

群速度控制格式及二维 Riemann 解

田保林, 傅德薰*, 马延文

(中国科学院力学研究所 LNM, 北京 100080)

摘要:强激波和强接触间断的数值模拟一直是计算流体力学里一个富有挑战性的课题,它们是很多实际流动的基础。三阶迎风紧致格式是一种具有较高分辨率的高精度方法,但是在计算激波时仍有数值振荡产生。本文根据数值解的群速度特性,在三阶迎风紧致格式的基础上提出了一种群速度控制格式,使得能够正确模拟含有强激波和强接触间断的复杂流动。在此基础上构造了求解包含大压力比和密度比的二维界面问题的数值方法。计算结果表明,方法对激波和接触间断的分辨效果是令人满意的。

关键词:紧致格式;群速度控制;二维 Riemann 问题

中图分类号:O35;O241 **文献标识码:**A

1 引言

为求解多尺度非定常的复杂流动,特别是含有强激波和强接触间断的非定常复杂流动,具有高精度的紧致格式受到了人们越来越多的重视^[1-4]。紧致格式对于高波分量而言,具有较小的耗散和色散误差,而且相对于其它类型的格式,紧致格式使用了较少的网格基架点,具有较高的精度和分辨率。现有的一些格式,在计算激波时将数值振荡产生,为了克服数值振荡,人们发展了很多有效的激波捕捉方法,其中包括 TVD, ENO, WENO 等方法^[5, 6]。

现有的一些高分辨率格式多是直接从数学观点出发而构造的,对激波取得了很好的捕捉效果,但是对接触间断的捕捉还有待进一步改进。为此,通过分析研究数值解的群速度以改进对激波和接触间断的捕捉效果和分辨率是一个很好的途径。

数值解的群速度对物理解群速度的逼近程度反映了数值方法的分辨率效果^[1, 3, 4]。文献[3]根据数值解的群速度,分析了数值解的行为特征。文献[1, 4]参照数值解的群速度把格式分为3类:快型(FST),慢型(SLW)和混合型(MXD)。对于慢型格式,数值振荡出现于激波之后;快型格式,数值振荡出现于激波之前;混合型格式,振荡出现于激波两侧,但主要出现于激波之前。

本文在三阶迎风紧致格式的基础上,利用数值解的群速度特性和迎风紧致格式的固有耗散特性构造了一种三阶精度的群速度控制格式,基本抑制了数值振荡的产生。

在求解 Euler 方程的过程中,文献[4]的群速度控制参数是依赖于一个控制变量压力的控制参数,本文提出了基于压力、密度和速度三者加权的群速度控制参数。Harten 的 TVD 格式^[5]采用了5个网格点,在光滑区具有二阶精度,在极值点和拐点处精度降为一阶;本文所构造的群速度控制格式,计算简单,精度高,且所用的网格基架点少。

Riemann 问题是气体动力学中的经典问题^[7-12],在初始时刻,流体可以分成两种相邻的状态,每种状态具有均匀的速度、压力和密度,常见的 Sod 问题就是 Riemann 问题的一种。随着时间的发展,初始间断分解为激波、接触间断和稀疏波的组合。它的正确求解对于新的数值方法的构造以及认识含有复杂间断类型的多尺度复杂流动,都有着很深刻的意义。

为验证方法对大密度比的接触间断和强激波的分辨能力,数值模拟了大密度比和压力比的 Riemann 问题,证实了方法的有效性。

2 数值解的群速度

给定一个差分格式,可以求出它的耗散误差、色散误差和数值解群速度,它们反映了该差分格式数值解行为特征。

为了简便起见,考虑如下模型方程及其对应的半离散化方程:

收稿日期:2003-03-13;修改稿收到日期:2003-08-23.

基金项目:863 项目“激波与流体界面间不稳定性特征研究”(863-804-1-8-4)资助项目.

作者简介:田保林(1975-),男,博士生;
傅德薰*(1935-),女,研究员.

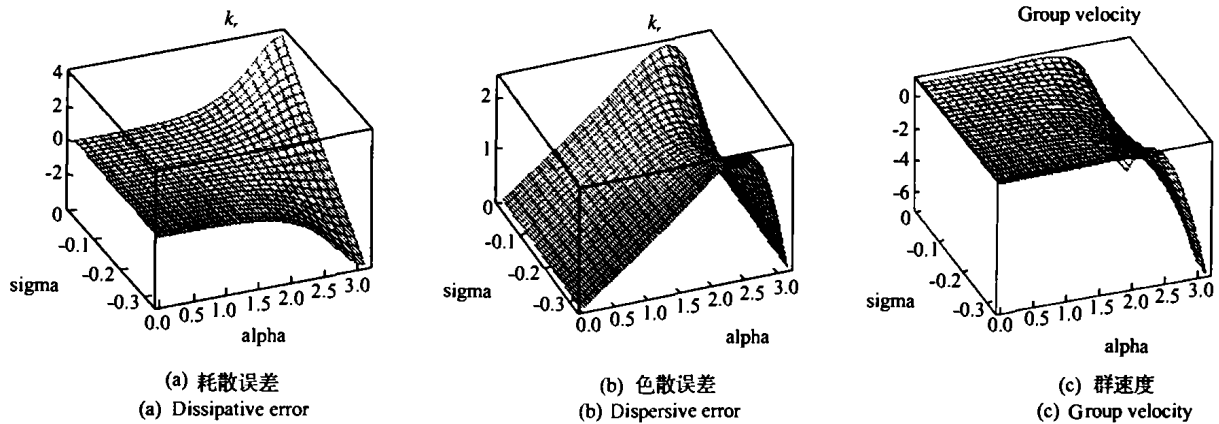


图 1 含一个自由参数的紧致差分格式的误差分析
Fig. 1 Error analysis of compact difference scheme with one free parameter

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = cu, \quad c = \text{const.} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

其中 $\frac{F_j}{\Delta x}$ 是对 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的差分逼近. 设 $c > 0$, 下面分析差分逼近式(2)数值行为特征. 取初值为

$$u(x, 0) = \exp(ikx) \quad (3)$$

则式(1)的精确解为

$$u(x, t) = e[ik(x - ct)] \quad (4)$$

同样, 可以求出式(2)的准确解为

$$u(x, t) = \exp\left[-c \frac{k_r}{\Delta x} t\right] \exp\left[ik\left(x_j - c \frac{k_i}{a} t\right)\right] \quad (5)$$

式中 $a = k\Delta x$. 波包以群速度传播, 数值解群速度定义为^[4]

$$D(a) = \frac{dk_i(a)}{da} \quad (6)$$

对于方程(1)的精确解, 有 $k_r = 0, k_i = a, D(a) = 1$. 参照式(5), 可以不难求出各种差分逼近式的 k_r, k_i 和 $D(a)$, 进而可以分析研究它们的数值行为特性.

对于如下含有一个自由参数的紧致差分格式

$$-\sigma F_{j+1} + \frac{2}{3} F_j + \left(\frac{1}{3} + \sigma\right) F_{j-1} = \left(\frac{5}{6} \delta_x^- + \frac{1}{6} \delta_x^+\right) f_j - 2\sigma \delta_x^2 f_j \quad (7)$$

其中差分算子:

$$\begin{aligned} \delta_x^- f_j &= f_j - f_{j-1}, & \delta_x^+ f_j &= f_{j+1} - f_j \\ \delta_x^2 &= \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-), & \delta_x^2 &= \delta_x^+ \delta_x^- \end{aligned}$$

图 1 给出了格式(7)的耗散误差、色散误差和群速度 k_r, k_i 和 $D(a)$ 随参数 σ 和 α 变化情况, 可以

看出格式对于低波分量数值解都有很好的逼近精度. 随波数的增加数值解偏离于准确解的程度加大. 这种偏离导致数值解中对应于不同波数的分量产生错位, 从而导致非物理振荡的产生, 群速度说明了这种波束是如何传播的.

此外, 相比于同阶精度的普通差分格式, 紧致格式使用了较少的网格基架点, 具有较小的截断误差和更大的正确模拟的波数模拟范围.

3 群速度控制格式

文献[4]首先提出了群速度控制方法, 改善了激波的捕捉能力. 其基本思想是: 为抑制数值振荡的产生, 要求所构造的格式在波前是慢型格式(SLW), 而在波后是快型格式(FST). 从而可以抑制数值振荡的产生.

对于如下差分逼近式:

$$\alpha_j F_{j+1} + \beta_j F_j + \gamma_j F_{j-1} = d_j \quad (8)$$

对于正迎风的情况, 即 $c > 0$ 时, 有

$$\alpha_j = -\sigma_{j+\frac{1}{2}}^+, \quad \beta_j = \frac{2}{3} + \sigma_{j-\frac{1}{2}}^+ - \sigma_{j+\frac{1}{2}}^+$$

$$\gamma_j = \frac{1}{3} + \sigma_{j-\frac{1}{2}}^+$$

$$d_j = \left(\frac{5}{6} \delta_x^- + \frac{1}{6} \delta_x^+\right) f_j - 2[\sigma_{j+\frac{1}{2}}^+ \delta_x^+ - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^+ \delta_x^-] f$$

当 $c < 0$ 时, 有

$$\alpha_j = \sigma_{j+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{3}, \quad \beta_j = \frac{2}{3} - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^- + \sigma_{j+\frac{1}{2}}^-$$

$$\gamma_j = \sigma_{j+\frac{1}{2}}^-$$

$$d_j = \left(\frac{5}{6} \delta_x^+ + \frac{1}{6} \delta_x^-\right) f_j - 2[\sigma_{j+\frac{1}{2}}^- \delta_x^+ - \sigma_{j-\frac{1}{2}}^- \delta_x^-] f$$

其中

$$\delta_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \pm \sigma_0 [1 \pm \gamma_0 SS(u_{j+\frac{1}{2}})] PP_{j+\frac{1}{2}} |c| \quad (9)$$

$$PP_{j+\frac{1}{2}} = \left| \frac{P_{j+1} - P_j}{P_{j+1} + P_j} \right| \quad (10)$$

$$SS(u) = \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (11)$$

计算中常数 σ_0, γ_0 取值范围为 $1 \leq \sigma_0 \leq 2, 0.8 \leq \gamma_0 \leq 1$, $PP_{j+\frac{1}{2}}$ 是一控制变量, $SS(u)$ 称为激波结构函数^[4]. 通过上述的参数控制, 就可以使得差分逼近式(8)在波前呈 SLW 型格式的特性, 而波后主要呈现 FST 型格式的特性. 在计算中一般取:

$$SS(u) = \text{sign}[(u_{j+1} - u_j)(u_{j+2} - u_{j+1} - u_j + u_{j-1})] \quad (12)$$

由式(9)和式(10)可知, 在解的光滑区有 $\sigma_{j+\frac{1}{2}} \sim \Delta x$, 格式具有一致的三阶精度, 在极值点处精度降为二阶.

4 Euler 方程的差分逼近和数值算例

4.1 Euler 方程的求解

现将群速度控制方法应用到非线性的 Euler 方程组^[4]的求解之中. 利用 Steger-Warming 矢量通量分裂方法可将 Euler 方程进行迎风分裂, 然后利用差分逼近式(8)来离散分裂后的正负通量, 并通过式(9)来控制数值解中的群速度, 以达到捕捉激波的效果. 对于式(10)中的 P_j , 不同于文献[4], 本文取作压力、密度和速度的加权值, 这样能够取得对激波和接触间断更好的分辨效果.

同时, 时间方向采用具有三阶精度的 Runge-Kutta 方法进行求解.

4.2 数值算例

下面给出两个典型一维算例, 以检验本方法的

正确性. 计算中式(9)控制参数 σ_0 和 γ_0 分别取为 $\sigma_0 = 0.5, \gamma_0 = 0.9$.

4.2.1 一维定常激波解

采用具有三阶精度的群速度控制方法求解一维 Euler 方程, 计算区域为 $[0, 1]$, 网格点数为 201, 计算初值如下:

$$\rho = 1, u = 1, p = 1.57 \quad \text{当 } x \leq 0.25 \text{ 时}$$

$$\rho = 0.5, u = 0, p = 0.57 \quad \text{当 } x > 0.25 \text{ 时}$$

初始时刻激波位于 $x = 0.25$ 处, 激波马赫数为 $Ma_\infty = 2$, 匀速向右推进. 图 2 给出了 $t = 0.15$ 时的计算结果, 可以看出, 计算结果是令人满意的.

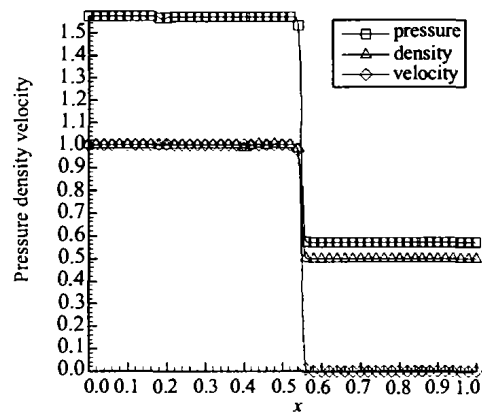


图 2 一维定常激波解
Fig.2 One-dimensional steady shock wave

4.2.2 一维 Sod 问题

计算方法和参数选取同上, 计算区域为 $[0, 1]$, 网格数为 201, 计算初值如下给定:

$$\rho = 1, \mu = 0, p = 1 \quad \text{当 } x \leq 0.5 \text{ 时}$$

$$\rho = 0.125, \mu = 0, p = 0.1 \quad \text{当 } x > 0.5 \text{ 时}$$

图 3 给出了 $t = 0.14$ 时的计算结果以及相同初值下的精确解、文献[4]结果. 可以看出, 本方法对激波和接触间断的捕捉效果是很好的.

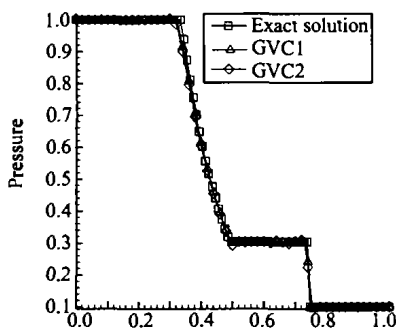


图 3(a) Sod 问题 (压力)
Fig.3 (a) Sod problem (pressure)

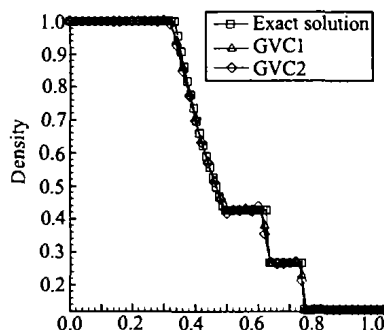


图 3(b) Sod 问题 (密度)
Fig.3 (b) Sod problem (density)

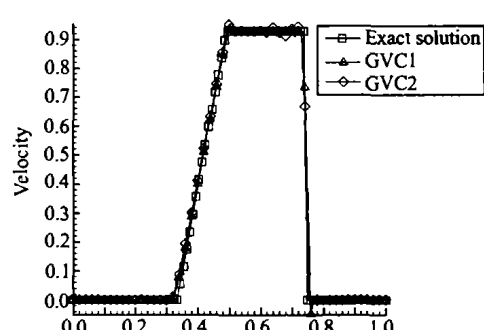


图 3(c) Sod 问题 (速度)
Fig.3 (c) Sod problem (velocity)

GVC1 为本文的群速度控制格式, GVC2 为文献 [4] 的群速度控制格式
GVC1: GVC scheme in present paper, GVC2: GVC scheme in Ref.4

5 二维 Riemann 问题的计算

本文求解的 Riemann 问题,具有很大的压力比和密度比,这样将产生很强的接触间断和强激波,在计算中控制参数 σ_0 和 γ_0 的取值同上。

5.1 Riemann 问题 1

这个问题的计算区域为 $[0, 2] * [0, 2]$, 网格划分为 $400 * 400$, 初值给定可参见示意图 4, 图中 $x_0 = y_0 = 1$ 。

其中

$$\rho_1 = 0.5313, p_1 = 0.4, u_1 = 0, v_1 = 0$$

$$\rho_2 = \rho_4 = 1.0, p_2 = p_4 = 1.0$$

$$u_2 = u_4 = 0, v_2 = v_4 = 0.7226$$

$$\rho_3 = 0.8, p_3 = 1.0, u_3 = 0, v_3 = 0$$

这里给出的初值,包含有 1,2 区之间和 1,4 区之间的两个弱激波 ($Ma = 1.51$) 和 2,3 区之间和 4,3 区之间的两条滑移线。随着时间的发展,在中心处的两个相交激波向计算区域的右上方前进;同时,在两个相交激波的后面,产生了一对弯曲的反射激波,为一马赫反射。

图 5 给出 $t = 0.52$ 时刻的计算结果。在右上角,反射激波之间有稀疏波和接触间断产生。左下

方的两个滑移线,其基本形状保持不变,只是在两个滑移线的相交处,由于反射激波的作用,产生了一个向右下方的突起的接触间断。特别地,对于计算区域右上方的流动结构,文献[7]指出,采用 Van Leer 矢通量分裂方法计算出的激波结果与规则反射类似,不能很好地分辨出马赫反射来。本文的计算结果和文献[7]采用二阶精度的有限体积法结果基本一致,比较好地捕捉到了这一马赫反射,从图 5(b) 中可以看到两个三波点之间的马赫干,而且本文对左下方滑移线的捕捉效果,要好于文献[7]的计算结果。

5.2 Riemann 问题 2 (双马赫反射问题)

计算区域为 $[0, 1] * [0, 1]$, 网格划分为 $400 * 400$, 初值给定同文献[7], 分布见示意图 4, 其中 $x_0 = y_0 = 0.8$ 。

这里给出的初值,各个子区域之间都是满足正激波关系的,其中子区域 1,2,1,4 之间的激波马赫数为 $Ma = 2.1$;子区域 2,3,4,3 之间的马赫数为 $Ma = 3$ 。

本问题中有两对不同的激波在中心处相交,激波向左方和下方运动,在其后相交地方产生一对反射激波。从图 6 可以看出,由于入射激波强度较大,

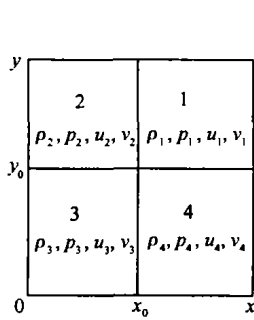


图 4 初值示意图
Fig.4 Sketch of initial value

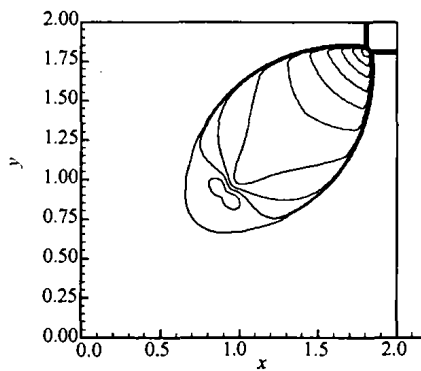


图 5(a) 压力分布 $t=0.52$
Fig.5 (a) Contours of pressure $t=0.52$

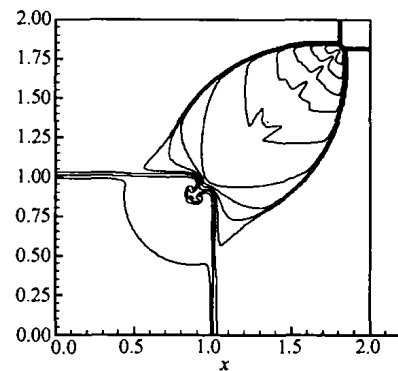


图 5(b) 密度分布 $t=0.52$
Fig.5 (b) Contours of density $t=0.52$

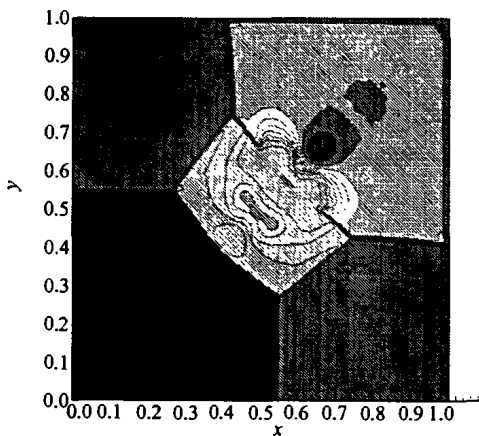


图 6(a) 压力 $t=0.6$
Fig.6 (a) Contours of pressure $t=0.6$

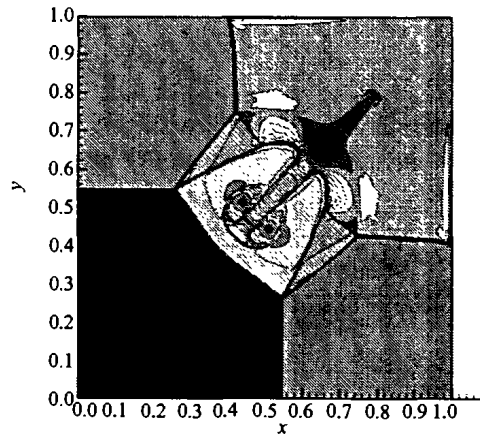


图 6(b) 密度 $t=0.6$
Fig.6 (b) Contours of density $t=0.6$

反射波阵面发生了折断,同时接触间断发生了较大的扭曲,这是一种典型的双马赫反射现象。在计算区域的中心部分产生了比较复杂的流动结构。在图 6(b)中,由于右上方是高密度区,左下方为低密度区,在激波的作用下,高密度气体进入低密度气体,产生了蘑菇状钉子结构。

以上结果表明本文构造的差分格式对非定常强激波和非定常大密度比的切向间断都有很好的分辨能力。

6 结 论

根据数值解中产生非物理振荡的原因,通过分析数值解的行为特征,在含一个自由参数的紧致格式的基础上构造了具有高精度的群速度控制方法。格式具有三阶精度,极值点处精度降为二阶。同时,利用该方法,数值模拟了几种不同类型的 Riemann 问题,特别是具有大密度比和大压力比初值的 Riemann 问题。

参考文献(References):

- [1] Fu D X, Ma Y W. A high order accurate difference scheme for complex flow fields[J]. *J Comput Phys*, 1997, **134**:1-15.
- [2] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution [J]. *J Comput Phys*, 1992, **13**:16-42.
- [3] Trefethen L N. Group velocity in finite difference schemes[J]. *SIAM Review*, 1982, **24**(2):113-136.
- [4] Ma Yanwen, Fu Dexun. Fourth order accurate compact scheme with group velocity control (GVC)[J]. *Science in China Series A*, 2001, (6):554-561.
- [5] Yee H C, Warming R F, Harten A. Implicit total variation diminishing schemes (TVD) for steady state calculations[J]. *J Comp Phys*, 1985, **57**:327-360.
- [6] Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes [J]. *I SIAM J Num Anal*, 1987, **24**:279-309.
- [7] Brio M, et al. Two-dimensional Riemann solver for Euler equations of gas dynamics[J]. *J Comput Phys*, 2001, **167**:177-195.
- [8] Harten A, Engquist B, Chakravarthy S R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III[J]. *J Comput Phys*, 1987, **71**:231-303.
- [9] Le Veque. Wave propagation algorithms for multi-dimensional hyperbolic systems[J]. *J Comput Phys*, 1998, 143.
- [10] Rezzolla B L, Zanotti O. An improved exact Riemann solver for relativistic hydrodynamics[J]. *J Fluid Mech*, 2001, **449**:395-411.
- [11] Lax P D, Wendroff B. System of conservation laws [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1960, **8**:217-237.
- [12] Zhang Qiang. Numerical study of Richtmyer-Meshkov instability driven by cylindrical shocks[J]. *Phys Fluids*, 1998, **10**:874-992.

Group velocity control scheme and two-dimensional riemann solver

TIAN Bao-lin, FU De-xun*, MA Yan-wen

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: It is a challenging work to simulate flows with strong shock waves and contact discontinuities in the field of computational fluid dynamics, which are the basic elements of many practical flows. The 3rd order upwind compact scheme is of the character of high precision and high resolution, but numerical oscillations occurs when it is used to simulate shock waves. In this paper, according to the characters of group velocity, one group velocity control (GVC) scheme was constructed based on the 3rd order upwind compact scheme, which can simulate the complex flows with strong shock waves and contact discontinuities correctly. Based on the GVC scheme, a numerical solver was constructed to simulate two-dimensional interface problems of high pressure and density ratio. Numerical results show that it is an effective method to identify shock waves and contact discontinuities.

Key words: compact scheme; group velocity control; two-dimensional riemann problem