第 26 卷 第 3 期
2008 年 09 月
空 气 动 力 学 学 报
ACTA AERODYNAMICA SINICA
Vol. 26 , No. 3
Sep. ,2008

文章编号: 0258-1825(2008)03-0378-07

壁判据用于计算流体力学(CFD)可信度评估

高 智
(中国科学院力学研究所,北京 100080)

摘 要:本文把作者提出的近壁干扰剪切流动(ISF)全域理论与流体运动方程组及流体在壁面上无滑移条件相结合导出一组壁面判据。壁判据为计算流体力学(CFD)仿真的可信度评估提供了基于流体理论的一条直接验证途径。对不可压缩流动的十一个熟知的 NS 方程组精确解,包括二维驻点和斜入射再附点流,二维分离点和背风驻点流,轴对称驻点和背风驻点流,旋转圆盘附近的三维 Von Karman 流、收缩和扩张渠道流和非定常斜入射三维驻点流;以及经典边界层及其无粘外流和相似性边界层及其粘外流的 NS 方程组解,提出可用于验证近壁流动计算的几个壁相关函数。证实它们准确满足所有壁判据;说明壁判据可用来检验 NS 方程组数值解近壁计算结果的计算精度并验证其可信度。

关键词:计算流体力学(CFD);CFD 仿真的可信度;干扰剪切流动理论;壁面判据
中图分类号:V211.3 **文献标识码**: A

0 引 言

计算流体力学(CFD)在气动计算中的应用越来越广泛,因此人们要问 CFD 仿真的可信度到底如何?影响 CFD 仿真结果的因素有很多,特别是 Navier-Stokes(NS)方程组的解不唯一,使得 CFD 仿真的可信度成为一个突出和亟待解决的课题。人们提出了可信度验证和确认的不少方案和论述[1,2],例如验证的实验比较方法,精确解比较方法,制造解比较方法,网格收敛性分析,软件质量管理等;确认研究包括许多层次,确认层次结构分析,流动分类研究,确认实验指南等。另一方面,对 CFD 仿真的可信度研究,很有必要开发评估 CFD 仿真可信度的理论方法。对 CFD 气动仿真近壁流动和壁面问题十分重要。本文把作者提出的近壁干扰剪切流(ISF)全域理论和流体运动方程组及壁面流体无滑移条件相结合,导出了可用于检验 CFD 仿真结果好坏的一组壁判据,并证明了不可压缩 Navier-Stokes(NS)方程组的十一个精确解以及边界层、相似性边界层和相邻无粘外流 NS 方程组解准确满足壁判据。

1 导出壁面判据的基本依据

导出壁面判据的一个依据是作者提出的干扰剪切流动(ISF)理论和近壁 ISF 全域理论[3-5]。ISF 是小粘性流体运动中普遍存在的一种基本流动,例如驻点流,粘性射流及相邻无粘外流,近壁粘性——无粘干扰流动等。粘性——无粘干扰可忽略的特殊情况下,ISF 的粘性部分为经典边界层流动[6]。ISF 粘性部分的流动规律是流向(x 方向)对流占优,法向(y 方向)对流扩散相竞争,数学表述(对二维不可压缩流动)是:

$$u\frac{\partial f}{\partial x} \gg \delta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$v\frac{\partial f}{\partial x} \cong \delta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{2}$$

其中 $f = u, v$ 或 T;u 和 v 分别为 x 和 y 坐标方向流速分量,符号 $\cong$ 表示数量级意义上的相等,$f = u$ 和 v 时 $\delta = \nu$,ν 为运动粘性系数。$f = T$ 时 $\delta = \lambda$,λ 为热传导系数。ISF 粘性流在法向和流向的局部长度尺度 l_n 和 l_s 以及局部速度尺度 v_n 和 v_s 满足:

$$v_n l_n \cong \nu \tag{3}$$

$$l_n \cong l_s Re_s^{-1/2} \tag{4}$$

其中 $Re_s = v_s l_s / \nu$,通常 $Re_s \gg 1$;因此 ISF 的粘性流是流向长度长、法向长度很短、物理量法向梯度很大的剪切薄层。对不可压缩干扰剪切湍流(ISTF),类似于式(1)和式(2)的关系成立,即:

$$\overline{U}\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} - \overline{v'f'}\right) \tag{5}$$

* **收稿日期**: 2007-01-17; **修订日期**: 2007-05-28.
作者简介: 高 智(1937-),男,研究员,从事流体力学和计算流体力学研究.

$$\overline{v}\frac{\partial \overline{f}}{\partial y} \cong \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta\frac{\partial \overline{T}}{\partial y} - \overline{v'f'}\right) \tag{6}$$

其中 $\overline{f} = \overline{u}, \overline{v}$ 或 $\overline{T}$; $\overline{u}, \overline{v}$ 和 $\overline{T}$ 是 u, v 和 T 的时间平均量, u', v' 和 T' 分别是 u, v 和 T 的脉动量。

近壁 ISF 全域理论,ISF 理论表明:它不仅是一些单元基本流动(例如驻点流、干扰边界层流、旋转圆盘附近三维 Von Karman 旋转流等)的理论,而且也是复杂外形物体高雷诺数绕流中近壁粘性—无粘干扰诸流动的一般理论,这是因为壁面(拐点、尖点等壁面曲率很大的特殊点邻域除外)邻域的流动为一些 ISF 所组成,这些 ISF 包括迎风驻点流、边界层及其无粘外流、多层边界层及其无粘外流、分离点流、分离区近壁流动、再附点流、再附边界层及其相邻无粘外流和背风驻点流等;上述这些流动在壁面邻域显然都满足壁面法向对流扩散相竞争(参见式(2)),在壁面切平面内一个坐标轴方向或两个坐标轴方向对流占优(参见式(1))。因此近壁流动规律的理论概括就是近壁 ISF 全域理论。近壁 ISF 全域理论的数学表述对二维不可压缩流为:

$$V\frac{\partial F}{\partial \eta} \cong \delta\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \tag{7}$$

$$U\frac{\partial F}{\partial \eta} \gg \delta\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \tag{8}$$

其中 ξ, η 为贴体正交坐标变量, η 轴方向为壁面法向, $F = U, V$ 或 T, U 和 V 分别为 ξ 和 η 方向流速分量。近壁 ISF 局部长度和速度尺度同样满足关系式(3)和(4)。

ISF 理论和近壁 ISF 全域理论表明:ISF 和近壁流动的描述和计算存在唯一的最佳坐标系,粘性剪切薄层法向为一坐标轴方向,流向为另一或另二个坐标轴方向的正交坐标系为 ISF 的最佳坐标系。复杂外形物体高雷诺数绕流中近壁复杂 ISF 的最佳坐标系因此就是贴体正交坐标系。使用最佳坐标系的好处是:可用简洁和准确的数学语言(如见式(1)～(8))反映 ISF 和近壁流动的基本特点和规律,能使 NS 方程组得到明显的化简并由此导出 ISF 控制方程组和壁面判据,且容易生成合理的网格。对 ISF 和近壁流动的计算,若使用非最佳坐标系,则能反映 ISF 和近壁流动的基本特点的数学表述复杂,NS 方程组难以化简,导不出简单有用的壁面判据,合理网格不易生成,计算中分辨和捕捉 ISF 的粘性剪切薄层比较困难。这里需要强调,对高雷诺数流动,流体与流体之间、流体与外界(例如固壁)之间的动量、能量和质量交换以及流态从层流经转捩到湍流的演化,主要发生在 ISF 的粘性剪切薄层中,因此正确分辨并高精度捕捉粘性剪切薄层流动是对数值计算的起码和基本的要求。

2　壁面判据

把近壁干扰剪切流(ISF)全域理论、把关系式(1)和(2)或(7)和(8)与近壁复杂 ISF 最佳坐标系中的流体运动基本方程组及壁面上速度无滑移条件相结合可导出一组壁面判据,对二维不可压缩流动导出的壁面判据为:

$$\frac{1}{\rho}(\nabla P)_w = \nu\left(\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2}\right)_w \tag{9}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_w = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w^2 \tag{10}$$

其中 y 坐标轴为壁面法向,壁面上速度无滑移条件是 $y = 0$, $u = v = 0$;类似地,对不可压湍流,例如取流体运动方程组为 Reynolds 平均(RA)NS 方程组时,则把干扰剪切湍流(ISTF)理论关系(5)和(6)与 ISTF 最佳坐标系中 RANS 方程组及壁面上平均速度无滑移条件相结合,导出如下的湍流壁面判据

$$\frac{1}{\rho}(\nabla \overline{P})_w = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \overline{\vec{u}}}{\partial y} - \overline{v'\vec{u}'}\right)\right]_w \tag{11}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)_w^2 = \rho c_p\frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'T'})_w - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'p'})_w \tag{12}$$

壁面判据式(9)和式(10)或式(11)和式(12)在壁面上处处适用(法:壁面上曲率很大的点邻域除外)。对可压缩流动,可类似地导出相应的壁面判据。应该提到,为适应边界形状复杂的绕流流场计算,便于处理边界条件,通常采用把直角坐标系(t, x, y, x)中 NS 方程组转换到贴体正交坐标系(t, ξ, η, ζ)中进行求解,从直角坐标系 NS 方程组到计算坐标系(t, ξ, η, ζ)NS 方程组的转换关系可参见文献[7],这里不再重复。需要指出,正如节 1 所述,贴体正交坐标系是近壁复杂 ISF 的最佳坐标系,近壁复杂 ISF 可能包括迎风驻点流、边界层及其无粘外流、多层边界层及其无粘外流、分离点流、分离区近壁流动、再附点流、再附边界层及其无粘外流、底部近壁流动、背风驻点流等。不失一般性,设计算坐标系 η 方向为壁面法向,则近壁粘性流在 η 方向对流扩散相竞争,在壁面切向即 ξ 和 ζ 方向对流占优,这一流动规律的数学表达为:

$$\rho V\frac{\partial f}{\partial \eta} \cong \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\delta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) \tag{13}$$

$$\rho U\frac{\partial f}{\partial \xi} \gg \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\delta\frac{\partial f}{\partial \xi}\right),$$

$$\rho W\frac{\partial f}{\partial \zeta} \gg \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\delta\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right) \tag{14}$$

其中 $f = U, V, W$ 或 T, U、V 和 W 为贴体正交坐标系 ξ, η 和 ζ 轴方向的流速分量; $f = U, V$ 和 W 时, $\delta = \mu = \rho\nu$; $f = T$ 时 $\delta = \lambda/c_p$, c_p 常数。按照近壁 ISF 全域理论,流速分量 U, V, W,压力 P 和温度 T 在壁面(注:壁面曲率很大的点邻域除外)上处处满足如下的壁面判据:

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_w = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)_w = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_w + \mu\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2\right]^2 = 0 \tag{16}$$

可压缩湍流流动的壁面判据可类似导出。流体运动方程组解在壁面上满足壁面判据是近壁流动解为可信且准确的必要条件。因此壁面判据可用来检验 CFD 仿真近壁数值结果的好坏,即可用于 CFD 验证和仿真可信度的评估,同时为近壁网格与算法和边界处理的更好协调,为湍流模型的评估、改进和发展提供了一条理论途径。

3　NS 方程组精确解准确满足壁面判据的十一个例子

本节我们证明不可压缩流动熟知的十一个 NS 方程组精确解准确满足壁面判据。

3.1　二维驻点流和斜驻点流,驻点流和斜驻点流均为干扰剪切流(ISF),这两种情况下,近壁粘性流和外部无粘流的 NS 方程组解可表示为[6,8]:

$$u = axf'(\eta) + 2k\sqrt{a\nu}g(\eta),\ v = -\sqrt{a\nu}f(\eta) \tag{17}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho[a^2x^2 + 2a\nu F(\eta) + \mathrm{const}] \tag{18}$$

$$u = ax + k\sqrt{a\nu}y,\ v = -ay \tag{19}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho[a^2(x^2 + y^2) + \mathrm{const}] \tag{20}$$

其中 u 和 v 为 x 和 y 轴方向流速分量, y 方向为壁面法向, k 表示斜驻点流之无粘外流相对于壁面($y = 0$)的倾斜度, $k = 0$ 时无粘来流垂直流向壁面为驻点流; $\eta = y\sqrt{a/\nu}$,求解 $f(\eta)$, $g(\eta)$ 和 $F(\eta)$ 的方程由 NS 方程组推出,为:

$$f''' + ff'' + 1 = 0 \tag{21}$$

$$g'' + fg' - fg' = 0,\ F' - ff' - f'' = 0 \tag{22}$$

壁面($\eta = 0$)上边界条件为

$$f(0) = f'(0) = g(0) = 0 \tag{23}$$

用 f, g 和 F 表示的壁面判据式(9)为

$$-a^2x = a^2xf'''(0) + 2ka\sqrt{a/\nu}g''(0) \tag{24}$$

$$F'(0) = f''(0) \tag{25}$$

把边界条件(23)代入方程组(21)-(23),证实壁面判据(24)-(25)准确成立,并可化简为 $f'''(0) = -1$ 和 $F'(0) = f''(0)$,证实驻点流和斜驻点流 NS 方程组精确解准确满足壁判据。

3.2　二维背风驻点流和分离点流,背风驻点流和分离点流均为 ISF,这两种流动中近壁粘性流的 NS 方程组解可表示为:

$$u = -axf(\eta) + k\sqrt{a\nu}g(\eta),\ v = \sqrt{a\nu}f(\eta) \tag{26}$$

$$p = -\frac{1}{2}\rho[a^2x^2 + 2a\nu F(\eta) + \mathrm{const}] \tag{27}$$

$f(\eta)$, $g(\eta)$ 和 $F(\eta)$ 满足

$$-f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0 \tag{28}$$

$$g'' - fg'f'g' = 0,\ F' - ff' + f'' = 0 \tag{29}$$

壁上边界条件为式(23)。用 f, g 和 F 表示壁面判据式(9)为:

$$-a^2x = -a^2xf'''(0) + 2ka\sqrt{a/\nu}g''(0) \tag{30}$$

$$F'(0) = -f''(0) \tag{31}$$

把边界条件(23)代入方程组(26)～(27),证实壁面判据式(30)和式(31)准确成立,并可化简为 $f'''(0) = 1$ 和 $F'(0) = -f''(0)$。证实背风驻点流和分离点流 NS 方程组精确解准确满足壁面判据。

3.3　不可压轴对称驻点流和背风驻点流,这两种流动均为 ISF,计算该 ISF 的最佳坐标系为圆柱坐标系(r, ϕ, z),驻点位于坐标原点 $r = 0, z = 0$; z 轴为这两种 ISF 粘性层的法向, ISF 外部无粘流和近壁粘性流 NS 方程组为[6,8,9]:

$$U = \pm ar,\ V = 0,\ W = \mp 2az \tag{32}$$

$$p = -\frac{\rho}{2}a^2(r^2 + 4z^2) + \mathrm{const} \tag{33}$$

$$u = Uf'(\eta) = \pm arf'(\eta),\ v = 0,\ W = \mp 2\sqrt{a\nu}f(\eta) \tag{34}$$

$$p = -\frac{\rho}{2}a^2\left(r^2 + 4\frac{}{a}F(\eta) + \mathrm{const}\right) \tag{35}$$

其中 $\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}}z$, U 或 u 和 W 或 w 表达式右端符号

“+”和“-”为驻点流,而符号“-”和“+”为轴对称背风驻点流。把式(34)和式(35)代入 r 和 z 方向 NS 动量方程,得到 $f(\eta)$ 和 $F(\eta)$ 满足的如下常微分方程组:

$$\pm f''' + 2ff'' \mp f'^2 + 1 = 0 \tag{36}$$

$$2f'(\eta) = 2ff' \mp \pm f'' \tag{37}$$

壁面($\eta = 0$)上

$$f(0) = f'(0) = 0 \tag{38}$$

用 f 和 F 表示的壁面判据为

$$-a^2 r = \pm a 2 r f'''(0) \tag{39}$$

$$-a^{1/2} r^{1/2} F'(0) = \mp a^{1/2} r^{1/2} f''(0) \tag{40}$$

把边界条件式(38)代入方程(36)和(37)得到壁判据(39)和(40),并可化简为 $f''(0) = \mp 1$, $F'(0) = \pm f''(0)$ 可见轴对称驻点流和背风驻点流 NS 方程组精确解准确满足所有的壁面判据。

3.4　旋转圆盘附近的不可压三维 Von Karman 流,该流动同样为 ISF,计算该 ISF 的最佳坐标系是原点位于圆盘中心,z 轴垂直于盘面的圆柱坐标系(r,ϕ,z),近壁粘性流 NS 方程组精确解可表示为[6]:

$$u = r\omega f(\xi),\ v = r\omega g(\xi),$$
$$w = \sqrt{\omega\nu}\, h(\xi),$$
$$p = p_0 + \rho\nu\omega P(\xi) \tag{41}$$

其中 u,v 和 w 分别为径向 r、周向 ϕ 和 z 轴方向的流速分量,ω 为圆盘旋转角速度,$\xi = z\sqrt{\omega/\nu}$,f,g,h 和 $p(\xi)$ 满足的方程组为:

$$\begin{aligned} &2f + h' = 0, \quad f^2 + fh - g^2 - f'' = 0 \\ &2fg + hg' - g'' = 0, \quad P'' + hh' - h'' = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

在圆盘上,f,g,h 和 p 满足的边界条件为

$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \quad g(0) = 1, \\ &h(0) = 0, \quad P(0) = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

圆盘上壁面判据为

$$\begin{aligned} &g^2(0) = f''(0), \\ &g''(0) = 0, P'(0) = h''(0) \end{aligned} \tag{44}$$

把壁面边界条件(43)代入方程组(42)得到三个壁判据(44),证实不可压缩旋转圆盘附近的三维 Von Karman 流的 NS 方程组精确解准确满足所有的壁面判据。

3.5　收缩和扩张渠道不可压缩流动,该流动为 ISF,计算该流动的最佳坐标系是原点位于渠道假想源(汇)点的极坐标系(r,θ),$\theta = \pm\alpha$ 为渠道壁,壁面法向 ϕ 方向上对流扩散相竞争,壁面切向 r 方向对流占优。该流动 NS 方程组精确解可表示为[9]:

$$u_r / u_{max} = f(\eta),\ \eta = \theta/\alpha \tag{45}$$

$$f''' + 2\alpha Re f f' + 4\alpha^2 f' = 0 \tag{46}$$

两壁($\eta \pm 1$)上边界条件为:

$$f(1) = f(-1) = 0 \tag{47}$$

其中 $Re = r\alpha u_{max}/\nu$,两壁上的壁判据为:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_w = \frac{\nu u_{max}}{\alpha^2 r^2} f'''_w, \\ &\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_w = \frac{2\nu u_{max}}{r\alpha} f'_w \end{aligned} \tag{48}$$

或

$$f'''_w + 4\alpha^2 f'_w = 0 \tag{49}$$

把壁上速度无滑移条件(47)代入方程(46)直接导出壁面判据(49),证实收缩和扩张渠道不可压缩流 NS 方程组精确解准确满足壁面判据。应当指出,对于扩张渠道流动(亦称源楔流动),当雷诺数 Re 足够大时,在两楔壁上会出现对称或非对称倒流[6],即近壁处为流向假想汇点的“收缩”渠道流动,中心区为源楔流动,不过此时壁面判据依然适用。

3.6　非定常斜入射不可压缩三维驻点流,这种非定常运动方式特定、且已找到 NS 方程组精确解[8,9]的流动,同样为干扰剪切流动(ISF)。计算该 ISF 的最佳坐标系为三维直角坐标系,ISF 粘性层法向也是壁面法向为 Z 轴方向,坐标原点(x,y,z) = (0,0,0)为无粘流动驻点,位于真实驻点的邻域。离开壁面($z = 0$)较远的无粘流为有旋流,假定以 $(1-\beta t)^{-1}$ 方式作非定常运动,时间 t 满足 $-\infty < t < \frac{1}{\beta}$。无粘流解为[8,9]:

$$U = \frac{\alpha(x + \gamma z)}{1 - \beta t},\ V = \frac{\beta y}{1 - \beta},\ W = \frac{(\alpha + \beta) z}{1 - \beta t} \tag{50}$$

$$p = -\frac{\rho}{(1 - \beta t)^2}\left[\frac{\alpha(\alpha + \beta)}{2}(x^2 + z^2) + \beta^2 y^2 + \text{const}\right] \tag{51}$$

其中 α,β 和 γ 为常数,取 $\alpha > 0$,则 β 可正可负,但($\alpha + \beta$)必须大于零,以保证 w 为负,使流体流向壁面。近壁 ISF 粘性层 NS 方程组解即可写成:

$$u = \alpha\left[\frac{x f^2(\eta)}{1 - \beta t} + \frac{\gamma g(\eta)}{\sqrt{1 - \beta t}}\right],\ \frac{\beta y h'(\eta)}{1 - \beta t} \tag{52}$$

$$w = \frac{-[\alpha f(\eta) + \beta h(\eta)]}{\sqrt{1 - \beta t}}\left(\frac{\nu}{\beta}\right)^{1/2} \tag{53}$$

$$p = -\frac{\rho}{(1 - \beta t)^2}\left[\frac{\alpha(\alpha + \beta)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{2}\cdot F(\eta)\,\gamma(1 - \beta t) + \beta^2 y^2 + \text{const}\right] \tag{54}$$

$$\eta = \frac{z}{\sqrt{1 - \beta t}}\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{1/2},\ -\infty < t \le \frac{1}{\beta} \tag{55}$$

把解(52) —(55)代入直角坐标系中三维 NS 方程组,导出 f,g,h 和满足的如下代数方程组:

$$\frac{\beta}{2\alpha}\eta f'' + \frac{\beta}{\alpha}f' + f'^2 - \left(f + \frac{\beta}{\alpha}h\right)f'' = 1 + \frac{\beta}{\alpha}(1 + f''') \tag{56}$$

$$\frac{\beta}{2\alpha}\eta h'' + \frac{\beta}{\alpha}h' + h'^2 - \left(f + \frac{\beta}{\alpha}h\right)h'' = \frac{\beta}{\alpha}(2 + h''') \tag{57}$$

$$\frac{\beta}{2\alpha}\eta g' + \frac{\beta}{2\alpha}g + gf' - \left(f + \frac{\beta}{\alpha}h\right)g' = \frac{\beta}{\alpha}g'' \tag{58}$$

$$\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2\alpha}F' = \beta(\alpha f'' + \beta h'') + (\alpha f' + \beta)\cdot(\alpha f + \beta h) - \frac{1}{2}\beta(\alpha f + \beta h - \eta\alpha f' - \eta\beta h') \tag{59}$$

壁面($\eta = 0$)上的边界条件和 $\eta \to \infty$ 的外部条件分别是

$$f(0) = f'(0) = h(0) = h'(0) = g(0) = F(0) = 0 \tag{60}$$

$$f'(\infty) = h'(\infty) = g'(\infty) = 1 \tag{61}$$

用 f,g,h 和 F 表示的壁面判据是:

$$-\frac{1}{\beta}(\alpha+\beta)x = xf'''(0) + \gamma g''(0)\sqrt{1-\beta t} \tag{62}$$

$$h'''(0) = -2 \tag{63}$$

$$\frac{1}{2}\alpha(\alpha+)F'(0) = \alpha f''(0) + \beta h''(0) \tag{64}$$

把壁面边界条件(60)代入方程组(56)～(59)直接得到壁面判据(62)～(64),并有 $g''(0) = 0$, $f'''(0) = -\frac{1}{\beta}(\alpha+\beta)$。可见非定常斜入射三维驻点流 NS 方程组精确解准确满足所有的壁面判据。

3.7　二维 Couette-Poiseuille 流动、二维 Couette-Poiseuille 流动中,一个方向(x 方向)流速 u 不为零,y 方向流速 v 恒为零,故不可压二维 NS 方程组简化为

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{65}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{66}$$

边界条件为　$y = 0, u = v = 0; y = h, u = U, v = 0$　(67)

由方程组(65)、(66)和边界条件(67)可知,二维 Couette-Poiseuille 流的 NS 方程组精确解准确满足壁面判据。

4　边界层及其相邻无粘外流和相似边界层及其相邻无粘外流的 NS 方程组解

这里有必要对 ISF 的两个重要特例、即经典边界层流动和边界层相似性流动加以讨论。设边界层法向即壁面法向为 y 方向,边界层沿壁($y = 0$)发展,根据边界层理论[5]在边界层内

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{68}$$

因此在壁面($y = 0$)上应满足"自然"边界层理论关系

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_w = 0, \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w = -u_e\frac{du_e}{dx} \tag{69}$$

这里 u_e 为边界层外缘切向流速。我们将证明:熟知的经典边界层解和边界层相似解[5],并不满足式(69),而满足近壁 ISF 全域理论给出的壁面判据。证明如下,边界层相似解[5]为:

$$\frac{u(\xi,\eta)}{u_n(\xi)} = f'(\eta) \tag{70}$$

$$-v(\xi,\eta)\sqrt{Re} = \frac{d}{d\xi}(U_n\bar{\delta})f + u_n\left(\bar{\delta}\frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{d\bar{\delta}}{d\xi}\eta f'\right) \tag{71}$$

其中 $\xi = \frac{x}{l}$, $\eta = \frac{y}{l}\frac{\sqrt{Re}}{\bar{\delta}}$, $Re = \frac{u_\gamma l}{\nu}$, $\bar{\delta}$ 与边界层厚度成正比,u_γ 为参考速度,u_n 为特征匹配速度。$f'(\eta)$ 满足如下的常微分方程:

$$f''' + \alpha_1 ff'' + \alpha_2 - \alpha_3 f'^2 = 0 \tag{72}$$

在壁面($\eta = 0$)上

$$f(0) = f'(0) = 0 \tag{73}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\delta}}{u_\gamma}\frac{d}{d\xi}(u_n\bar{\delta}) = \text{const} \tag{74}$$

$$\alpha_2 = \frac{\bar{\delta}^2}{u_\gamma}\frac{u_e}{u_n}\frac{du_e}{d\xi} = \text{const} \tag{75}$$

$$\alpha_3 = \frac{\bar{\delta}^2}{u_\gamma}\frac{du_n}{d\xi} = \text{const} \tag{76}$$

把相似性解(70)和(71)代入 NS 方程组,利用壁面($\eta = 0$)上速度无滑移条件推出:

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_w = \frac{u_n u_\gamma}{\bar{\delta}^2}f'''(0) = -u_e\frac{du_e}{d\xi} \tag{77}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_w = \frac{\nu u_n}{l\bar{\delta}}\frac{d\bar{\delta}}{d\xi}f''(0) \tag{78}$$

对 Blasius 平板边界层,$u_e = \text{const}$,并有

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_w = 0 \tag{79}$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta}\right)_w = 0.2348\frac{\nu u_e}{x} \tag{80}$$

由式(78)和式(80)可知, $\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) \neq 0$,即相似边界层及其无粘外流和经典边界层及其无粘外流的 NS 方程组解不完全满足边界层理论给出的“自然”边界关系(69),而满足关系(77)和(78)或(79)和(80),关系式(77)～(80)正是 ISF 理论给出的壁面判据。

上述 NS 方程组十一个精确解和相似边界层及其无粘外流 NS 方程组解准确满足壁判据的情况说明,ISF 理论的壁面判据可用来检验 NS 方程组数值解在近壁处的计算精度,可用来验证 NS 方程组近壁数值解的可信度。

5　用于 CFD 可信度评估的一些壁相关函数

由近壁 ISF 全域理论和壁面判据出发可导出一些壁相关函数,例如壁面摩阻压力梯度比,壁面热流摩阻比,壁面温度摩阻比等,这些壁相关函数同样提供了利用 NS 方程组数值解本身检验数值解的计算精度和验证 CFD 可信度的直接验证方法。

壁面摩阻压力梯度比(不可压缩流动)

$$\frac{\tau_w}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w}{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_w} \tag{81}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_w} = 0 \tag{82}$$

对二维驻点流,式(81)可化简为:

$$\frac{\tau_w}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w} = -1.2326\sqrt{\frac{\nu}{a}}, \quad a = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0.4\sqrt{\nu/a}} \tag{83}$$

对轴对称驻点流,式(81)可化简为:

$$\frac{\tau_w}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_w} = -1.3120\sqrt{\frac{\nu}{a}}, \quad a = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0.4\sqrt{\nu/a}} \tag{84}$$

壁面热流(heat flux)摩阻比

$$\frac{q_w}{\tau_w^2} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_w}{\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_w} \tag{85}$$

壁面温度摩阻比

$$\frac{T_w - T_\infty}{\tau_w^2} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_w}{\left(\alpha\mu\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_w} \tag{86}$$

其中 α 为热传导系数[5], $q_w = \alpha(T_w - T_\infty)$。上述诸壁相关函数,式(81)～(86)不仅可用于 CFD 可信度的验证,而且说明温度在壁面的一、二阶法向导数的高精度计算,对算好壁面热传导和壁温至关重要。

6　结束语

干扰剪切流(ISF)理论、近壁 ISF 全域理论与流体运动方程组和速度无滑移壁面条件相结合导出的壁面判据,为检验 NS 方程组数值解的数值精度和验证 CFD 仿真的可信度提供了一条理论途径。不可压缩流动的一些熟知的 NS 方程组精确解准确满足所有壁面判据,边界层及其相邻无粘外流、相似边界层及其相邻无粘外流的 NS 方程组解满足所有的壁判据,证实壁面判据可用来检验 NS 方程组近壁数值解的计算精度和验证 CFD 近壁数值解的可信度。

参　考　文　献:

[1] OBERKAMPF W L, TRUCANO T G. Verification and validations in computational fluid dynamics[R]. SAND 2002-0529, 2002.

[2] 邓小刚,宗文刚,张来平,高树椿,李超. 计算流体力学中的验证与确认[J]. 力学进展,2007,37(2):279-288.

[3] 高智. 粘性 - 无粘干扰流动理论[J]. 力学学报,1990,22(1):8-19.

[4] 高智. 粘性-无粘干扰剪切湍流理论[J]. 中国科学(A辑),1992,22(6):605-615.

[5] GAO ZHI. A theoretical way to verify creditability of CFD simulations and experimental measurements for near wall flow[A]. Proc. Of Asian Symposium of Visualization[C] (pp. 41-48), June, 2007, Hong Kong.

[6] SCHLICHTING, H, GERSTEN K. Boundary-layer theory[M]. ed. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[7] TANNEHILL J C, ANDERSON D A, PLETCHER R H. Computational fluid dynamics and heat transfer[M]. 2nd ed. Taylor and Francis, New York 1997.

[8] GUIBO LI, MINGGUO DAI, ZHI GAO. An application of interacting shear flow theory: exact solution for unsteady oblique stagnation point flow[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22: 397-402.

[9] Wang C Y. Exact solutions of the Navier-Stokes equations[J]. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23: 159-177.

(下转第 393 页)

Numerical simulation investigation of supersonic cavity flow

MA Ming-sheng[1], ZHANG Pei-hong[2], DENG You-qi[2], WU Xiao-jun[2]
(1. *Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*;
2. *China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang Sichuan 621000, China*)

Abstract: The three different type cavity flows are simulated numerically with the implicit approach LU-SGS and using Roe scheme and S-A turbulent model. The calculation results are consistent with the experimental data. Compressible flows over cavities with a series value of length-to-depth ratio (L/D) were investigated computationally. The pressure distributions, streamlines, pressure and mach counters are obtained. It is analyzed that the mechanism of cavity flow changes from open cavity flow to transitional cavity flow and finally to closed flow with the increasing of length-to-depth ratio (L/D).

Key words: cavity flow; numerical simulation; S-A turbulent model

---

(上接第 383 页)

The wall-surface criteria with application to evaluating creditability of CFD simulations

GAO Zhi
(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract: A set of wall-surface criteria deduced by combing the near-wall interacting shear flows (ISF) theory presented by the author with the basic equations of fluid motion and the velocity no-slip conditions at the wall are suggested in this paper. The wall-surface criteria provide a theoretical way to evaluate creditability of CFD simulations. The well-known eleven exact solutions of the Navier-Stokes (NS) equations for incompressible fluid flows are proved to be satisfied accurately all wall-surface criteria. The solutions of NS equations for both plate boundary layer/outer inviscid flow and "similar" boundary layer/outer inviscid flow satisfy all wall-surface criteria. These show that the wall-surface criteria can be to examine accuracy of numerical solutions of NS equations and to verificate creditability of NS equations simulations for near wall flow. Several wall-related functions are also presented, which can be to examine numerical accuracy of CFD simulations for near wall flows.

Key words: Computational Fluid Dynamics (CFD); creditability of CFD simulations; interacting shear flow theory; wall-surface criteria