

# 有二次涡的激波边界层干扰流动的 DPNS 和 NS 方程计算

申义庆<sup>1</sup>, 高智<sup>1</sup>, 王汝权<sup>2</sup>

(1. 中国科学院力学研究所高温气动实验室, 北京, 100080;

2. 中国科学院计算数学与科学工程计算研究所, 北京, 100080)

**摘要:**本文针对具有二次涡复杂分离再附现象的激波边界层干扰流动, 数值地考察了扩散抛物化 Navier-Stokes (DPNS) 方程组的适用情况。壁面摩擦阻力和压力、主涡和二次涡的涡高和涡长、分离再附位置以及流线图等特性的计算表明: DPNS 方程组的数值结果均与 NS 方程组的数值结果很好相符。

**关键词:** NS 方程组; DPNS 方程组; 激波边界层干扰

**中图分类号:** V211.3    **文献标识码:** A    **文章编号:** 0258-1825(2000)04-0407-06

## 0 引言

近三十年多来, 扩散抛物化 Navier-Stokes (DPNS) 方程组 (亦称抛物化 NS 或简化 NS 或粘性层方程组) 在气动问题的计算中得到了广泛的应用<sup>[1~4]</sup>。从理论上能够证明 DPNS 方程组适用于具有主流方向的流动, 但不能证明适用于流动分离区哪怕是十分小的分离区。然而求解 DPNS 方程组的众多数值计算表明: DPNS 方程组适用于有主流方向且存在小分离区的流动, 因此实际的计算拓宽了 DPNS 方程组的适用范围。对于有二次涡的复杂分离再附流动, 数值检验 DPNS 方程组的适用性有助于进一步拓宽 DPNS 方程组的适用范围。

进一步考察高雷诺数 NS 方程计算。由于对流向 (或还有侧向) 坐标变量求导的粘性诸项通常很小, 从物理考虑这些粘性小项可以忽略, 从数值方面考虑, 若 NS 格式的精度不够高, 这些粘性小项会落入截断误差范围, 按理也应略去这些粘性小项不再计算它们, 这时 NS 计算自然简化成为 DPNS 方程计算。如果坚持把这些粘性小项保留下来, 则计算它们实质上是在计算误差, 确实没有必要。这种情况下, 即使多做了计算、多用了机时和存储, 也不是完全 NS 方程计算而是 DPNS 方程计算。正如文献[5]分析表明的采用二阶精度差分格式计算 NS 方程的众多文献, 表面上看是计算 NS 方程, 而事实上, 按其格式精度其实是 (或者说相当于) DPNS 方程计算或粘性层方程计算。

收稿日期: 1999-09-29; 修订日期: 1999-12-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目, 中国科学院力学所所长择优基金资助项目, 高温气体动力学开放实验室和科学与工程计算国家重点实验室资助项目。

自从文献[6]关于激波入射边界层诱导流动分离的计算工作以来,许多作者利用这种激波边界层干扰流动的计算来检验理论模型和算法的有效性,如文献[7-9],包括无分离、一次简单分离、产生二次涡的复杂分离计算。利用 DPNS 方程计算有二次涡干扰流动的研究尚未看到。本文同时利用 NS 和 DPNS 方程组计算了这个问题,两组方程数值结果的比较证实:DPNS 方程适用于产生二次涡的复杂分离流动问题。

## 1 DPNS 方程组与 NS 方程组及其差分离散

本文采用如下形式的无量纲二维可压缩完全 NS 方程组和 DPNS 方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} \quad (1)$$

其中

$$U = ( \rho, u, v, e_t )^T,$$

$$F = ( \rho u, u^2 + p, uv, (e_t + p)u )^T, G = ( \rho v, uv, v^2 + p, (e_t + p)v )^T,$$

$$F_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + q_x)^T, G_v = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + q_y)^T,$$

$$e_t = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$$

$$\tau_{xx} = \frac{\mu}{Re} \frac{2}{3}(2u_x - v_y), \tau_{xy} = \frac{\mu}{Re}(u_y + v_x), \tau_{yy} = \frac{\mu}{Re} \frac{2}{3}(2v_y - u_x)$$

$$q_x = \frac{\mu}{Re} \frac{1}{(-1)M^2 Pr} T_x, q_y = \frac{\mu}{Re} \frac{1}{(-1)M^2 Pr} T_y$$

状态方程

$$T = \frac{M^2 P}{\rho} \quad (2)$$

粘性系数采用 Sutherland 公式

$$\mu = T_2^3 \frac{1+C}{T+C}, C = \frac{110.4}{T} \quad (3)$$

在(1)中,当  $\beta = 1$  时为完全 NS 方程组,当  $\beta = 0$  时为 DPNS 方程组。为了更好地反应壁面边界层,在壁面附近采用了法向网格加密技术,即把物理坐标  $(x, y)$  变换到计算坐标

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = 1 - \frac{\ln\left(\frac{+1 - y_1}{-1 + y_1}\right)}{\ln\frac{+1}{-1}} \end{cases} \quad (4)$$

其中  $y_1 = y/h$ ,  $h$  为计算区域高度,  $1 < \xi < \infty$ ,  $0 < \eta < 1$ , 越接近于 1, 壁面附近的法向网格越密。根据变换的 Jacobi 值及坐标变换关系式(4),

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = J \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$$

可得变换后的守恒方程组为

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}_v}{\partial \eta} \quad (5)$$

其中

$$\tilde{U} = U/J, \tilde{F} = F/J, \tilde{G} = yG/J, \tilde{F}_v = F_v/J, \tilde{G}_v = yG_v/J$$

对方程组(2.5)中对流项的差分离散,我们采用一种加权的 TVD 格式<sup>[9]</sup>,例对双曲守恒律方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

其离散通量形式为

$$H_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (F_{j+1} + F_j - R_{j+\frac{1}{2}} / j_{+\frac{1}{2}} / R_{j+\frac{1}{2}}^{-1} U_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (R_{j+\frac{1}{2}} (F_{j+\frac{1}{2}}^{+} - R_{j+\frac{1}{2}}^{-1} U_{j+\frac{1}{2}}) + F_{j-\frac{1}{2}}^{+} - R_{j-\frac{1}{2}}^{-1} U_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} (R_{j+\frac{1}{2}} (F_{j+\frac{1}{2}}^{-} - R_{j+\frac{1}{2}}^{-1} U_{j+\frac{1}{2}}) + F_{j-\frac{3}{2}}^{-} - R_{j-\frac{3}{2}}^{-1} U_{j-\frac{3}{2}}) \quad (6)$$

其中的具体变量请参见文献[9]。

对(5)式中的粘性项采用 Roe 平均后的中心差分离散。与(1)情形相同,当  $\beta = 1$  时为 NS 方程组,当  $\beta = 0$  时为 DPNS 方程组。

## 2 计算条件及结果

计算区域  $x [0, 0.32], y [0, 0.1215]$ ,用参考长度  $L = 0.16$  进行无量纲化。来流雷诺数  $Re = 2.96 \times 10^5, M = 2, Pr = 0.72, \beta = 1.4$ 。初值取  $u = 1, v = 0, \rho = 1, T = 1$ 。在入射激波的前方用来流值,后方由斜激波关系式给出。计算区域的出口边界用两点公式外推。壁面为无滑移、绝热条件。

本文分别用 NS 方程组和 DPNS 方程组计算了激波入射角  $\theta = 32.585^\circ, 33.342^\circ, 34.047^\circ, 34.5^\circ, 35.0^\circ$  的几种情形。我们采用两组网格  $33 \times 33$  和  $65 \times 65$  进行计算,得出的结果是一致的。对  $\theta = 34.047^\circ, 35.0^\circ$ ,图 1~图 4 分别给出网格为  $65 \times 65$  的壁面摩阻系数、壁面压力分布图,可看出二者结果非常一致,基本上是重叠在一起的。图 5~图 8 是相应的流线图。

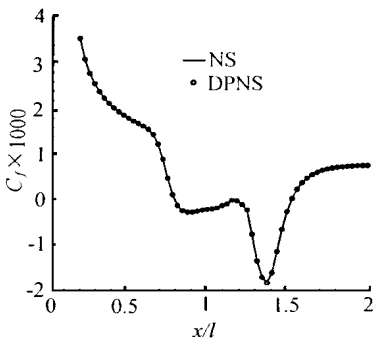


图 1 壁面摩阻系数分布,  $\theta = 34.047^\circ$

Fig. 1 Skin friction coefficients distributions on plate,  $\theta = 34.047^\circ$

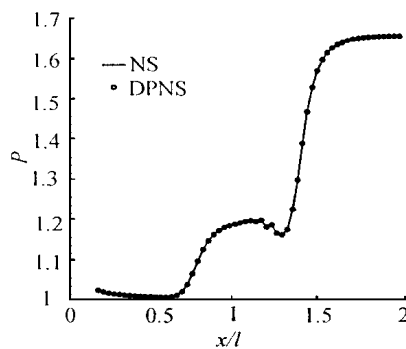


图 2 壁面压力分布,  $\theta = 34.047^\circ$

Fig. 2 Pressure distributions on plate,  $\theta = 34.047^\circ$

表 1~表3给出了有关分离涡的几组数据,无论是主涡还是二次涡的特性,NS方程和 DPNS 方程的数值结果是完全一致的。分离涡以及二次涡的大小、涡高和涡长、分离点和再附点

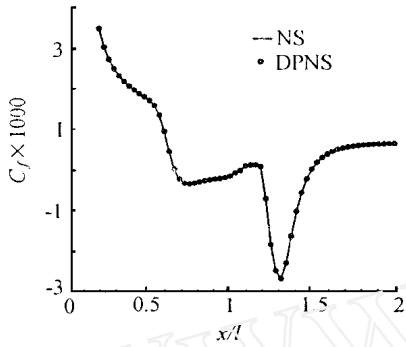


图3 壁面摩擦系数分布, = 35.0°

Fig. 3 Skin friction coefficients distributions on plate, = 35.0°

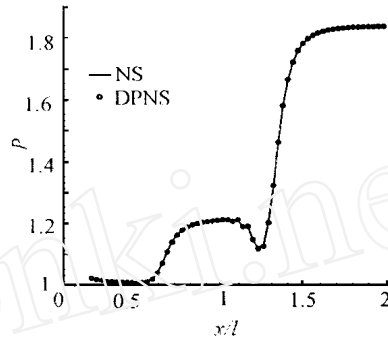


图4 壁面压力分布, = 35.0°

Fig. 4 Pressure distributions on plate, = 35.0°

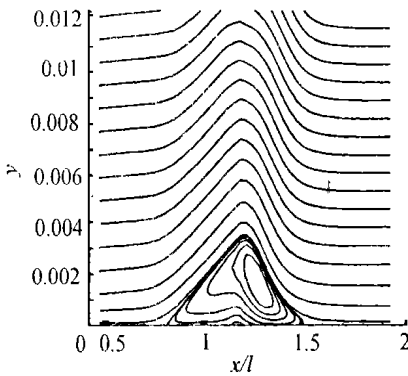


图5 流线图,NS, = 34.047°

Fig. 5 Streamlines ,NS, = 34.047°

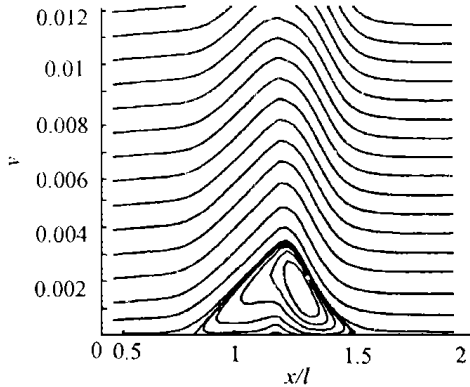


图6 流线图,DPNS, = 34.047°

Fig. 6 Streamlines ,DPNS, = 34.047°

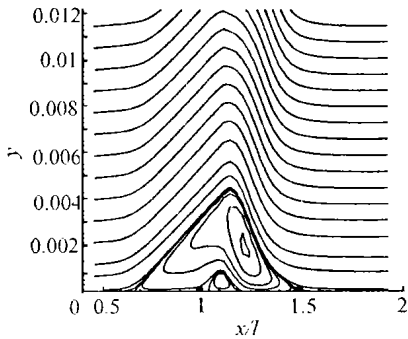


图7 流线图,NS, = 35.0°

Fig. 7 Streamlines ,NS, = 35.0°

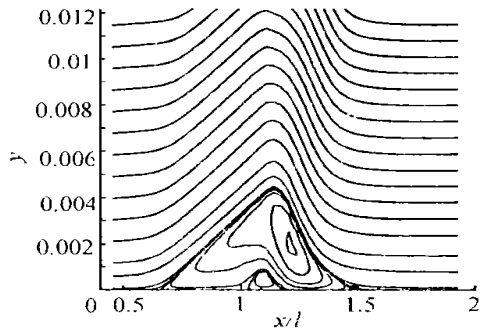


图8 流线图,DPNS, = 35.0°

Fig. 8 Streamlines ,DPNS, = 35.0°

的位置都几乎没有差别。表4给出壁面最低摩阻值 $C_f$ ,NS方程和DPNS方程的结果同样很好相符。

表1 主涡

Table 1 Main vortices

	涡高		涡长	
	NS	DPNS	NS	DPNS
32.585	1.2717E-3	1.1176E-3	8.500E-2	8.500E-2
33.342	1.8460E-3	1.8460E-3	0.1000	0.1000
34.047	2.6354E-3	2.6354E-3	0.1150	0.1150
34.50	2.9592E-3	2.9592E-3	0.1250	0.1250
35.0	3.3189E-3	3.3189E-3	0.1300	0.1300

表2 二次涡

Table 2 Secondary vortices

	涡高		涡长	
	NS	DPNS	NS	DPNS
32.585	-	-	-	-
33.342	-	-	-	-
34.047	1.3102E-4	1.3102E-4	1.000E-2	1.000E-2
34.50	4.7081E-4	4.7081E-4	1.500E-2	1.500E-2
35.0	7.4269E-4	6.4220E-4	2.500E-2	2.500E-2

表3 主涡

Table 3 Main vortices

	壁面分离点位置 x		壁面再附点位置 x	
	NS	DPNS	NS	DPNS
32.585	0.170	0.170	0.255	0.255
33.342	0.150	0.150	0.250	0.250
34.047	0.130	0.130	0.185	0.185
34.50	0.120	0.120	0.180	0.180
35.0	0.110	0.110	0.170	0.170

表4 壁面最低摩阻值 $C_f$ Table 4 Minimum values of skin friction coefficients on plate  $C_f$ 

	NS	DPNS
32.585	-0.56620E-3	-0.56352E-3
33.342	-0.11477E-2	-0.11466E-2
34.047	-0.17735E-2	-0.17735E-2
34.50	-0.22001E-2	-0.22000E-2
35.0	-0.26315E-2	-0.26316E-2

## 参 考 文 献:

- [1] Rubin S G, Tannehill J C. Parabolized/ Reduced Navier-Stokes Computational Techniques[J] , *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1992(24) : 117 ~ 153.
- [2] Anderson D et al. Computational Mechanics and Heat Transfer[M] , New York , Hemisphere ,1984.
- [3] 高 智.论简化 Navier-Stokes 方程组[J]. 中国科学(A 辑) 1987(10) :1058 ~ 70.
- [4] 高 智.粘性流体力学研究的若干进展[J]. 中国科学院院刊 1998(3) :187 ~ 192.
- [5] 张涵信等.网格与高精度差分计算问题[J]. 力学学报 1999 ,31(4) :398 ~ 405.
- [6] McCormack R W. Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Lam'inar Boundary Layer[J] *In :Lecture Notes in Phys.* ,Ed. Holt M. Berlin : Springer , 1971(8) :153 ~ 163.
- [7] Liou Meng-Sing. A Newton/ Upwind Method and Numerical Study of Shock Wave/ Boundary Layer Interactions[J] . *Inter. Jour. for Numer. Methods in Fluids* ,1989(9) :747 ~ 761.
- [8] Shen Yiqing ,Wang Ruquan ,Liao Hongzhi . A New Numerical Study of the Shock Boundary-Layer Interaction[J] . submitted to *Inter. Jour. for Numer. Methods in Fluids* .2000(3) :23 ~ 24.
- [9] Wang Ruquan ,Shen Yiqing. Some Weighted - type High - Resolution Difference Schemes and Their Applications[J] . *Acta Mechanica Sinica* ,1999 ,15(4) :313 ~ 324.

## DPNS Scheme and NS Scheme Computing Shock-wave/ Boundary Layer Interaction Flow With Secondary Vortices

SHEN Yi-qing<sup>1</sup> , GAO Zhi<sup>1</sup> ; WANG Ru-quan<sup>2</sup>

(1. LHD , Institute of Mechanics , Chinese Academy of sciences , Beijing , 100080 ;

2. Institute of Computational Mathematics and Scientific/ Engineering Computing ,

Chinese Academy of sciences , Beijing , 100080)

**Abstract :** In this paper , two kinds of controlling fluid equations , i. e. , the diffusion parabolized Navier-Stokes equations (DPNS) and complete Navier-Stokes (NS) equation are used to simulate the flow of the flat plate shock wave boundary layer interaction with secondary vortices. We obtained the conclusion : for this kind of complicated high Reynolds numbers separation flow , the numerical results of both the DPNS equations and NS equations are very consistent. These results include the skin friction coefficients and pressure on the plate , the vortical structure , the separation region and the streamlines. Owing to the mathematical feature of DPNS is more simple relatively and its less numerical computation compared with NS equations , DPNS equations are no doubt a prior choice.

**Key words :** NS equations ; DPNS equations ; shock - wave/ boundary layer interaction