

式中对 r 的偏导数, 应按如下方式计算

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial r} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r_0}{\partial r_0} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial r_0} \quad (14)$$

类似地, 可得高次幂情况下的解.

由式 (10) 和式 (12), 以及式 (8), 得 h 的近似形式为

$$h \approx h_1 + \beta h_2 = h_0 \left(1 + \frac{4tAh_0^2}{3} \right)^{-1/2} - \beta \int_0^t Q(\zeta) \exp \left(\int_t^\zeta P(\zeta) d\zeta \right) d\zeta \quad (15)$$

特殊地, 对于 h_0 为常量的情况, 有

$$h \approx h_0 \left(1 + \frac{4tAh_0^2}{3} \right)^{-1/2} + \frac{4\beta Ah_0^3}{21} \left[\left(1 + \frac{4tAh_0^2}{3} \right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{4tAh_0^2}{3} \right)^{1/4} \right] \quad (16)$$

可见, β 增加, h 将减小, 即涂料弹性的增加, 加快了甩涂过程.

3 算例

选取如下数据

$$h_0 = 1, \quad A = 1, \quad \beta = 0.2$$

根据式 (16) 计算了牛顿流体 ($\beta = 0$) 和粘弹性流体在不同时刻涂层的厚度 h (表 1).

h_N 和 h 分别为牛顿流体和粘弹性流体的涂层厚度. 由表 1 可见, 它们均随着时间的增加而减小, 并且涂料弹性对涂层厚度的影响与上节结论相同.

表 1

t	0	2	4	8	10	20	40	50
h_N	1.00	0.52	0.40	0.29	0.26	0.19	0.14	0.12
h	1.00	0.47	0.34	0.22	0.19	0.10	0.04	0.01

参 考 文 献

- 1 陈文芳, 范椿. 涂布流动和涂布材料的流变性能. 力学进展, 1990, 20(2): 191~198
- 2 陈文芳. 非牛顿流体的一些本构方程. 力学学报, 1983, 15(1): 16~26

FLOW OF A VISCOELASTIC FLUID ON A ROTATING DISK

GANG Qinguo

(Dept. of Mathematics, Hebei University, Baoding 071002, China)

Abstract The flow of the viscoelastic fluid on a rotating disk with the linear Maxwell's model was studied. The approximate analytic solution of the coating thickness was given using the perturbation method. It was found that the increase of the elasticity modulus of coating materials is conducive to the process of rotating coating.

Key words rotating coating, viscoelastic fluid, coating thickness

欠膨胀高速射流的压力均一化过程¹⁾

戚隆溪 江先金 马言宝 王柏懿

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘要 发展了分析欠膨胀高速湍流射流近场特性的数值方法, 计算了不同背压比条件下声速喷管出口附近膨胀区的激波胞格结构, 揭示了压力均一化过程的机制.

关键词 欠膨胀射流, 近场特性, 胞格结构, 均压过程

近年来, 高超声速推进器和超声速割焊喷枪的研制以及油气井喷发等灾害事故的控制等众多应用引起了人们的重视, 它们均与欠膨胀高速湍流射流有关, 因此要求对其流场结构作深入的研究. 在各类射流问题当中, 欠膨胀高速射流由于激波的存在而导致了流

1) 国家自然科学基金项目资助.

1999-08-26 收到第 1 稿, 1999-11-24 收到修改稿.

场结构相当复杂。本文采用数值方法分析这类射流的近场特性并给出射流喷嘴出口附近膨胀区内的激波胞格结构，从而揭示了射流与背景环境之间压力均一化过程的机制。

1 基本方程

理论模型为：(1) 采用 N-S 方程描述流体运动；(2) 计及射流内部压力场的非均匀性；(3) 采用零方程湍流模型。我们采用时间相关法计算定常解，控制方程为柱坐标 (x, r) 中的 Favre 平均 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial r} + \frac{F_v - F + W}{r} \quad (1)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{e} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{u} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{u} + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{e} + \bar{p}\bar{u} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} \\ \bar{\rho}\bar{u}\bar{v} + \bar{p} \\ \bar{\rho}\bar{v}\bar{e} + \bar{p}\bar{v} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_{\theta\theta} + \bar{p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{xx}\bar{u} + \tau_{xr}\bar{v} + \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xr} \\ \tau_{rr} \\ \tau_{xr}\bar{u} + \tau_{rr}\bar{v} + \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial r} \end{bmatrix}$$

其中 p, ρ, T 和 e 为气体的压力、密度、温度和比总焓； u 和 v 为速度分量（上划线 $-$ 和 \sim 分别表示 Reynolds 平均和 Favre 平均）； μ 和 $Pr = C_p\mu/\lambda$ 为粘性系数和 Prandtl 数。

考虑定常情况，采用零方程湍流模型，气体的状

态方程取下述形式

$$\bar{p} = (\gamma - 1)\bar{\rho}\left[\bar{e} - \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\right] \quad (2)$$

相应于方程 (1) 的边界条件为

$$x = 0 \text{ (出口条件): } U|_{x=0} = U_0$$

$$x = \infty \text{ (出流零梯度条件): } \partial U / \partial x|_{x=\infty} = 0$$

$$r = 0 \text{ (轴对称条件): } \partial U / \partial r|_{r=0} = 0$$

$$r = \infty \text{ (外边界条件): } \bar{\rho} = \rho_e, \bar{u} = u_e, \bar{p} = p_e$$

2 数值方法

为了实现计算域网格的不等距划分，作如下坐标变换

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi_0 r_0 \frac{e^{k_1 \xi} - 1}{e^{k_1} - 1} \\ r &= \eta_0 r_0 \frac{e^{k_2 \eta} - 1}{e^{k_2} - 1} \end{aligned} \right\} (0 \leq \xi, \eta \leq 1)$$

这里 ξ_0, η_0, k_1 和 k_2 为常数。再选取射流喷嘴出口半径 r_0 、出口轴线速度 u_0 及环境密度 ρ_e 以及其他各物理量在出口处的值为参考量，便得到无量纲坐标系 (τ, ξ, η) 中的控制方程（其中流动 Reynolds 数 $Re = \rho_e u_0 r_0 / \mu_0$ ）

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \hat{E}_v}{Re \partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}_v}{Re \partial \eta} + \frac{\hat{S}}{Re} \quad (3)$$

在计算域内取有限小体积对无量纲方程进行积分得

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \iint \hat{U} d\xi d\eta + \int (\hat{E}_{i+1/2} - \hat{E}_{i-1/2}) d\eta + \int (\hat{F}_{j+1/2} - \hat{F}_{j-1/2}) d\xi = \frac{1}{Re} \left[\int (\hat{E}_{v_{i+1/2}} - \hat{E}_{v_{i-1/2}}) d\eta + \int (\hat{F}_{v_{j+1/2}} - \hat{F}_{v_{j-1/2}}) d\xi + \iint \hat{S} d\xi d\eta \right] \quad (4)$$

令

$$\bar{U} = \frac{1}{\Delta \xi \Delta \eta} \iint \hat{U} d\xi d\eta, \quad \bar{E} = \frac{1}{\Delta \eta} \iint \hat{E} d\eta$$

$$\bar{F} = \frac{1}{\Delta \xi} \iint \hat{F} d\xi, \quad \bar{S} = \frac{1}{\Delta \xi \Delta \eta} \iint \hat{S} d\xi d\eta$$

$$\bar{E}_v = \frac{1}{\Delta \eta} \iint \hat{E}_v d\eta, \quad \bar{F}_v = \frac{1}{\Delta \xi} \iint \hat{F}_v d\xi$$

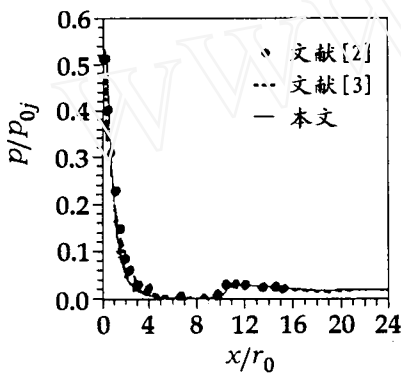
上式两边对 τ 在 $[\tau, \tau + \Delta \tau]$ 上积分得

$$\begin{aligned} & \Delta \bar{U} \Delta \xi \Delta \eta + \Delta \eta \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} (\bar{E}_{i+1/2} - \bar{E}_{i-1/2}) d\tau + \\ & \Delta \xi \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} (\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}) d\tau = \\ & \frac{1}{Re} [\Delta \eta \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} (\bar{E}_{v_{i+1/2}} - \bar{E}_{v_{i-1/2}}) d\tau + \\ & \Delta \xi \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} (\bar{F}_{v_{i+1/2}} - \bar{F}_{v_{i-1/2}}) d\tau + \\ & \Delta \xi \Delta \eta \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \bar{S} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

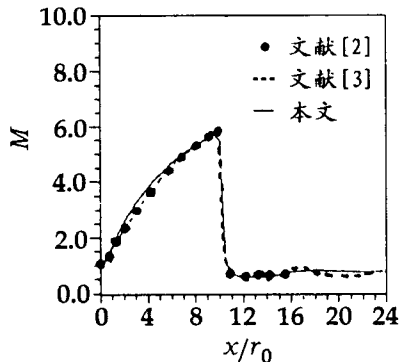
其中, $\Delta \bar{U} = \bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n$, \bar{U}^n 、 \bar{U}^{n+1} 分别为时间等于 τ 和 $\tau + \Delta \tau$ 时的值。对式 (5) 中时间的积分采用中心差分格式, 计算时则采用交替方向隐式方法, 通过反复迭代收敛至所需的定常解。

3 计算结果

利用我们所发展的数值方法, 我们首先计算了常温条件下喷嘴出口总压 P_{0j} 与环境压力 P_e 之比为 50 和 3.1 两种情况欠膨胀声速空气射流近场区流场, 前者射流膨胀区内出现桶形激波及马赫盘, 后者则形成激波胞格波系结构。图 1 示出总压比为 50 (欠膨胀比



(a) 轴线压力分布



(b) 轴线马赫数分布

图 1 总压比 $P_{0j}/P_e = 50$ 时常温声速射流的近场特性

为 26.4) 的结果与相关的结果 [2,3] 的比较, 从而确认了计算方法的可靠性。图 2 给出了总压比为 3.1 (欠膨胀比为 1.64) 时射流轴线压力随出口距离增加的变化规律, 并与 Seiner [4] 的实验结果符合较好。

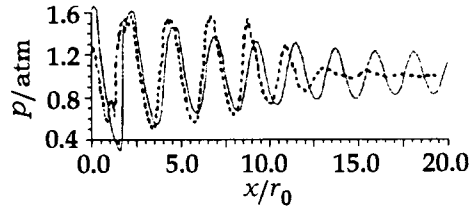


图 2 总压比 $P_{0j}/P_e = 3.1$ 时常温声速射流轴线压力计算值与实验值的比较
—— 本文, - - - 文献 [4]

参 考 文 献

- 1 Ying SX, Krothapalli A, Wishart E. Navier-Stokes simulations of supersonic jets from axisymmetric and rectangular nozzles. AIAA 92-3439, 1992
- 2 郑敏, 张新信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式在喷流计算中的应用. 空气动力学学报, 1987, 7: 273~281
- 3 Teutomu Saito, et al. Visualization of a free jet by a laser induced fluorescence method. J Japan Soc Aero Space Sci, 1984, 32: 61~64
- 4 Seiner JM. Advances in high speed jet acoustics. AIAA 84-2275, 1984

PRESSURE UNIFORMIZATION OF THE UNELEREXPANDED HIGH SPEED JETS

QI Longxi JIANG Xianjin MA Yanbao
WANG Boyi

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract In this paper, the numerical simulation method of the near-field flow properties of under-expanded high-speed jets was developed. The results of shock-cell structure in the expansion region near nozzle-exit at several static pressure ratios were given, and the mechanism of pressure uniformization was analyzed.

Key words under expanded jet, near field flow property, shock-cell structure, pressure uniformization