交错网格中,压力不在边界点取值,方程组共有 5 N 个方程。为确定本征值,我们采用 Global 方法和 Local 方法两步骤进行。

Global 方法:方程(8)表示为下面矩阵特征值的形式

$$\overline{A} \Phi = B \Phi \quad (15)$$

其特征值则由 $\text{Det} | \overline{A} - \lambda B | = 0$ 确定。但由于在 $y = y_{max}$ 处, $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = T = 0$, 会导致矩阵的奇异性,变通的方法是替代边界条件为: $\hat{u} = -\hat{u}, \hat{v} = -\hat{v}, \hat{w} = -\hat{w}, T = -T$, 取 10^{-6} 甚至更小,这样就得到了本征值的初步结果。

为比较本文算法的计算效率,我们选择文[1]中的算例进行比较。其来流条件为 $M = 0.5, T_w / T_{abd} = 1.0, T_0 = 500 R$ (T_0 为总温), $R_1 = 2000$, (l 为截面的参考长度)。

(1) 流场计算

排挤厚度: $\delta = 1.8236$ (Malik), $\delta = 1.8241$ (本文)。

(2) 本征值计算结果比较(表 1)

真值: $\lambda = (0.29081, 0.0022441)$

表 1 本征值计算结果比较

Table 1 The compare of eigenvalues of two models

N	λ_1 (Malik)	λ_2 (This paper)	$ \lambda_1 - \lambda_2 / \lambda_1 $	$ \lambda_1 - \lambda_2 / \lambda_2 $
17	(0.029656, 0.001338)	(0.0029698, 0.0013111)	40.49 %	39.8 %
25	(0.029329, 0.001819)	(0.0029356, 0.0017669)	21.2 %	20.2 %
33	(0.029216, 0.002002)	(0.0029195, 0.0021378)	4.6 %	6.7 %
41	(0.029166, 0.002002)	(0.0029907, 0.0021786)	2.8 %	4.3 %

可见,本文 Global 算法随着点数 N 的增加,误差以更快的速度衰减。

local 方法:以矩阵特征值方法求出的特征值为初值,采用 Rayleigh 迭代方法进行了改进。为此,让我们回到稳定性方程(15),当 $\omega = 0$ 时, T, U, W 对 ω 的所有导数等于零,系数矩阵的非零元素减少到 19 个,且不依赖变量 ω ,消去 ϕ_3 (压力扰动),得下面的二阶方程

$$\begin{cases} \phi_1 + e\phi_1 + a\phi_2 + f\phi_4 = 0 \\ \phi_2 + b\phi_1 + g\phi_2 + c\phi_4 = 0 \\ \phi_4 + h\phi_1 + a\phi_2 + f\phi_4 = 0 \\ \phi_{45} + c\phi_5 = j0 \end{cases}$$

www.cnki.net

给

行较精确的 Local 迭代计算。迭代算法为

$$\frac{\overline{A} - \overline{B}}{\overline{A} - \overline{B}} \phi^{(K+1)} = \frac{\overline{B}}{\overline{B}} \phi^{(K)} \tag{18}$$

$$\frac{\overline{A} - \overline{B}}{\overline{A} - \overline{B}}^{(K+1)} = \frac{\overline{B}}{\overline{B}}^{(K)} \tag{19}$$

$$K+1 = \frac{(\overline{A} - \overline{B})^{(K+1)} \phi^{(K+1)}}{(\overline{A} - \overline{B})^{(K+1)}, \overline{B}^{(K+1)}} \tag{20}$$

$$\phi^{(k+1)} = \phi^{(k+1)} / \max(\phi^{(k+1)}) \tag{21}$$

$$^{(k+1)} = ^{(k+1)} / \max(\phi^{(k+1)}) \tag{22}$$

可以证明上述迭代的误差满足 $\epsilon_{k+1} - \epsilon_k = O(\epsilon_k)^3$, 其中 $\phi^{(k+1)}$ 是本征函数, $^{(k+1)}$ 是 $\phi^{(k+1)}$ 的伴随特征函数。

为进一步提高精度,在 $N = 20, 22, 24$ 三个网格点上,进行了 Richardson 插值,计算公式为

$$\omega_{\text{extrapolated}} = \frac{\{[(h_1^2 - h_2^2)/h_0^2] \omega_0 + [(h_2^2 - h_0^2)/h_1^2] \omega_1 + [(h_0^2 - h_1^2)/h_2^2] \omega_2\}}{\{[(h_1^2 - h_2^2)/h_0^2] + [(h_2^2 - h_0^2)/h_1^2] + [(h_0^2 - h_1^2)/h_2^2]\}}$$

表 2 给出了上述插值的结果。

表 2 差值结果比较

Table 2 The evolution of above model

N	20	22	24	evolution
	(0.029267047,	(0.029245019,	(0.0292269920,	(0.02909507602453,
	0.0019398730)	0.0019774172)	0.0020085585)	0.002248540986329)

可以看出上述方法求解特征值问题,在很少的点上可以精确到 4 位有效数字,有力地解决了线性稳定性分析中的计算存储量大,精度低的问题。

3 结果分析

要进行转捩区预报,群速度的计算是至关重要的。当然可以用 LR 方法通过临近几点的特征值,用差分方法求解

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial} \right|_j = \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{j+1 - j-1}, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial} \right|_j = \frac{\omega_{j+1} - \omega_{j-1}}{j+1 - j-1}$$

但是这种方法会花费较多的机时,且精度较低。本文采用下述方法求解,设特征方程为

$$L(\omega, \phi) = 0 \tag{23}$$

对 ω 进行求导,并应用伴随函数 ϕ 作内积

$$\frac{\partial L}{\partial \omega} + \frac{\partial L}{\partial \phi} \frac{\partial \omega}{\partial \phi} + L \frac{\partial \phi}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \phi} = - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial L}{\partial \omega} \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} \end{array} \right] \phi$$

下式是本算例的群速度计算结果

$$v_a = (0.3608813285828, 0.0080116894096140)$$

$$v_b = (-0.8620564318266E-14, -0.5262003296470E-14)$$

由于 $v_b = 0$, 故 V_b 近似为 0。

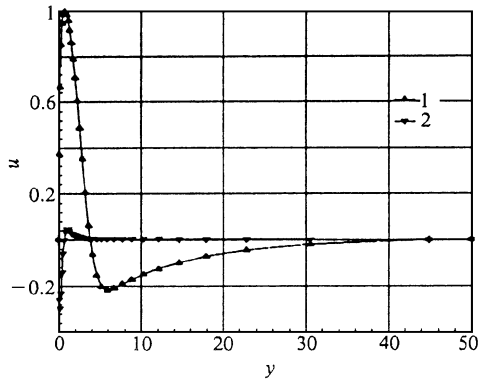


图2 u 扰动(1:实部,2:虚部)

Fig. 2 streamwise velocity disturbance in $R = 2000$

图2~5给出了 $R = 2000$, $\omega = 0.1$, $\beta = 0.0$ 时的速度、温度和压力扰动波波形。

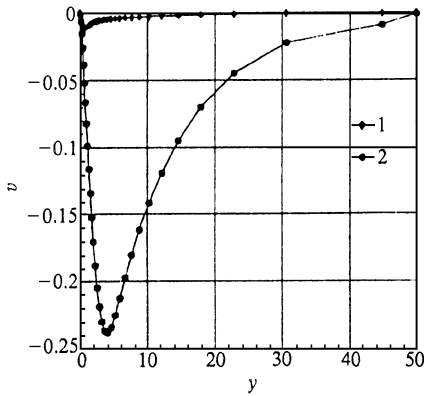


图3 v 扰动

Fig. 3 spanwise velocity disturbance in $R = 2000$

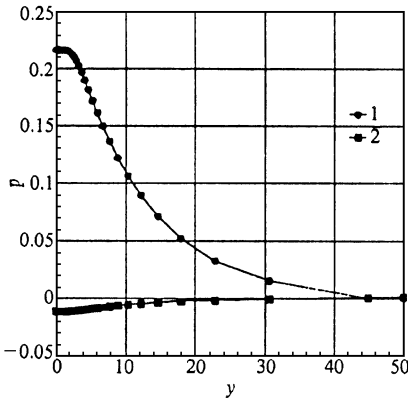


图5 p 扰动

Fig. 5 pressure disturbance in $R = 2000$

转捩点的预报:本文采用了 e^N 方法预报边界层的转捩点,按照实验结果, N 取 $9 \sim 11$ 。

计算公式为 $N = \int_{x_c}^{x_T} \frac{i}{|v_g|} dx$ 。这里群速度 $v_g = K \left[\frac{\partial}{\partial \omega}, \frac{\partial}{\partial \omega} \right]$, x 表示到边界层起点的距离,角标 c

和 T 表示失稳临界点和转捩点的 x 坐标。图6描述了 N 对应于雷诺数的曲线,可以看出当 $N > 9$ 时,该曲线的梯度是很大的。为求解特征值,让我们回到迭代关系式 $(A - \omega B) \phi^{(K+1)} = B \phi^{(K)}$ 和它的伴随系统。设任意一个光滑的函数 $\phi^{(0)}$ 和它的伴随函数 $\psi^{(0)}$ 为初值,开始迭代,

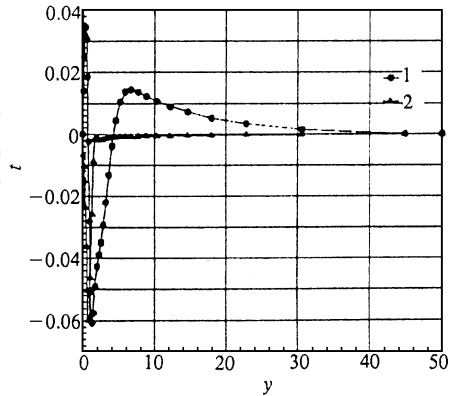


图4 t 扰动

Fig. 4 temperature disturbance in $R = 2000$

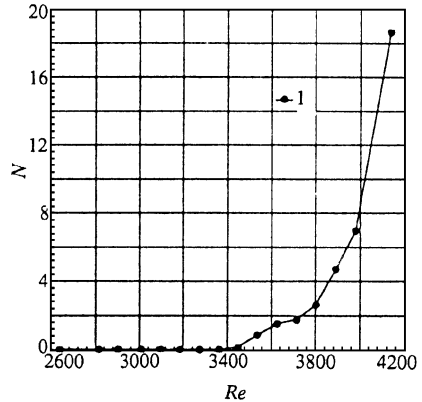


图6 N 积分

Fig. 6 N integrate in $R = 2000$

4 结论

以 Malik 算法为基础,我们发展了求解高速可压缩边界层流动稳定性方程特征值的 Rayleigh 反迭代于边界层渐近展开的匹配方法。对平板边界层的计算表明,该方法的计算结果是令人满意的。最后应该指出,该项研究和所编制的相应程序,不仅适用于理想气体,也适用于高马赫数并考虑真实气体效应时的情况,而且适用于机翼和各种锥体(尖锥、钝锥和有扩张角的锥体)以及有横向流的流场的流动稳定性、转捩预报、层流控制技术。

参考文献

- 1 Mack L M. Computation of the Stability of the Laminar Compressible Boundary Layers. in *Methods in Computational Physics*, edited by Alder B (Academic Press), New York, 1965, 4: 247.
- 2 Scott M R and Watts H A. Computational solution of Linear two-point Boundary value problem via orthonormalization. *J Numer Anal*, 1997, 14: 40
- 3 王发民,黄泽远. Orr-Sommerfeld 方程特征值问题的一个展开式. *数值计算与计算机应用*, 1991, (1): 25 ~ 38.
- 4 Malik M R. Efficient Computation of the Stability of Three-Dimensional Compressible Boundary Layers. AIAA-81-1277.
- 5 Malik M R. Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability. *J Comp Phys*, 1965, 5: 247.

THE SOLUTION OF COMPRESSIBLE STABILITY EQUATIONS AND FORECASTING OF TRANSITION

Yao Wenxiu Cai Chunpei Zhao Lie Wang Famin Zhao Guiping

(The Institute of Mechanics, The Chinese Academic of Science, Beijing 100080)

ABSTRACT: It assesses the Rayleigh inverse-iteration method and boundary layer asymptotic expansion method, and uses them into the stability equations of compressible boundary layer and the numerical method for forecasting the transition point. It gives also a stability analysis on the first mode of the boundary layer of flat plane and a forecasting of transition point. Results are discussed and compared with observations.

KEY WORDS compressible boundary layer; stability transition; Rayleigh inverse iteration.